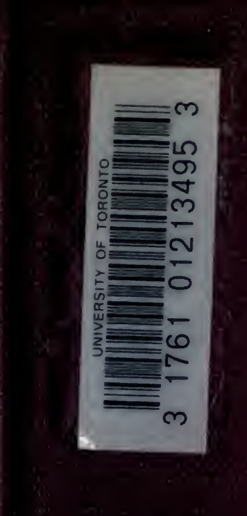

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01213495 3

LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

AUX

DÉRIVÉES PARTIELLES.

42788 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

AUX

DÉRIVÉES PARTIELLES

PAR

CHARLES RIQUIER,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CAEN,

LAURÉAT DE L'INSTITUT.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

55, Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1910

PRÉFACE.

Les questions relatives à la Théorie générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles ont été jusqu'ici fort peu étudiées; en me livrant, sur certaines d'entre elles, à un long et attentif examen, j'ai été conduit à des résultats qui m'ont semblé dignes d'intérêt, et que j'ai fait connaître successivement à mesure que je les obtenais. Toutefois, la dispersion de ces travaux dans un assez grand nombre de Recueils divers, la confusion inévitable qui provient du fait même de leur dispersion, enfin la complication parfois extrême de raisonnements que j'ai ensuite réussi à simplifier, en rendent actuellement l'étude fort incommode. J'ai donc pensé qu'il y aurait quelque utilité à les réunir tous, ou du moins les plus importants d'entre eux, en un même exposé, méthodiquement ordonné; c'est ce qui m'a déterminé à écrire le présent Ouvrage : bien que les questions qui s'y trouvent traitées présentent, en raison de leur généralité, des difficultés sérieuses, j'ai le ferme espoir que ceux qui voudront bien le lire avec quelque attention verront, à travers les multiples détails de l'exécution, se dessiner nettement l'ensemble des résultats.

I. La première question que je me sois efforcé de résoudre, lorsque j'ai entrepris l'étude des systèmes partiels quelconques, est celle de l'existence même de leurs intégrales. Je commen-

cerai par énumérer les quelques travaux antérieurs où, à un point de vue plus ou moins général, cette même question d'existence se trouve étudiée.

Cauchy parvint le premier, en considérant les cas les plus simples, qui se présentent tout d'abord, à des résultats rigoureusement démontrés. Dans les Tomes XIV, XV et XVI des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1842 et 1843), il prouve l'existence des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires, en précisant ce que l'on doit entendre par *intégrales générales* d'un pareil système; puis il étudie au même point de vue un système linéaire de m équations aux dérivées partielles du premier ordre impliquant un nombre égal de fonctions inconnues,

$$\varpi_1, \quad \varpi_2, \quad \ldots, \quad \varpi_m,$$

et tel qu'on puisse le résoudre par rapport aux m dérivées

$$\frac{\partial \varpi_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varpi_2}{\partial t}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \varpi_m}{\partial t},$$

toutes relatives à une même variable t. La méthode qu'il emploie, sous le nom de *Calcul des limites,* pour démontrer la convergence des développements des intégrales, est plus connue aujourd'hui sous le nom de *Méthode des fonctions majorantes :* le principe en a été adopté, après lui, par presque tous les géomètres qui se sont occupés de ce genre de questions.

En 1856, MM. Briot et Bouquet, dans un Mémoire sur les systèmes d'équations différentielles ordinaires (¹), donnèrent une démonstration nouvelle de l'existence de leurs intégrales.

(¹) Briot et Bouquet, *Mémoire sur les fonctions définies par les équations différentielles* (*Journal de l'École Polytechnique,* Cahier XXXVI).

En 1872, le même point fut établi pour les systèmes, dits *complètement intégrables,* d'équations différentielles totales, et trois géomètres, MM. Méray, Bouquet et Mayer, en publièrent presque simultanément la solution (¹).

En 1875, les résultats, encore peu connus, de Cauchy sur les systèmes partiels furent démontrés de nouveau par M. Darboux et par Mme de Kowalevsky. Cette dernière y avait été conduite par la considération du système partiel qui porte son nom, système composé d'équations en nombre égal à celui des fonctions inconnues, et tel, qu'en désignant par

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_g$$

les fonctions dont il s'agit, et par

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_g$$

les ordres respectifs du système par rapport à elles, ce dernier soit résoluble par rapport aux dérivées

$$\frac{\partial^{k_1}\varphi_1}{\partial x^{k_1}}, \quad \frac{\partial^{k_2}\varphi_2}{\partial x^{k_2}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{k_g}\varphi_g}{\partial x^{k_g}},$$

toutes relatives à une même variable x. Les recherches de

(¹) Méray, *Revue des Sociétés savantes* (*Sciences mathématiques, physiques et naturelles,* t. III, 1868).

Méray, *Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale,* 1872, p. 143.

Bouquet, *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques,* t. III, 1872, p. 265.

Mayer, *Mathematische Annalen,* t. V, 1872, p. 448, et *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques,* 1re série, t. XI, 1876.

Une nouvelle démonstration du même point, pour laquelle j'ai prêté ma collaboration à M. Méray, a été publiée en 1889 dans les *Annales de l'École Normale* (Méray et Riquier, *Sur la convergence des développements des intégrales d'un système d'équations différentielles totales*); elle se trouve reproduite dans l'Ouvrage de M. Méray ayant pour titre : *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques* (1re Partie, p. 256 et suiv.).

Mme de Kowalevsky font l'objet d'un Mémoire publié dans le *Journal de Crelle* (¹); M. Darboux, qui avait entrepris de son côté une recherche analogue, s'est borné à indiquer sa démonstration dans deux Notes communiquées à l'Académie des Sciences (²).

En 1880, M. Méray publia un Mémoire où il se proposait de démontrer d'une manière générale l'existence des intégrales des systèmes d'équations aux dérivées partielles (³). Comme la lecture approfondie de ce Mémoire a été le point de départ de mes propres travaux, comme j'ai pu me convaincre d'ailleurs que son contenu est ignoré du public et des auteurs, je crois devoir entrer à ce sujet dans quelques détails.

M. Méray considère d'abord un système *du premier ordre*, résolu par rapport à un certain nombre de dérivées, et il distingue essentiellement, *pour chaque fonction inconnue*, les variables indépendantes par rapport auxquelles sont prises les dérivées qui figurent dans les premiers membres du système, de celles qui sont étrangères à la formation des dérivées dont il s'agit; les premières sont, pour lui, les variables *principales* de la fonction considérée, les dernières ses variables *paramétriques*, et il va de soi qu'une même variable peut être à la fois principale pour quelque fonction et paramétrique pour quelque autre (⁴). M. Méray partage ensuite les dérivées de tous ordres d'une même fonction inconnue en *paramétriques* et en *principales*, selon que les différentiations d'où elles proviennent in-

---

(¹) Tome LXXX.

(²) DARBOUX, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXX, p. 101 et 317.

(³) MÉRAY, *Démonstration générale de l'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 3e série, t. VI, 1880).

(⁴) *Ibid.*, p. 237.

téressent ses *seules variables paramétriques,* ou bien, soit avec elles, soit sans elles, *quelque variable principale* (1). Considérant enfin, dans un système de cette espèce, un groupe quelconque d'intégrales ordinaires, et les supposant développées par la formule de Taylor à partir de *valeurs initiales* choisies pour les variables, M. Méray nomme *détermination initiale* de chaque intégrale la fonction de ses seules variables paramétriques à laquelle elle se réduit quand ses variables principales prennent leurs valeurs initiales (2); puis il fait observer que les valeurs initiales de ces déterminations et de leurs dérivées de tous ordres sont respectivement égales à celles des intégrales mêmes et de leurs dérivées paramétriques (3).

Pour disposer nettement les équations d'un pareil système, il convient, ajoute M. Méray, de les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire, dont les lignes correspondent aux variables indépendantes et les colonnes aux fonctions inconnues, en plaçant l'équation qui aurait, par exemple, $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour premier membre, dans la case qui appartient à la fois à la colonne (u) et à la ligne (x) : le Tableau ainsi formé peut contenir des cases vides réparties d'une manière quelconque, et ces dernières sont, pour une colonne donnée, en nombre égal à celui des variables paramétriques de l'inconnue correspondante (4). Si, pour fixer les idées, on désigne par u, v, w trois fonctions inconnues des quatre variables indépendantes x, y, z, s, et que l'on considère un système du premier ordre résolu par rapport aux dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial s}, \quad \frac{\partial w}{\partial z},$$

(1) Méray, *loc. cit.*, p. 237.

(2) *Ibid.*, p. 242.

(3) *Ibid.*, p. 242.

(4) *Ibid.*, p. 237 et 238.

la seule inspection du Tableau

(1)

	(u)	(v)	(w)
(x)	$\frac{\partial u}{\partial x} = \ldots$		
(y)	$\frac{\partial u}{\partial y} = \ldots$	$\frac{\partial v}{\partial y} = \ldots$	
(z)	$\frac{\partial u}{\partial z} = \ldots$		$\frac{\partial w}{\partial z} = \ldots$
(s)		$\frac{\partial v}{\partial s} = \ldots$	

construit conformément aux indications précédentes, suffit à faire voir : 1° que la fonction u a pour variables principales x, y, z, pour variable paramétrique s, et pour dérivées paramétriques toutes celles qui intéressent la variable s, à l'exclusion de x, y, z; 2° que la fonction v a pour variables principales y et s, pour variables paramétriques x et z, et pour dérivées paramétriques toutes celles qui intéressent x et z, à l'exclusion de y et s; 3° enfin, que la fonction w a pour variable principale z, pour variables paramétriques x, y, s, et pour dérivées paramétriques toutes celles qui intéressent x, y, s, à l'exclusion de z. Si l'on considère maintenant un groupe d'intégrales, u, v, w, de notre système, et que l'on désigne par x_0, y_0, z_0, s_0 les valeurs initiales choisies pour les variables indépendantes, les déterminations initiales de ces intégrales seront respectivement : la fonction de s à laquelle u se réduit pour

$$x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0,$$

la fonction de x et z à laquelle v se réduit pour

$$y - y_0 = s - s_0 = 0,$$

et la fonction de x, y, s à laquelle w se réduit pour

$$z - z_0 = 0.$$

Cela étant, M. Méray assujettit les seconds membres des systèmes qu'il considère à une certaine restriction, dont l'énoncé importe peu [1], mais qui entraîne la conséquence capitale suivante [2] : *Si aux équations du système donné on adjoint toutes celles qui s'en déduisent par de simples différentiations, ces relations, dites* primitives, *peuvent être rangées dans un ordre de succession tel, que chacune ne contienne dans son second membre (outre les variables indépendantes, les fonctions inconnues et leurs dérivées paramétriques) que des dérivées principales figurant dans les premiers membres des relations antérieures.* M. Méray conclut de là que, pour reconstruire en entier les développements par la série de Taylor d'intégrales que l'on sait d'avance exister, il suffit de connaître seulement leurs valeurs initiales et celles de leurs dérivées paramétriques de tous ordres, ou, ce qui revient au même, les déterminations initiales de ces intégrales [3]; car, ces déterminations étant supposées connues, les relations primitives permettent de calculer successivement les valeurs initiales de toutes les dérivées principales. Puis il aborde le problème inverse, et il cherche si, réciproquement, le système donné admet des intégrales ordinaires ayant pour déterminations initiales respectives des fonctions, choisies au hasard, de leurs divers groupes de variables paramétriques [4].

---

(1) Voici quelle est cette restriction : *En désignant par u et v deux fonctions inconnues quelconques, aucune dérivée de v ne figure dans les seconds membres des équations de la colonne (u), si quelque variable principale de v est paramétrique pour u* (Méray, *loc. cit.*, p. 238).

(2) *Ibid.*, p. 239 et 240.

(3) *Ibid.*, p. 242.

(4) *Ibid.*, p. 243.

Or, pour que les intégrales dont il s'agit existent effectivement, il faut et il suffit, comme M. Méray le fait observer [1] : 1° que, dans le calcul des valeurs initiales des dérivées principales, il y ait concordance numérique entre les diverses expressions fournies pour chacune d'elles par les relations primitives; 2° que les développements des intégrales, construits *a priori* comme nous l'avons indiqué, soient convergents. — Se préoccupant d'abord de la première de ces conditions, M. Méray partage en deux classes bien distinctes les systèmes du premier ordre, dits *immédiats*, qui font l'objet principal de son Mémoire, et il les nomme *passifs* ou *non passifs*, suivant que la concordance numérique des relations primitives y a lieu pour des données initiales quelconques ou seulement pour un choix convenable de ces dernières. Après avoir formulé les conditions de passivité d'un système immédiat [2], il s'occupe en dernier lieu de la convergence des développements des intégrales, et il est ainsi conduit à l'énoncé suivant [3] : *Tout système du premier ordre, immédiat et passif, est complètement intégrable, c'est-à-dire admet un groupe (unique) d'intégrales ordinaires ayant pour déterminations initiales des fonctions arbitrairement choisies de leurs variables paramétriques*. Par exemple, le système (1), s'il est immédiat et passif, admettra, d'après cet énoncé, un groupe (unique) d'intégrales ordinaires, u, v, w, se réduisant respectivement :

u à une fonction donnée de s pour

$$x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0;$$

v à une fonction donnée de x et z pour

$$y - y_0 = s - s_0 = 0;$$

---

(1) MÉRAY, *loc. cit.*, p. 245 et 250.

(2) *Ibid.*, p. 245 et suiv.

(3) *Ibid.*, p. 249 et suiv.

w à une fonction donnée de x, y et s pour

$$z - z_0 = 0.$$

On voit ainsi qu'en supposant rigoureusement établie la convergence des développements des intégrales, la solution générale d'un système (du premier ordre) immédiat et passif dépend de fonctions (ou constantes) arbitraires en nombre égal à celui des inconnues qui s'y trouvent engagées.

Finalement, et en ce qui concerne les systèmes différentiels quelconques, M. Méray admet que de simples résolutions d'équations, combinées avec des différentiations et des réductions au premier ordre, permettent de les ramener à la forme immédiate passive (¹).

Comme je l'ai dit plus haut, la lecture approfondie de ce Mémoire a été le point de départ de tous mes travaux sur les systèmes différentiels partiels, et il va sans dire que, dans cette étude, j'ai examiné de très près la démonstration de la convergence. Cette dernière m'ayant paru inexacte, je fis part de mes doutes à M. Méray, qui les trouva justifiés; les efforts qu'il fit pour modifier la démonstration le conduisirent même à la découverte de certains cas de divergence qu'il ne soupçonnait pas d'abord (²), et il publia en 1890, avec ma collaboration, un

---

(¹) Méray, *loc. cit.*, p. 236, 265, 266.

(²) Méray, *Comptes rendus*, t. CVI, 1888, p. 648.

Il convient de rappeler à ce propos que Mme de Kowalevsky a, la première, attiré l'attention des géomètres sur la possibilité de cette divergence : elle a fait voir en effet (*Journal de Crelle*, t. LXXX) que si, dans l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

on assujettit l'intégrale hypothétique à se réduire, pour $x = 0$, à $\frac{1}{1-y}$, son développement, construit *a priori*, est divergent. Le très intéressant exemple étudié par M. Méray permet de constater en outre que, dans un système

nouveau Mémoire (1) où la convergence des développements des intégrales se trouvait établie, cette fois, d'une façon rigoureuse, mais, bien entendu, pour une partie seulement des systèmes immédiats primitivement étudiés. Ce Mémoire est reproduit presque en entier dans un Ouvrage de M. Méray paru quelques années après (2), et il y est accompagné de quelques indications sommaires sur la marche générale à suivre pour traiter un système quelconque (3); la conclusion du Mémoire de 1880 s'y trouve, naturellement, modifiée, et M. Méray, au lieu de considérer les systèmes *immédiats* passifs comme le type fondamental auquel peut se ramener un système quelconque, assigne le même rôle aux systèmes *immédiats et réguliers* passifs, qui font l'objet du Mémoire de 1890 : malheureusement, cette nouvelle conclusion n'est pas mieux établie que l'ancienne, et, à moins de recourir au changement des variables, qu'on doit, à mon avis, s'efforcer d'éviter, il me paraît peu probable qu'elle soit exacte. Quoi qu'il en soit, la connaissance des méthodes de M. Méray et la collaboration que je lui ai prêtée m'ont été, pour mes recherches personnelles, extrêmement profitables; nonobstant une erreur dans la démonstration de la convergence, ses travaux ont, dès 1880, mis en pleine lumière le fait suivant, qui se trouvait désormais acquis :

Si un système du premier ordre, quelle que soit d'ailleurs sa nature, satisfait à la double condition :

---

résolu par rapport à certaines dérivées premières des inconnues, la divergence des développements peut se produire, alors même que les seconds membres ne seraient pas d'ordre supérieur à 1.

(1) MÉRAY et RIQUIER, *Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles partielles* (*Annales de l'École Normale,* janvier, février et mars 1890).

(2) MÉRAY, *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques,* 1re Partie, p. 310 et suiv.

(3) *Ibid.,* p. 353 et suiv.

1° *de la passivité,*

2° *de la convergence des développements des intégrales,*

sa solution générale dépend de fonctions (ou constantes) arbitraires en nombre égal à celui des inconnues qui s'y trouvent engagées.

Dans l'intervalle qui sépare la publication des deux Mémoires dont je viens de parler, M. König [1] avait établi les conditions d'intégrabilité complète d'un système du premier ordre de forme telle, qu'en désignant par

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_m$$

les fonctions inconnues, et par

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_r, \quad x_{r+1}, \quad \ldots, \quad x_n$$

les variables indépendantes, le système soit résoluble par rapport aux mr dérivées de $z_1, z_2, \ldots, z_m$ relatives à $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Ce type, dans lequel rentrent évidemment les systèmes partiels étudiés par Cauchy et les systèmes d'équations différentielles totales, n'est lui-même qu'un simple cas particulier des systèmes étudiés par M. Méray et moi en 1890.

Dans une Thèse de doctorat publiée en 1891 [2], M. Bourlet parvint à établir qu'un système différentiel quelconque est réductible à une forme du premier ordre, dans laquelle la convergence des développements des intégrales est assurée; mais, sauf des cas fortuits, la forme dont il s'agit n'était point passive,

---

(1) J. König, *Ueber die Integration simultaner Systeme partieller Differentialgleichungen mit mehreren unbekannten Functionen* (*Mathematische Annalen,* t. XXIII, 1884).

(2) Bourlet, *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues* (*Thèse,* avril 1891 ; *Annales de l'École Normale,* 1891).

et, par suite, ne faisait nullement connaître le nombre et la nature des éléments arbitraires dont dépendent les intégrales générales.

Ainsi, la question de l'existence des intégrales dans un système quelconque était encore loin de se trouver résolue. Depuis l'époque de ma collaboration avec M. Méray, j'y avais sans cesse réfléchi, et, poursuivant le courant d'idées où cette collaboration m'avait engagé, je m'efforçais de la résoudre en la ramenant au problème suivant :

Étant donné un système différentiel quelconque (que je supposais ne comprendre qu'un nombre limité d'équations), *le réduire, sauf constatation éventuelle d'incompatibilité, à un système du premier ordre où se trouve réalisée la double condition :* 1° *de la passivité;* 2° *de la convergence des développements des intégrales.*

Toutefois, pour diverses raisons qu'il serait trop long d'indiquer ici, j'avais été induit à penser qu'en se bornant dès le début de la théorie, comme on avait coutume de le faire, à la considération exclusive des systèmes du premier ordre, on n'y introduisait qu'une simplification apparente, et même, à certains égards, une nouvelle complication. J'avais donc résolu de ne m'attacher en premier lieu qu'à la découverte d'une forme canonique complètement intégrable, sans m'inquiéter aucunement de l'ordre des équations; cette forme une fois obtenue, j'espérais pouvoir la ramener à une semblable d'ordre inférieur, et par suite au premier ordre. C'est ce qui arriva en effet. En 1892, je réussis à opérer la réduction d'un système quelconque à une forme complètement intégrable, et l'année suivante (1893) je substituai à celle-ci une forme de même nature, mais du premier ordre, où se trouvaient engagées, avec les inconnues du système proposé, quelques-unes de leurs dérivées

à titre d'inconnues adjointes ([1]). Il va sans dire que *l'économie des conditions initiales, évidente dans ce dernier système* en vertu des explications données plus haut, *se trouvait par là même immédiatement connue dans le proposé*, et que, *dans l'un comme dans l'autre, la solution générale dépendait de fonctions* (*ou constantes*) *arbitraires en nombre fini* ([2]).

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 28 mars 1892, 27 février 1893, 24 avril 1893. — *Annales de l'École Normale,* 1893. — *Recueil des Savants étrangers,* t. XXXII, n° 3.

([2]) J'insiste sur ce point, qui semble n'avoir pas été très bien compris de quelques lecteurs : par le seul fait de la réduction à une forme passive *du premier ordre* où la convergence des développements des intégrales était assurée, la solution générale d'un système donné devait, comme je viens de l'expliquer, dépendre finalement de fonctions arbitraires en nombre fini, et ces fonctions se dégager d'elles-mêmes, sans que j'eusse besoin de m'en inquiéter autrement ; mais il n'en eût pas été de même si la forme à laquelle j'aboutissais en dernier lieu eût été d'ordre supérieur au premier. Ainsi, au début d'un Mémoire publié en 1894, M. Tresse a formulé l'énoncé suivant : *Étant donné un système quelconque d'équations aux dérivées partielles, on peut, après un nombre limité de différentiations et d'éliminations, ou bien montrer qu'il est incompatible, ou bien le mettre sous forme d'un système en involution* (système passif), *dont la solution générale dépend alors, suivant les cas, de fonctions ou de constantes arbitraires* (*Acta mathematica,* 1894, p. 9). Or, en supposant établie la convergence des développements des intégrales (partie de la question que M. Tresse ne se proposait pas d'examiner), il ressort uniquement de sa démonstration que, pour déterminer un groupe d'intégrales ordinaires de ce système en involution, *dont l'ordre est quelconque,* on peut se donner arbitrairement certaines portions de leurs développements respectifs, c'est-à-dire que la solution générale du système dépend de constantes arbitraires, en nombre le plus souvent infini, et qui, dans le cas général, ne se grouperont pas *d'une façon évidente* en un nombre fini de fonctions également arbitraires. J'ajoute que M. Tresse me semble avoir laissé dans l'ombre certains points importants, et n'avoir pas montré, par exemple, comment on peut, *à l'aide d'un nombre limité d'opérations,* s'assurer si les conditions d'intégrabilité d'un système donné se trouvent ou non satisfaites.

Trois ans après, en 1896, M. Delassus (1), à l'aide d'une méthode toute différente, essentiellement basée sur le changement des variables, donna une deuxième solution du problème dont je m'étais occupé : il réduisit tout système différentiel à une forme complètement intégrable, et, dans un énoncé trop long pour être rapporté ici (2), il indiqua en détail les fonctions et constantes arbitraires dont se trouvait dépendre, après cette réduction, la solution générale (3).

II. Bien qu'il fût désormais acquis que la solution générale d'un système quelconque d'équations aux dérivées partielles dépend (sauf le cas d'incompatibilité) de fonctions ou constantes arbitraires en nombre fini, il n'en était pas moins intéressant de poursuivre l'étude approfondie des questions d'existence, et de chercher soit à simplifier, soit à généraliser les règles déjà obtenues.

La première simplification que je réussis à opérer se rapporte à l'économie des conditions initiales et à la manière de la fixer. Au lieu d'avoir recours, comme je l'ai indiqué plus haut, à une réduction au premier ordre, d'un mécanisme assez compliqué, je substituai à ce procédé une méthode directe et tout élémentaire, dont l'emploi permet d'abréger, dans une mesure considérable, et les raisonnements de la théorie, et les calculs de la pratique (4).

---

(1) Delassus, *Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles* (*Annales de l'École Normale*, 1896).

(2) *Ibid.*, 1896, p. 461 et 462.

(3) J'ai fait voir ailleurs que les systèmes canoniques définis et étudiés par M. Delassus se trouvent contenus, comme cas particulier, dans ceux que j'avais définis et étudiés en 1893 (voir *Acta mathematica*, t. XXIII, p. 329 et 330).

(4) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 31 mai 1898. — *Sur*

Vers la même époque, l'étude de la forme canonique que j'ai nommée *orthonome* ([1]), comprenant comme cas particulier celle que j'avais considérée antérieurement, me conduisit à généraliser le théorème d'existence relatif à cette dernière : ainsi qu'on le verra dans le cours de cet Ouvrage, la définition de la forme orthonome et ses propriétés ont pour base essentielle la considération des *cotes,* qui m'a été, dans toutes mes recherches, d'une utilité capitale.

Tout récemment enfin, j'ai pu établir des théorèmes d'existence se rapportant à des formes plus générales encore, et obtenir en même temps, pour les *conditions d'intégrabilité,* une règle notablement plus avantageuse ([2]). Deux exemples bien simples suffiront à donner une idée de ce double progrès.

Supposons d'abord qu'un système différentiel, impliquant une fonction inconnue, u, des variables indépendantes $x, y, \ldots$, ait pour premiers membres toutes les dérivées d'ordre m de u, les seconds membres ne contenant, avec les variables $x, y, \ldots$, que l'inconnue u et ses dérivées d'ordre inférieur à m. Pour former les conditions d'intégrabilité d'un pareil système, il suffit, d'après la règle simplifiée à laquelle j'ai fait allusion, d'adjoindre aux équations qui le composent celles qui s'en déduisent par des différentiations premières, et d'opérer, dans le système résultant, l'élimination des dérivées d'ordres m et $m+1$. Or, il fallait, d'après l'ancienne, adjoindre aux équations proposées toutes celles qui s'en déduisent par des

---

une question fondamentale du Calcul intégral, 1re Partie (*Acta mathematica,* t. XXIII, 1899).

([1]) *Sur une question fondamentale du Calcul intégral,* 2e et 3e Parties.

([2]) *Sur l'existence, dans certains systèmes différentiels, des intégrales répondant à des conditions initiales données* (*Annales de l'École Normale,* 1904). — *Sur les conditions d'intégrabilité complète de certains systèmes différentiels* (*Annales de l'École Normale,* 1907).

différentiations d'ordres 1, 2, ..., m, et opérer ensuite l'élimination des dérivées d'ordres m, $m+1$, ..., $2m$: on se trouvait ainsi conduit, par un calcul beaucoup plus long, à un ensemble de conditions dont un grand nombre étaient superflues.

Supposons maintenant que, dans l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

où u désigne une fonction inconnue des deux variables indépendantes x et y, il s'agisse de déterminer un ensemble de conditions suffisantes pour l'existence d'une intégrale ordinaire répondant à des conditions initiales données, de la forme

$$u = \varphi(y) \quad \text{pour} \quad x = x_0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \psi(x) \quad \text{pour} \quad y = y_0.$$

En désignant par A et B les dérivées partielles du second membre f relatives à $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ respectivement, et par A_0, B_0 les valeurs numériques initiales de A, B, on a successivement assigné comme condition suffisante à l'existence de l'intégrale :

1° La nullité identique des deux fonctions A et B. [Ce résultat se trouve contenu, comme cas particulier, dans les recherches publiées par M. Méray en 1890 avec ma collaboration ([1]).]

([1]) L'équation

(1′) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

se ramène en effet au système différentiel du premier ordre

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u'_y, \qquad \frac{\partial u'_y}{\partial x} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, u'_y\right),$$

2° La nullité identique de l'une ou de l'autre des fonctions A, B. [C'est là une application particulière des recherches que j'ai publiées en 1893 ([1]), ou de celles qui ont paru peu après sur les systèmes orthonomes.]

3° La simple inégalité numérique

$$\operatorname{mod}(A_0 B_0) < \frac{1}{4}.$$

[C'est là une application particulière de mes recherches les plus récentes ([2]).]

---

lequel est *immédiat*, *semi-régulier* et *passif*. (*Voir* à ce sujet le Mémoire déjà cité de MM. Méray et Riquier.)

Dans un Mémoire célèbre publié en 1890 [*Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et sur la méthode des approximations successives* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4[e] série, t. V)], M. Émile Picard considère cette même équation (1′), et il démontre, par la méthode des approximations successives, dont il est l'auteur, l'existence de l'intégrale u déterminée par la double condition que u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ prennent sur une courbe donnée C des valeurs données. En raison de la forme choisie pour les conditions initiales, ce résultat nous semble devoir être rapproché, non du précédent, mais plutôt de celui qu'on obtient par l'application du théorème de M[me] de Kowalevsky à l'équation aux dérivées partielles du second ordre : si l'on désigne en effet par $x = g(y)$ l'équation de la courbe C, qu'on effectue sur l'équation (1′) le changement de variables

$$x' = x - g(y), \qquad y' = y,$$

et qu'on résolve l'équation transformée par rapport à $\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}$, on se trouve ramené à intégrer cette dernière avec des conditions initiales de la forme

$$\left.\begin{aligned} u &= \varphi(y') \\ \frac{\partial u}{\partial x'} &= \psi(y') \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad x' = 0.$$

([1]) *Annales de l'École Normale*, 1893.

([2]) *Annales de l'École Normale*, 1904. Je dois ajouter que, dans une Note

On peut juger, par ce simple rapprochement, de l'extension progressivement donnée aux théorèmes d'existence.

Une dernière étude à laquelle conduisent naturellement les précédentes consiste à comparer, dans deux formes complètement intégrables provenant d'un même système différentiel, le nombre et la nature des éléments arbitraires que comportent les conditions initiales : les quelques résultats intéressants que m'a semblé fournir cette comparaison ont fait l'objet d'un Mémoire publié en 1902 [1].

Toutes les questions générales que je viens d'indiquer sommairement se trouvent exposées en détail dans les Chapitres V, VI, VII, IX, X et XIV du présent Ouvrage. Diverses particularités intéressantes sont à signaler dans le cas où les conditions initiales du système donné présentent la disposition que j'ai qualifiée de *régulière* [2] : elles font l'objet du Chapitre XII. Le lecteur trouvera enfin dans le Chapitre XI, à titre d'application, l'étude de deux systèmes particuliers d'équations aux dérivées partielles : l'un se rapporte à la théorie des déformations finies d'un milieu continu dans l'espace à n dimensions, l'autre à la détermination des systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales à n variables [3].

---

communiquée à l'Académie des Sciences le 2 novembre 1897, M. Goursat avait indiqué comme condition suffisante pour l'existence de l'intégrale la nullité numérique de l'une ou l'autre des valeurs initiales A_0, B_0.

(1) *Sur le degré de généralité d'un système différentiel quelconque* (*Acta mathematica*, t. XXV).

(2) *Sur les systèmes différentiels réguliers* (*Annales de la Faculté des Sciences de Marseille*, t. XIV, fasc. 4).

(3) *Sur l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles auquel conduit l'étude des déformations finies d'un milieu continu* (*Annales de l'École Normale*, 1905).

Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles auxquels conduisent : 1° *l'étude des déformations finies d'un milieu continu dans l'espace à n dimensions;* 2° *la détermination des systèmes de coordonnées*

III. Parmi les systèmes différentiels auxquels s'applique l'un ou l'autre des théorèmes d'existence dont on trouvera plus loin l'exposé, il était intéressant de rechercher quels sont ceux dont l'intégration se ramène à celle d'équations différentielles totales. Tel est l'objet du Chapitre XIII, que l'on peut résumer comme il suit :

Si l'ensemble des éléments arbitraires figurant dans les conditions initiales ne renferme, avec un nombre quelconque de constantes, qu'une seule fonction d'un nombre quelconque de variables, la recherche, dans le système proposé, d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données, se ramène à deux intégrations successives, savoir : 1° celle d'un système complètement intégrable d'équations différentielles totales, variable avec le choix des conditions initiales; 2° celle d'un système linéaire et complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, indépendant du choix dont il s'agit, et qui, bien que les fonctions inconnues s'y trouvent en nombre généralement supérieur à 1, peut se traiter par la méthode classique de Jacobi [1].

---

curvilignes orthogonales à n variables (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 9 décembre 1907).

Je rappellerai que la détermination des coordonnées curvilignes orthogonales à n variables a été, il y a quelques années, proposée comme sujet de concours pour le prix Bordin, et qu'aucun des Mémoires soumis au jugement de l'Académie des Sciences n'a fourni une solution complète de cette question. *Voir* à ce sujet le Rapport inséré dans les *Comptes rendus* (séance du 18 décembre 1899).

(1) *Sur les systèmes différentiels dont l'intégration se ramène à celle d'équations différentielles totales* (*Annales de l'École Normale,* 1901). Dans le cas où le système (complètement intégrable) donné satisfait à la double condition d'être du premier ordre et de n'impliquer qu'une seule fonction inconnue, la recherche de l'intégrale particulière répondant à une condition initiale donnée se ramène, non, comme dans le cas général, à *deux* intégrations successives, mais simplement à la seconde des deux.

Ce résultat a été communiqué à l'Académie des Sciences le 21 novembre 1898. Au commencement de la même année, M. Beudon avait formulé un résultat analogue ([1]), et j'avais moi-même, quatre ans auparavant ([2]), examiné le cas où le système considéré est du premier ordre : le lecteur verra, au Chapitre XIII, combien peu il diffère du cas général.

Il va sans dire que la démonstration exposée s'applique, en particulier, au cas d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre non linéaire : il en résulte, pour traiter l'équation dont il s'agit et en ramener l'intégration à celle du système bien connu d'équations différentielles ordinaires, une méthode nouvelle, différente de celles qu'ont données Jacobi, Lagrange et Cauchy.

IV. Dans les questions relatives à l'existence des intégrales, on se borne le plus souvent à démontrer qu'en désignant par x_0, y_0, ... les valeurs initiales des variables indépendantes $x, y, \ldots$, il existe certains développements, entiers en $x - x_0, y - y_0, \ldots$, dont les sommes vérifient identiquement les équations aux dérivées partielles proposées. Une étude fort intéressante, dans les cas où elle est possible, consiste à *prolonger analytiquement* les intégrales ainsi obtenues, c'est-à-dire à délimiter, autour des domaines de convergence primitivement assignés à leurs développements fondamentaux, certaines régions, plus ou moins étendues, où elles soient calculables par cheminement : mais les cas où l'on a pu jusqu'à présent y réussir sont extrême-

---

([1]) Beudon, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 31 janvier 1898. *Voir* aussi les *Annales de l'École Normale* (*Sur des systèmes d'équations aux dérivées partielles analogues aux systèmes du premier ordre*, 1898), et le *Journal de Mathématiques* (*Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles analogues aux systèmes du premier ordre en involution*, 1899).

([2]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 30 juillet 1894.

ment restreints. J'ai toutefois signalé à l'Académie des Sciences un résultat de ce genre ([1]), et mon intention première était d'en joindre ici l'exposé à celui des recherches que je viens de résumer; mais la crainte d'allonger démesurément un Ouvrage déjà fort étendu m'en a finalement détourné. Le lecteur qui désirerait prendre connaissance de ce résultat voudra bien se reporter à quelques travaux récemment publiés ([2]).

V. Des quatorze Chapitres qui vont suivre, quelques-uns, comme leurs titres l'indiquent (Chap. I, II, III, IV et VIII), traitent de questions qui sont en quelque sorte du domaine public. Si j'ai tenu néanmoins à en faire ici l'exposé, c'est dans le but de rendre l'Ouvrage accessible à un plus grand nombre de jeunes lecteurs : peut-être, en supposant ces questions connues, aurais-je eu lieu de craindre que certains d'entre eux, faute de notions précises sur quelque point fondamental, ne fussent insuffisamment préparés à aborder les Chapitres où se trouvent exposés des résultats nouveaux. Tel qu'il est au contraire, l'Ouvrage peut, je crois, se suffire à lui-même : sa lecture exige, il est vrai, un esprit exercé et une attention soutenue, indispensables pour bien saisir, à travers la complication des détails, l'unité de la méthode et des résultats; mais les connaissances positives dont elle nécessite l'acquisition sont, comme on le verra, fort peu étendues ([3]).

([1]) *Comptes rendus*, 23 décembre 1901.

([2]) *Sur le calcul par cheminement des intégrales de certains systèmes différentiels* (*Annales de l'École Normale*, 1903).

Sur quelques principes généraux relatifs à la théorie des fonctions d'un nombre quelconque de variables (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1907, p. 136 à 175).

([3]) Strictement, elles se réduisent à ceci : 1° les règles du calcul algébrique élémentaire, et la règle de convergence des variantes réelles simples, énoncée sans démonstration au n° 6 (le tout impliquant l'ensemble des considérations

Pour tout ce qui a rapport à la définition et aux premières propriétés des *fonctions analytiques*, j'ai adopté, dans ce qu'il a d'essentiel, le point de vue de M. Méray, qui consiste, comme on sait, à *faire reposer la théorie générale de ces fonctions sur les propriétés des séries entières* (1), et qui m'a paru se prêter mieux que tout autre à l'étude des questions dont je me suis occupé. Je crois devoir ajouter toutefois que sa méthode, telle qu'il l'a exposée, donne lieu, selon moi, à certaines objections, et ne m'a pas semblé présenter en toute circonstance toute la commodité désirable : c'est ce qui m'a conduit à en modifier divers détails. Je ne manquerai pas de signaler, en leur lieu et place, les quelques emprunts faits à l'Ouvrage didactique de M. Méray, comme aussi, le cas échéant, les modifications introduites.

J'attire enfin l'attention du lecteur sur ce fait, que jamais, dans les études qui vont suivre sur les systèmes différentiels, aucune hypothèse n'intervient relativement à la nature réelle ou imaginaire des variables qui s'y trouvent engagées (2) : j'ai pu, en effet, pour toutes les questions traitées, adopter un mode d'exposition s'appliquant indifféremment à l'un et à l'autre cas.

Je dois, en terminant, et c'est pour moi un bien agréable

---

relatives à la généralisation progressive de l'idée de nombre) ; 2° les propriétés classiques des déterminants et des équations linéaires. Les applications traitées dans le Chapitre XI exigent, en outre, quelques notions élémentaires sur la théorie algébrique des formes quadratiques.

(1) Dans la Préface de ses *Leçons nouvelles* (p. 14 et 15), M. Méray fait remarquer que Lagrange, il y a un siècle, avait entrevu la possibilité de cette déduction, et qu'Abel, quelques années plus tard, en posa le premier fondement [Abel, *Recherche sur la série* $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots$ (*Journal de Crelle*, t. I. 1826)].

(2) Sauf, incidemment, dans une application particulière destinée à éclairer les théories générales. *Voir* les nos 183 et 184.

devoir, adresser l'expression de ma vive reconnaissance aux Savants qui m'ont fait l'honneur de s'intéresser à mes travaux, et dont la sympathie m'a été si précieuse; à M. Bayet, le chef éminent de notre Enseignement supérieur, qui a bien voulu encourager la publication de cet Ouvrage; à M. Gauthier-Villars, dont les presses admirables, toujours au service de la Science, en ont assuré d'une façon irréprochable l'exécution matérielle.

CHARLES RIQUIER.

LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

AUX

DÉRIVÉES PARTIELLES.

CHAPITRE I.

CONTINUITÉ [1].

Espace à un nombre quelconque de dimensions; régions limitées; régions complètes.

1. Nous nommerons *point à n coordonnées* tout système de valeurs particulières attribuées aux n variables *réelles* x, y, ..., et *espace à n dimensions* l'ensemble de tous les points à n coordonnées; cet espace sera souvent désigné par la notation $\big[[x, y, \ldots]\big]$ [2].

La *distance* des deux points

$$(x_1, y_1, \ldots), \quad (x_2, y_2, \ldots)$$

est, par définition, la racine carrée arithmétique (c'est-à-dire non négative) de la quantité

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + \ldots;$$

si, notamment, il n'y a qu'une seule variable réelle, x, la distance des

---

(1) *Voir* les deux Mémoires intitulés : *Sur les fonctions continues d'un nombre quelconque de variables* (*Annales de l'École Normale*, 1890); *Sur quelques principes généraux relatifs à la théorie des fonctions d'un nombre quelconque de variables* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1906 et 1907).

(2) Nous généraliserons plus loin (n° 15) le sens de la notation $\big[[x, y, \ldots]\big]$ pour l'étendre au cas où les variables x, y, ... sont *imaginaires*.

deux points x_1, x_2 est égale au module de la différence $x_1 - x_2$ [1].

Pour que deux points soient identiques, c'est-à-dire pour que leurs coordonnées semblables soient respectivement égales, il faut et il suffit que leur distance soit nulle.

Dans ce qui suit, nous désignerons souvent les points $(x, y, \ldots)$, $(x_1, y_1, \ldots)$, $(x_2, y_2, \ldots)$, ... par de simples lettres, a, a_1, a_2, ..., et les distances mutuelles de ces points par aa_1, aa_2, a_1a_2, ...

2. Dans l'espace à n dimensions, on a souvent à considérer, à l'exclusion de tous les autres points, ceux dont les coordonnées satisfont à telles ou telles conditions, d'une nature absolument quelconque d'ailleurs; leur ensemble constitue ce qu'on appelle une *région* de l'espace à n dimensions.

Nous établirons tout d'abord la proposition suivante :

Dans l'espace à n dimensions (n° 1), *si la distance de quelque point fixe de cet espace à un point variable d'une région donnée* $\mathfrak{R}$ *reste toujours inférieure à quelque constante positive, tout point fixe jouit par rapport à* $\mathfrak{R}$ *de la même propriété :* la région, en pareil cas, est dite *limitée*.

I. *La distance de deux points quelconques est comprise entre la somme et la différence de leurs distances à un même troisième* (et peut parfois atteindre l'une ou l'autre de ces valeurs extrêmes).

Si l'on considère les points a_1, a_2, a_3 (n° 1), et qu'on pose, pour abréger,

$$x_2 - x_1 = \xi_2, \qquad y_2 - y_1 = \eta_2, \qquad \ldots,$$
$$x_3 - x_1 = \xi_3, \qquad y_3 - y_1 = \eta_3, \qquad \ldots,$$

on a

$$\begin{aligned}\overline{a_2a_3}^2 &= (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + \ldots \\ &= (\xi_2 - \xi_3)^2 + (\eta_2 - \eta_3)^2 + \ldots \\ &= \overline{a_1a_2}^2 + \overline{a_1a_3}^2 - 2(\xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3 + \ldots),\end{aligned}$$

d'où résulte que le carré de la distance a_2a_3 ne peut excéder l'inter-

---

[1] Nous appelons *module* d'une quantité réelle ce qu'on nomme habituellement *valeur absolu* de cette quantité.

valle des deux quantités

$$\overline{a_1 a_2}^2 + \overline{a_1 a_3}^2 - 2 \operatorname{mod}(\xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3 + \ldots),$$
$$\overline{a_1 a_2}^2 + \overline{a_1 a_3}^2 + 2 \operatorname{mod}(\xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3 + \ldots).$$

De la relation

$$(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \ldots)(\xi_3^2 + \eta_3^2 + \ldots) = (\xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3 + \ldots)^2 + \Sigma(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2)^2,$$

où la sommation indiquée dans le second membre doit s'étendre à toutes les combinaisons deux à deux des lettres ξ, η, ..., on tire d'ailleurs

$$\operatorname{mod}(\xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3 + \ldots) \leqq \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2 + \ldots}\sqrt{\xi_3^2 + \eta_3^2 + \ldots},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{mod}(\xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3 + \ldots) \leqq a_1 a_2 \times a_1 a_3;$$

donc, à plus forte raison, le carré de la distance $a_2 a_3$ ne pourra excéder l'intervalle des deux quantités

$$\overline{a_1 a_2}^2 + \overline{a_1 a_3}^2 - 2 a_1 a_2 \times a_1 a_3,$$
$$\overline{a_1 a_2}^2 + \overline{a_1 a_3}^2 + 2 a_1 a_2 \times a_1 a_3;$$

on en déduit, par l'extraction des racines carrées arithmétiques,

$$\operatorname{mod}(a_1 a_2 - a_1 a_3) \leqq a_2 a_3 \leqq a_1 a_2 + a_1 a_3.$$

II. Revenons à notre énoncé et désignons par a un point variable de la région $\mathfrak{R}$, par a_1 et a_2 deux point fixes de l'espace $\left[[x, y, \ldots]\right]$ (n° 1). Si, en choisissant convenablement la constante positive M, on a, pour toute position du point a dans la région $\mathfrak{R}$, l'inégalité

$$a_1 a < \mathrm{M},$$

on aura aussi

$$a_1 a + a_1 a_2 < \mathrm{M} + a_1 a_2$$

et, à plus forte raison (I),

$$a a_2 < \mathrm{M} + a_1 a_2,$$

ce qui démontre la proposition.

3. Un point fixe sera dit *complètement extérieur* à une région donnée de l'espace à n dimensions, si sa distance à un point variable de cette dernière reste supérieure à quelque constante positive.

Une région sera dite *complète*, si tout point n'en faisant pas partie lui est complètement extérieur.

4. La remarque suivante est souvent utile :

Supposons que les n variables indépendantes (réelles) aient été partagées en un nombre quelconque de groupes, trois, par exemple,

$$x, \ \ldots, \quad y, \ \ldots, \quad z, \ \ldots,$$

et soient

$$(1) \qquad \mathfrak{R}_{x,\ldots}, \quad \mathfrak{R}_{y,\ldots}, \quad \mathfrak{R}_{z,\ldots}$$

trois régions respectivement extraites des espaces correspondants

$$(2) \qquad \big[[x, \ldots]\big], \quad \big[[y, \ldots]\big], \quad \big[[z, \ldots]\big];$$

l'association de ces trois régions en fournit évidemment une,

$$(3) \qquad (\mathfrak{R}_{x,\ldots}, \ \mathfrak{R}_{y,\ldots}, \ \mathfrak{R}_{z,\ldots}),$$

extraite de l'espace

$$(4) \qquad \big[[x, \ldots, \ y, \ldots, \ z, \ldots]\big].$$

Cela étant, il est extrêmement facile d'apercevoir : 1° que, *si les régions* (1) [considérées chacune dans celui des espaces (2) qui lui convient] *sont supposées limitées, la région* (3) [considérée dans l'espace (4)] *ne peut manquer de l'être aussi;* 2° que, *si les régions* (1) *sont supposées complètes, la région* (3) *jouit de la même propriété.*

Effectivement :

1° Soient :

$$(x, \ldots, y, \ldots, z, \ldots),$$

ou a, un point variable de la région (3), et

$$(x_0, \ldots, y_0, \ldots, z_0, \ldots),$$

ou a_0, un point fixe de l'espace (4). Chacune des trois régions (1) étant supposée limitée, on a respectivement, dans toute l'étendue de ces régions,

$$(x - x_0)^2 + \ldots < M^2,$$
$$(y - y_0)^2 + \ldots < N^2,$$
$$(z - z_0)^2 + \ldots < P^2,$$

où M, N, P désignent trois constantes positives convenablement choisies (n° 2); on en déduit, par addition membre à membre, que, dans toute l'étendue de la région (3), le carré de la distance aa_0 (n° 1) reste inférieur à $M^2 + N^2 + P^2$ et cette distance elle-même à $\sqrt{M^2 + N^2 + P^2}$.

2° Soient

$$(x, \ldots, y, \ldots, z, \ldots)$$

un point variable de la région (3), et

$$(X, \ldots, Y, \ldots, Z, \ldots)$$

un point fixe n'en faisant pas partie, tel, par conséquent, que si l'on considère, d'une part, les trois points

$$(X, \ldots), \quad (Y, \ldots), \quad (Z, \ldots),$$

d'autre part, les trois régions (1), l'un au moins de ces trois points ne fasse pas partie de la région correspondante; nous supposerons, pour fixer les idées, que le point $(X, \ldots)$ ne fait pas partie de la région $\mathfrak{R}_{x, \ldots}$. Chacune des régions (1) et, en particulier, la région $\mathfrak{R}_{x, \ldots}$, étant supposée complète, le point $(X, \ldots)$ est complètement extérieur à $\mathfrak{R}_{x, \ldots}$, et, en désignant par λ une constante positive convenablement choisie, on a nécessairement, dans toute l'étendue de $\mathfrak{R}_{x, \ldots}$,

$$(x - X)^2 + \ldots > \lambda^2;$$

à plus forte raison aura-t-on, dans toute l'étendue de la région (3),

$$(x - X)^2 + \ldots + (y - Y)^2 + \ldots + (z - Z)^2 + \ldots > \lambda^2$$

ou

$$\sqrt{(x - X)^2 + \ldots + (y - Y)^2 + \ldots + (z - Z)^2 + \ldots} > \lambda.$$

Le point $(X, \ldots, Y, \ldots, Z, \ldots)$ est donc complètement extérieur à la région (3), ce qu'il s'agissait d'établir.

5. La région définie par la relation

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \ldots \leqq R^2,$$

où $(x_0, y_0, \ldots)$ désigne un point fixe donné et R une constante positive donnée, nous offre un exemple très simple d'une région à la fois limitée et complète.

Elle est évidemment limitée, puisque la distance du point fixe $(x_0, y_0, \ldots)$, ou a_0, à un point variable de la région, reste moindre qu'une constante positive supérieure à R.

D'un autre côté, si l'on désigne par (X, Y, ...) ou A un point fixe ne faisant pas partie de la région, et par λ une constante positive (> 0) convenablement choisie, on a

$$\mathrm{A}\,a_0 = \mathrm{R} + \lambda.$$

Or, quelle que soit dans l'espace la position du point $(x, y, \ldots)$, ou a, on a, en vertu d'une proposition antérieure (nº 2, I),

$$\mathrm{A}\,a \geqq \mathrm{A}\,a_0 - aa_0$$

ou

$$\mathrm{A}\,a \geqq \mathrm{R} - aa_0 + \lambda,$$

et comme on a, dans toute l'étendue de la région,

$$\mathrm{R} \geqq aa_0 \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{R} - aa_0 \geqq 0,$$

on aura, à plus forte raison, dans les mêmes limites,

$$\mathrm{A}\,a \geqq \lambda;$$

la distance du point (X, Y, ...) à un point variable de la région reste donc toujours supérieure à une constante positive moindre que λ.

Variantes dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions.

6. Nous nommerons *variante* [1] (simple) un nombre (réel) variable dépendant de certains entiers positifs indéterminés, m, r, ..., dont chacun peut varier arbitrairement à partir de telle ou telle valeur fixe qu'on lui assigne pour valeur minima; ces entiers indéterminés se nomment les *indices* de la variante.

Une variante $u_{m, r, \ldots}$ est dite *infiniment petite*, si, une quantité

[1] Cette dénomination est due à M. Méray, qui l'a introduite, en 1869, dans une exposition nouvelle de la théorie des nombres incommensurables. *Voir*, au sujet de cette théorie, les indications bibliographiques données dans un Mémoire ayant pour titre : *De la distinction entre les sciences déductives et les sciences experimentales* (*Revue de Métaphysique et de Morale,* novembre 1900).

positive ε étant donnée, il existe quelque système de valeurs entières μ, ρ, ..., telles que les relations simultanées

$$m \geqq \mu, \quad r \geqq \rho, \quad \ldots$$

entraînent comme conséquence nécessaire

$$\operatorname{mod} u_{m, r, \ldots} < \varepsilon.$$

On dit qu'une variante $u_{m,r,\ldots}$ *a pour limite* ou *tend vers* la constante U, si la variante $U - u_{m,r,\ldots}$ est infiniment petite; *une pareille limite,* lorsqu'elle existe, *est nécessairement unique.*

En particulier, une variante infiniment petite tend vers zéro, et réciproquement.

Une variante est dite *convergente* ou *divergente,* suivant qu'elle est ou non pourvue d'une limite.

Nous supposerons établie la proposition suivante, qui résulte de l'ensemble des considérations relatives à la généralisation progressive de l'idée de nombre :

Pour qu'une variante (*simple*) $u_{m,r,\ldots}$ *soit convergente, il faut et il suffit que, une quantité positive* ε *étant donnée, il existe quelque système de valeurs entières* μ, ρ, ..., *telles que les relations simultanées*

$$m \geqq \mu, \quad r \geqq \rho, \quad \ldots$$

entraînent comme conséquence nécessaire, quelques valeurs positives ou nulles qu'on attribue aux entiers p, s, ..., *la relation*

$$\operatorname{mod}(u_{m+p, r+s, \ldots} - u_{m, r, \ldots}) < \varepsilon.$$

7. Dans l'espace $\left[[x, y, \ldots]\right]$, défini par la considération des variables réelles $x, y, \ldots$ (n° 1), nous nommerons *variante* (complexe) un point variable ayant pour coordonnées diverses variantes simples, qu'on peut évidemment supposer dépendre toutes des mêmes indices.

Une variante de l'espace $\left[[x, y, \ldots]\right]$ est dite *convergente* si ses diverses coordonnées le sont toutes, et le point obtenu en remplaçant ces dernières par leurs limites respectives se nomme alors la *limite* de la variante; *une pareille limite,* lorsqu'elle existe, *est nécessairement unique.*

Une variante non convergente est dite *divergente*.

Pour qu'une variante

(1) $$v_{m,r,\ldots} = (x_{m,r,\ldots}, y_{m,r,\ldots}, \ldots)$$

tende vers la limite

$$V = (X, Y, \ldots),$$

il faut et il suffit que la distance des deux points $v_{m,r,\ldots}$, V *soit infiniment petite.*

Pour que cette même variante (1) *soit convergente, il faut et il suffit que, une quantité positive* ε *étant donnée, il existe quelque système de valeurs entières* $\mu, \rho, \ldots$, *telles que les relations simultanées*

$$m \geqq \mu, \quad r \geqq \rho, \quad \ldots$$

entraînent comme conséquence nécessaire, quelques valeurs positives ou nulles qu'on attribue aux entiers $p, s, \ldots$, *la relation*

$$v_{m+p,\, r+s,\ldots} v_{m,\, r,\ldots} < \varepsilon$$

(*où le premier membre désigne la distance des deux points* $v_{m,r,\ldots}$, $v_{m+p,r+s,\ldots}$).

Ces propositions, énoncées au numéro précédent pour une variante simple, c'est-à-dire pour le cas particulier d'un espace à une seule dimension, s'étendent immédiatement au cas général.

8. *Lorsqu'une variante convergente tombe constamment dans quelque région complète* (n° 3) *de l'espace* $[[x, y, \ldots]]$ (n° 1), *sa limite est elle-même nécessairement située dans cette région.*

Car, autrement, la limite de la variante serait complètement extérieure à la région dont il s'agit, ce qui est impossible, puisque la distance d'une variante convergente à sa limite est infiniment petite (n° 7).

9. *En désignant par* $(x_m, y_m, \ldots)$ *ou* v_m *une variante quelconque à un seul indice, et par*

(2) $$m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_k, \quad \ldots$$

des valeurs particulières (distinctes) de son indice se succédant

indéfiniment suivant quelque loi déterminée, l'expression

$$(3) \qquad w_k = v_{m_k} = (x_{m_k}, y_{m_k}, \ldots)$$

est évidemment une variante dépendant de l'indice k. Cela posé, si la variante $(x_m, y_m, \ldots)$ *reste constamment comprise dans quelque région limitée, les valeurs* (2) *et leur loi de succession peuvent être choisies de telle sorte que la variante* (3) *soit convergente* ([1]).

I. Désignons par α, β, ... des entiers indéterminés en nombre n, que nous conviendrons de considérer dans un ordre toujours le même, l'ordre α, β, ... par exemple, et soient

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha', & \beta', & \ldots, \\ \alpha'', & \beta'', & \ldots \end{cases}$$

deux quelconques des combinaisons obtenues en attribuant aux entiers dont il s'agit tous les sytèmes possibles de valeurs positives; ces deux combinaisons étant, bien entendu, supposées distinctes, les différences

$$(5) \qquad \alpha' - \alpha'', \quad \beta' - \beta'', \quad \ldots$$

ne peuvent s'annuler à la fois. Cela posé, nous dirons que la première des combinaisons (4) est de *taxe inférieure* ou *supérieure* à la seconde, suivant que la première des différences (5) qui ne s'évanouit pas est négative ou positive.

Il importe de faire à cet égard l'observation suivante. Si l'on désigne par

$$\begin{matrix} \alpha', & \beta', & \ldots, \\ \alpha'', & \beta'', & \ldots, \\ \alpha''', & \beta'''. & \ldots \end{matrix}$$

trois combinaisons de valeurs attribuées aux entiers α, β, ..., si l'on suppose en outre que la première soit de taxe inférieure à la deuxième et la deuxième de taxe inférieure à la troisième, la première est nécessairement de taxe inférieure à la troisième. Si l'on considère en

---

([1]) *Voir* Méray, *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques*, 1re Partie, p. 56.

effet les différences

$$\begin{array}{lll} \alpha' - \alpha'', & \beta' - \beta'', & \ldots, \\ \alpha'' - \alpha''', & \beta'' - \beta''', & \ldots, \\ \alpha' - \alpha''', & \beta' - \beta''', & \ldots, \end{array}$$

rangées, comme nous venons de les écrire, en un Tableau rectangulaire, il résulte de nos hypothèses que, dans chacune des deux premières lignes horizontales du Tableau, les différences ne sont pas toutes nulles, et que la première non égale à zéro y est négative ; comme, d'ailleurs, la dernière différence de chaque colonne verticale est égale à la somme des deux différences placées au-dessus, la dernière ligne horizontale jouit évidemment de la même propriété que les deux premières.

11. Désignant par $x_0, y_0, \ldots$ certaines valeurs particulières des n variables réelles $x, y, \ldots$, et par $X, Y, \ldots$ d'autres valeurs particulières des mêmes variables, respectivement supérieures aux premières, nous nommerons *intervalle complexe* la région de l'espace $\big[[x, y, \ldots]\big]$ définie par les relations simultanées

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_0 \leqq x \leqq X, \\ y_0 \leqq y \leqq Y, \\ \ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

dont chacune, considérée isolément, définit un *intervalle simple;* les différences (positives) $X - x_0$, $Y - y_0$, ... seront les *amplitudes* de l'intervalle complexe.

Nous nommerons *subdivision d'un intervalle complexe* l'opération consistant à subdiviser (de façons quelconques) les n intervalles simples dont l'association le constitue, puis à former de toutes les manières possibles un intervalle complexe avec n intervalles partiels pris respectivement dans chacun d'eux.

Nous aurons besoin ci-après de considérer dans un ordre déterminé les divers intervalles complexes provenant de la subdivision d'un intervalle donné; la loi de leur succession peut être choisie de bien des manières, et l'on peut, par exemple, la fixer comme il suit. En premier lieu, on adoptera pour les indéterminées $x, y, \ldots$ un ordre toujours le même, soit l'ordre $x, y, \ldots$. Considérant ensuite les intervalles simples partiels obtenus par la subdivision de l'inter-

valle simple total relatif à une indéterminée quelconque, on commencera par les ranger dans l'ordre naturel que leur assignent les valeurs croissantes de cette indéterminée. Si l'on désigne alors par

$$\begin{matrix} \mathfrak{i}_x^{(1)}, & \mathfrak{i}_x^{(2)}, & \ldots, & \mathfrak{i}_x^{(g)}, \\ \mathfrak{i}_y^{(1)}, & \mathfrak{i}_y^{(2)}, & \ldots, & \mathfrak{i}_y^{(k)}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{matrix}$$

les diverses suites d'intervalles simples ainsi obtenues et qu'on associe ces derniers de toutes les manières possibles en prenant un terme, et un seul, dans chaque ligne horizontale du Tableau précédent, deux quelconques des intervalles complexes qui en résultent pourront être désignés par les notations

(7) $$\left[\mathfrak{i}_x^{(\alpha')}, \quad \mathfrak{i}_y^{(\beta')}, \quad \ldots\right],$$

(8) $$\left[\mathfrak{i}_x^{(\alpha'')}, \quad \mathfrak{i}_y^{(\beta'')}, \quad \ldots\right],$$

où les deux combinaisons d'entiers positifs

$$\begin{matrix} \alpha', & \beta', & \ldots, \\ \alpha'', & \beta'', & \ldots \end{matrix}$$

sont nécessairement distinctes. Cela posé, nous dirons, pour abréger, que l'intervalle partiel (7) est de *taxe inférieure* ou *supérieure* à l'intervalle partiel (8), suivant que la première des deux combinaisons dont il s'agit sera elle-même de taxe inférieure ou supérieure à la seconde (I), et *nous conviendrons de considérer nos intervalles complexes partiels dans un ordre tel que leur taxe aille toujours en croissant;* nous dirons, en pareil cas, qu'il sont *ordonnés.*

Observons, en passant, qu'*un intervalle complexe constitue une région limitée et complète de l'espace* $\left[[x, y, \ldots]\right]$. Effectivement, la relation

$$x_0 \leqq x \leqq \mathrm{X}$$

équivaut entièrement à

$$x_0 - \frac{x_0 + \mathrm{X}}{2} \leqq x - \frac{x_0 + \mathrm{X}}{2} \leqq \mathrm{X} - \frac{x_0 + \mathrm{X}}{2},$$

c'est-à-dire à

$$-\frac{\mathrm{X} - x_0}{2} \leqq x - \frac{x_0 + \mathrm{X}}{2} \leqq \frac{\mathrm{X} - x_0}{2}$$

ou enfin à

$$\left(x - \frac{x_0 + X}{2}\right)^2 \leqq \left(\frac{X - x_0}{2}\right)^2;$$

de même, la relation

$$y_0 = y \leqq Y$$

équivaut à

$$\left(y - \frac{y_0 + Y}{2}\right)^2 \leqq \left(\frac{Y - y_0}{2}\right)^2;$$

etc. L'ensemble des relations (6) définit donc, en vertu des n°s 4 et 5, une région limitée et complète de l'espace $\left[[x, y, \ldots]\right]$.

III. Soit

(9) $$\mathfrak{J}_1, \quad \mathfrak{J}_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{J}_k, \quad \ldots$$

une suite d'intervalles complexes se succédant indéfiniment suivant quelque loi déterminée, arbitrairement choisie sous les seules conditions : 1° que chacun d'eux soit entièrement contenu dans le précédent (et par suite dans tous ceux qui viennent avant lui); 2° que les amplitudes (II) de $\mathfrak{J}_k$ tendent vers zéro pour k infini. Soient en outre

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_h, \quad \ldots$$

des points respectivement choisis dans les intervalles (9) suivant une loi déterminée quelconque. Cela étant, *la variante s_k tend vers une limite.*

Effectivement, si l'on désigne par $x_k, y_k, \ldots$ les valeurs extrêmes minima, et par $X_k, Y_k, \ldots$ les valeurs extrêmes maxima prises par les variables $x, y, \ldots$ dans l'intervalle $\mathfrak{J}_k$, ce dernier a pour amplitudes les différences

$$X_k - x_k, \quad Y_k - y_k, \quad \ldots,$$

qui, dès lors, sont infiniment petites pour k infini; d'ailleurs, les deux points s_k, s_{k+h} étant compris l'un et l'autre dans l'intervalle $\mathfrak{J}_k$, leur distance est inférieure à

(10) $$\sqrt{(X_k - x_k)^2 + (Y_k - y_k)^2 + \ldots},$$

et, par suite, infiniment petite pour k infini; il en résulte (n° 7) que le point s_k tend vers une limite S.

Il convient de faire à cet égard les deux observations suivantes :

1° *Cette limite* S *est située dans l'un quelconque des intervalles* (9) : car, si l'on donne à k une valeur particulière quelconque en laissant h variable, le point s_{k+h} tendra, pour h infini, vers cette même limite S, et, comme il reste compris, quel que soit h, dans la région complète (II) $\mathfrak{J}_k$, sa limite s'y trouvera elle-même comprise (n° 8).

2° *La suite des intervalles* (9) *étant donnée, cette limite* S *est indépendante de la loi suivant laquelle le point* s_k *est choisi dans l'intervalle* $\mathfrak{J}_k$: car, si l'on nomme s'_k le point fourni dans $\mathfrak{J}_k$ par une autre loi, la distance des deux points s_k, s'_k, inférieure à la quantité (10), tend vers zéro pour k infini.

IV. Revenons à notre énoncé général.

Si l'on considère la région limitée où la variante $(x_m, y_m, \ldots)$ se trouve, par hypothèse, constamment comprise, la distance $\sqrt{x^2+y^2+\ldots}$ du point $(x, y, \ldots)$, arbitrairement variable dans toute l'étendue de cette région, au point fixe $(0, 0, \ldots)$ de l'espace $[[x, y, \ldots]]$, reste inférieure à une constante positive M convenablement choisie (n° 2) ; à plus forte raison a-t-on, entre les mêmes limites,

$$\operatorname{mod} x < \mathrm{M}, \qquad \operatorname{mod} y < \mathrm{M}, \qquad \ldots,$$

c'est-à-dire

$$-\mathrm{M} < x < \mathrm{M}, \qquad -\mathrm{M} < y < \mathrm{M}, \qquad \ldots.$$

Il existe donc quelque intervalle complexe,

$$x_0 \leqq x \leqq \mathrm{X}, \qquad y_0 \leqq y \leqq \mathrm{Y}, \qquad \ldots,$$

dans lequel la variante $(x_m, y_m, \ldots)$ se trouve constamment comprise, et que nous représenterons, pour abréger, par $\mathfrak{J}_1$. Si l'on divise en deux parties égales chacun des intervalles simples dont se compose $\mathfrak{J}_1$, et qu'on ordonne (II) les divers intervalles complexes résultant de cette subdivision, il existe certainement quelqu'un de ces derniers où la variante v_m tombe un nombre infini de fois. Appelons $\mathfrak{J}_2$ le premier d'entre eux pour lequel cette circonstance se réalise, opérons sur lui comme nous l'avons fait sur $\mathfrak{J}_1$, et ainsi de suite indéfiniment. Nous formerons de cette manière une suite illimitée

d'intervalles complexes,

$$\mathfrak{I}_1, \quad \mathfrak{I}_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{I}_k, \quad \ldots,$$

jouissant de la triple propriété suivante : 1° chacun d'eux fait entièrement partie du précédent ; 2° celui de rang k a pour amplitudes les quantités infiniment petites

$$\frac{X - x_0}{2^{k-1}}, \quad \frac{Y - y_0}{2^{k-1}}, \quad \ldots;$$

3° la variante v_m tombe une infinité de fois dans chacun d'eux.

Cela posé, si l'on considère la suite illimitée

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_m, \quad \ldots,$$

et qu'on désigne par w_1 le premier terme de cette suite, par w_2 le premier des termes restants situé dans l'intervalle $\mathfrak{I}_2$, par w_3 le premier des termes restants situés dans l'intervalle $\mathfrak{I}_3$, et ainsi de suite indéfiniment, il résulte de l'alinéa III que la variante w_k est convergente [1].

---

[1] De la propriété ci-dessus établie il convient de rapprocher la suivante, que nous n'aurons d'ailleurs pas à utiliser :

Considérant une région limitée, $\mathfrak{R}$, de l'espace $\big[[x, y, \ldots]\big]$, appelons *point remarquable* de la région tout point possédant certaines propriétés déterminées (de nature quelconque). Cela étant, *si la région limitée* $\mathfrak{R}$ *offre un nombre illimité de points remarquables, on peut assigner quelque point fixe de l'espace* $\big[[x, y, \ldots]\big]$ *offrant dans son voisinage, à une distance moindre que toute quantité donnée, une infinité de points remarquables de la région.*

Effectivement, la région $\mathfrak{R}$ étant limitée, il existe, comme ci-dessus, quelque intervalle complexe,

$$x_0 \leqq x \leqq X, \quad y_0 \leqq y \leqq Y, \quad \ldots,$$

qui la comprend tout entière, et que nous désignerons, pour abréger, par $\mathfrak{I}_1$. Si l'on divise en deux parties égales chacun des intervalles simples dont se compose $\mathfrak{I}_1$, et qu'on ordonne les intervalles complexes partiels résultant de cette subdivision, l'un au moins de ces derniers contient une infinité de points remarquables de la région $\mathfrak{R}$. Appelons $\mathfrak{I}_2$ le premier d'entre eux pour lequel cette circonstance se réalise, opérons sur lui comme nous l'avons fait sur $\mathfrak{I}_1$, et ainsi de suite indéfiniment. Nous formerons de cette manière une suite illimitée d'intervalles complexes,

$$\mathfrak{I}_1, \quad \mathfrak{I}_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{I}_k, \quad \ldots,$$

jouissant de la triple propriété suivante : 1° chacun d'eux fait entièrement partie du

Généralités relatives aux régions à la fois limitées et complètes.

10. Désignant par $x, y, \ldots$ des variables *réelles* en nombre quelconque n, considérons une région $\mathfrak{R}$ extraite de l'espace $\big[[x, y, \ldots]\big]$, et supposons qu'à chaque point $(x, y, \ldots)$ de la région on fasse, de quelque manière, correspondre un ensemble de constantes *réelles ou imaginaires* (soit une, soit plusieurs, soit une infinité) dont chacune s'appellera, pour abréger, une *caractéristique du point*.

Sur ces données faisons en outre l'hypothèse suivante :

Si un point $(x_0, y_0, \ldots)$ de la région admet parmi ses caractéristiques la constante λ_0, tout point de la région $\mathfrak{R}$ suffisamment voisin du précédent admet parmi les siennes quelque constante dont la différence à λ_0 présente un module inférieur à une quantité positive assignée d'avance.

En d'autres termes, si l'on considère un point déterminé $(x_0, y_0, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}$, une caractéristique déterminée λ_0 de ce point, et une constante positive arbitrairement donnée α, on peut assigner une constante positive β telle que la relation

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\ldots} < \beta,$$

supposée vérifiée pour un point $(x, y, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}$, entraîne pour ce dernier point l'existence de quelque caractéristique λ satis-

---

précédent; 2° celui de rang k a pour amplitudes les quantités infiniment petites

$$\frac{X-x_0}{2^{k-1}}, \quad \frac{Y-y_0}{2^{k-1}}, \quad \ldots;$$

3° chacun d'eux contient une infinité de points remarquables de la région $\mathfrak{R}$.

Cela étant, si, dans chacun des intervalles complexes de la suite, on assigne un point suivant une loi arbitrairement choisie (par exemple celui qui a pour coordonnées les valeurs extrêmes minima des divers intervalles simples qui constituent l'intervalle complexe), la variante ainsi obtenue tend vers une limite, S, située dans l'un quelconque des intervalles complexes de la suite. On conclut de là que la distance de S à un point quelconque de $\mathfrak{J}_k$ est inférieure à

$$\frac{1}{2^{k-1}}\sqrt{(X-x_0)^2+(Y-y_0)^2+\ldots},$$

et, par suite, qu'elle tombe au-dessous de toute quantité donnée à partir d'une valeur suffisamment grande de k : de cette circonstance, combinée avec la troisième propriété des intervalles de la suite, résulte la proposition qu'il s'agit d'établir.

faisant à la relation

$$\operatorname{mod}(\lambda - \lambda_0) < \alpha.$$

Cela étant, nous allons établir successivement les diverses propositions qui suivent.

11. *Les mêmes choses étant posées qu'au n° 10, et la région* $\mathfrak{R}$ *étant, de plus, limitée et complète, on peut assigner une constante positive,* L, *telle que tout point de la région admette, indépendamment de sa position, quelque caractéristique de module inférieur à* L.

I. Soient :

x, y, ... des variables réelles;
$\mathfrak{C}$ une région *complète* de l'espace $[[x, y, \ldots]]$;

(1) $$\mathfrak{J}_1, \quad \mathfrak{J}_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{J}_q, \quad \ldots$$

une suite d'intervalles complexes se succédant indéfiniment suivant quelque loi déterminée, arbitrairement choisie sous les seules conditions : 1° que chacun d'eux soit entièrement contenu dans le précédent; 2° que les amplitudes (n° 9, II) de $\mathfrak{J}_q$ tendent vers zéro pour q infini; 3° que chacun des intervalles (1) contienne quelque point de la région complète $\mathfrak{C}$;

enfin,

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_q, \quad \ldots$$

des points respectivement choisis dans les intervalles (1) suivant une loi déterminée quelconque.

Cela étant, il résulte d'une démonstration antérieure (n° 9, III) que la variante s_q tend vers une limite S située dans l'un quelconque des intervalles (1). Je dis, de plus, que *cette limite appartient nécessairement à la région* $\mathfrak{C}$: car, s'il en était autrement, l'intervalle $\mathfrak{J}_q$, dont nous désignerons les amplitudes par a_q, b_q, ..., contiendrait, en même temps que S, quelque point de la région $\mathfrak{C}$, et la distance de S à un pareil point pourrait devenir inférieure à la quantité

$$\sqrt{a_q^2 + b_q^2 + \ldots},$$

par suite à toute quantité donnée. Or, c'est là une conclusion absurde

puisque la région $\mathfrak{C}$ est complète, et que le point S, s'il n'y est pas compris, ne peut lui être que complètement extérieur (nº 3).

II. *Les mêmes choses étant posées qu'au nº 10, et la région $\mathfrak{R}$ étant, de plus, limitée et complète, s'il existe, dans cette région, quelque point dont toute caractéristique ait un module supérieur à la constante positive ω, on peut, suivant une loi déterminée, assigner dans la région $\mathfrak{R}$ un point dont toute caractéristique ait un module supérieur ou égal à ω.*

La région $\mathfrak{R}$, étant limitée, se trouve entièrement contenue dans quelque intervalle complexe $\mathfrak{I}_1$ (nº 9, IV). Divisons en deux parties égales chacun des n intervalles simples,

$$x_0 \leqq x \leqq X, \qquad y_0 \leqq y \leqq Y, \qquad \ldots,$$

de l'association desquels ce dernier résulte, ordonnons les intervalles complexes partiels fournis par cette subdivision (nº 9, II), et appelons $\mathfrak{I}_2$ le premier d'entre eux contenant quelque point de $\mathfrak{R}$ dont toute caractéristique ait un module supérieur à ω. En opérant sur l'intervalle $\mathfrak{I}_2$ comme nous l'avons fait sur $\mathfrak{I}_1$, et ainsi de suite indéfiniment, nous obtiendrons une succession illimitée d'intervalles complexes,

$$(2) \qquad \mathfrak{I}_1, \quad \mathfrak{I}_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{I}_q, \quad \ldots,$$

jouissant de la triple propriété que nous allons énoncer :

1º Chacun d'eux fait entièrement partie du précédent;

2º Celui de rang q a pour amplitudes les quantités

$$\frac{X-x_0}{2^{q-1}}, \quad \frac{Y-y_0}{2^{q-1}}, \quad \ldots,$$

qui sont infiniment petites pour q infini;

3º Chacun des intervalles (2) contient quelque point de $\mathfrak{R}$ dont toute caractéristique présente un module supérieur à ω.

Cela étant, il résulte tout d'abord de l'alinéa I que, si l'on désigne par s_q un point choisi dans $\mathfrak{I}_q$ suivant une loi déterminée quelconque, cette variante s_q tend vers une limite S située dans l'un quelconque des intervalles (2), et aussi dans la région $\mathfrak{R}$. Je dis, de plus, que toute caractéristique du point S est forcément de module supérieur ou égal à ω.

Supposons en effet que quelque caractéristique, λ_S, de ce point ait un module inférieur à ω, et désignons par s un *point quelconque commun à $\mathfrak{R}$ et à $\mathfrak{J}_q$*. A partir d'une valeur de q suffisamment grande, la distance des deux points s et S tombe au-dessous de toute quantité donnée, puisqu'elle est inférieure à

$$\frac{1}{2^{q-1}}\sqrt{(X-x_0)^2+(Y-y_0)^2+\ldots};$$

donc, à partir d'une valeur de q suffisamment grande, le point s admettra quelque caractéristique, λ_s, telle que le module de $\lambda_s-\lambda_S$ tombe lui-même au-dessous de toute quantité donnée, et, à plus forte raison, la valeur numérique de

$$\operatorname{mod}\lambda_s-\operatorname{mod}\lambda_S;$$

le module de λ_S étant inférieur à ω, tout point commun à $\mathfrak{R}$ et à $\mathfrak{J}_q$ admettra donc, à partir d'une valeur de q suffisamment grande, quelque caractéristique de module inférieur à ω, ce qui est impossible, puisque, d'après la troisième propriété des intervalles (2), un pareil point peut toujours être choisi de manière que toute caractéristique y ait un module supérieur à ω.

Toute caractéristique du point S est donc bien, comme il s'agissait de l'établir, de module supérieur ou égal à ω.

Le raisonnement qui précède doit être complété par une observation essentielle. Pour déterminer le point S comme nous venons de le faire, on commence par considérer un intervalle complexe, $\mathfrak{J}_1$, où la région $\mathfrak{R}$ se trouve entièrement comprise : il existe, naturellement, une infinité d'intervalles complexes jouissant de cette propriété, et, suivant qu'on prend tel ou tel d'entre eux pour point de départ des divisions successives en deux parties égales, le point S peut n'être pas le même; mais, *l'intervalle $\mathfrak{J}_1$ une fois fixé, le point* S, auquel elles conduisent finalement, *est entièrement déterminé* (n° 9, III).

III. *Les mêmes choses étant posées qu'au n° 10, et la région $\mathfrak{R}$ étant, de plus, limitée et complète, considérons une suite indéfinie donnée,*

$$(3)\qquad \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_m,\ \ldots,$$

de constantes positives, et supposons que, quel que soit m, la ré-

gion $\mathfrak{R}$ *contienne quelque point dont toute caractéristique ait un module supérieur à* ω_m.

Cela étant, on peut assigner quelque variante, $(x_m, y_m, \ldots)$, *tombant constamment dans la région* $\mathfrak{R}$, *et telle que toute caractéristique du point* $(x_m, y_m, \ldots)$ *ait un module supérieur ou égal à* ω_m.

En se donnant une fois pour toutes un intervalle complexe où se trouve comprise la région $\mathfrak{R}$, et en recommençant pour chaque terme de la suite (3) un raisonnement identique à celui de l'alinéa précédent, on définira une variante $(x_m, y_m, \ldots)$ satisfaisant à toutes les conditions requises.

IV. *Les mêmes choses étant posées qu'au n°* 10, *et la région* $\mathfrak{R}$ *étant, de plus, limitée et complète, on peut assigner une constante positive,* L′, *telle que tout point de la région* $\mathfrak{R}$ *admette, indépendamment de sa position, quelque caractéristique de module inférieur ou égal à* L′.

Supposons en effet qu'il en soit autrement, c'est-à-dire que, une constante positive ω, de grandeur arbitraire, étant donnée, il existe dans la région $\mathfrak{R}$ quelque point dont toute caractéristique présente un module supérieur à ω. Cela étant, si l'on prend successivement pour ω tous les nombres entiers positifs,

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad m, \quad \ldots,$$

il existe, en vertu de l'alinéa III, quelque variante, $(x_m, y_m, \ldots)$, tombant constamment dans la région $\mathfrak{R}$, et telle qu'au point $(x_m, y_m, \ldots)$ toute caractéristique ait un module supérieur ou égal à m; cette variante ne sortant jamais de la région $\mathfrak{R}$, qui est limitée et complète, une variante,

$$(x_{m_k}, y_{m_k}, \ldots) = (x^{(k)}, y^{(k)}, \ldots),$$

convenablement extraite de $(x_m, y_m, \ldots)$, sera convergente (n° 9), et sa limite sera située dans $\mathfrak{R}$ (n° 8). Cela étant, désignons par Λ une caractéristique de ce point limite : à partir d'une valeur de k suffisamment grande, le point $(x^{(k)}, y^{(k)}, \ldots)$ admettra quelque caractéristique dont la différence à Λ présente un module moindre que toute quantité donnée; à plus forte raison, la différence, prise en valeur absolue, des modules de ces deux caractéristiques sera-t-elle moindre

que toute quantité donnée : or, c'est là une conclusion absurde, puisque toute caractéristique du point $(x^{(k)}, y^{(k)}, \ldots)$ possède un module supérieur ou égal à la variante infinie m_k.

V. Toute constante positive, L, supérieure à la constante L' dont il est question à l'alinéa IV, remplira évidemment les conditions requises par notre énoncé général.

12. *Les mêmes choses étant posées qu'au n° 10, et la région* $\mathfrak{R}$ *étant, de plus, limitée et complète, si, quelle que soit la constante positive* ω, *la région* $\mathfrak{R}$ *contient quelque point dont toute caractéristique présente un module inférieur à* ω, *elle contient nécessairement aussi quelque point dont toute caractéristique est nulle.*

I. *Les mêmes choses étant posées qu'au n° 10, et la région* $\mathfrak{R}$ *étant, de plus, limitée et complète, considérons une suite indéfinie donnée,*

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_m, \quad \ldots,$$

de constantes positives, et supposons que, quel que soit m, *la région* $\mathfrak{R}$ *contienne quelque point dont toute caractéristique ait un module inférieur à* ω_m.

Cela étant, on peut assigner quelque variante, $(x_m, y_m, \ldots)$, *tombant constamment dans la région* $\mathfrak{R}$, *et telle que toute caractéristique du point* $(x_m, y_m, \ldots)$ *ait un module inférieur ou égal à* ω_m.

On répétera, avec les modifications voulues, les raisonnements faits dans les alinéas II et III du numéro précédent.

II. Revenons à notre énoncé général, et supposons, conformément à l'hypothèse, qu'une constante positive ω, de petitesse arbitraire, étant donnée, il existe dans la région $\mathfrak{R}$ quelque point dont toute caractéristique ait un module inférieur à ω. Cela étant, si l'on prend successivement pour ω les inverses arithmétiques de tous les nombres entiers positifs,

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{m}, \quad \ldots,$$

il existe, en vertu de l'alinéa I, quelque variante, $(x_m, y_m, \ldots)$, tombant constamment dans la région $\mathfrak{R}$, et telle qu'au point $(x_m, y_m, \ldots)$

toute caractéristique ait un module inférieur ou égal à $\frac{1}{m}$; cette variante ne sortant jamais de la région $\mathfrak{R}$, qui est limitée et complète, une variante,

$$(x_{m_k}, y_{m_k}, \ldots) = (x^{(k)}, y^{(k)}, \ldots),$$

convenablement extraite de $(x_m, y_m, \ldots)$, sera convergente (n° 9), et sa limite sera située dans $\mathfrak{R}$ (n° 8). Cela étant, je dis que toute caractéristique, Λ, du point limite est forcément nulle. En effet, à partir d'une valeur de k suffisamment grande, le point $(x^{(k)}, y^{(k)}, \ldots)$ admettra quelque caractéristique dont la différence à Λ présente un module moindre que toute quantité donnée ; à plus forte raison la différence, prise en valeur absolue, des modules de ces deux caractéristiques sera-t-elle moindre que toute quantité donnée : si donc le module de Λ n'était pas nul, le point $(x^{(k)}, y^{(k)}, \ldots)$ admettrait, à partir d'une valeur de k suffisamment grande, quelque caractéristique de module supérieur à la variante infiniment petite $\frac{1}{m_k}$, ce qui est impossible.

13. *Les mêmes choses étant posées qu'au n° 10, et la région $\mathfrak{R}$ étant, de plus, limitée et complète, si toutes les caractéristiques des divers points de la région sont des quantités différentes de zéro, on peut assigner une constante positive, l, telle que tout point de la région $\mathfrak{R}$ admette, indépendamment de sa position, quelque caractéristique de module supérieur à l.*

Puisque toute caractéristique est, par hypothèse, essentiellement différente de zéro, il est impossible qu'en aucun point de la région $\mathfrak{R}$ toute caractéristique soit nulle; si donc on se reporte au numéro précédent, on voit qu'en désignant par l' une constante positive convenablement choisie, il n'existe dans la région $\mathfrak{R}$ aucun point dont toute caractéristique présente un module inférieur à l'. En d'autres termes, tout point de la région $\mathfrak{R}$ possède quelque caractéristique de module supérieur ou égal à l', et, dès lors, une constante positive, l, arbitrairement choisie au-dessous de l', satisfait à la condition requise par notre énoncé.

14. *Les mêmes choses étant posées qu'au n° 10, et la région $\mathfrak{R}$ étant, de plus, limitée et complète, on peut, une constante positive α*

étant donnée, assigner une constante positive β, *telle que deux points arbitrairement choisis dans la région* $\mathfrak{R}$ *à une distance mutuelle moindre que* β *admettent respectivement, au nombre de leurs caractéristiques, deux quantités dont la différence ait un module moindre que* α.

I. *Les mêmes choses étant posées qu'au n°* 10, *si l'on considère un point déterminé,* $(x_0, y_0, \ldots)$, *de la région* $\mathfrak{R}$, *on peut, une constante positive* α *étant donnée, assigner une constante positive,* δ_0, *telle que deux points arbitrairement choisis dans la région* $\mathfrak{R}$, *sous la seule condition que leurs distances à* $(x_0, y_0, \ldots)$ *soient l'une et l'autre moindres que* δ_0, *admettent respectivement, au nombre de leurs caractéristiques, deux quantités dont la différence ait un module moindre que* α.

Si l'on désigne en effet par λ_0 une caractéristique du point $(x_0, y_0, \ldots)$, on peut, en vertu de nos hypothèses, assigner une constante positive δ_0 telle que la relation

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\ldots} < \delta_0,$$

supposée vérifiée pour un point $(x, y, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}$, entraîne comme conséquence nécessaire, pour le point dont il s'agit, l'existence de quelque caractéristique λ vérifiant la relation

$$\operatorname{mod}(\lambda-\lambda_0) < \frac{\alpha}{2}.$$

Cela étant, désignons par $(x', y', \ldots)$, $(x'', y'', \ldots)$ deux points arbitrairement choisis dans la région $\mathfrak{R}$ sous les seules conditions que leurs distances à $(x_0, y_0, \ldots)$ soient l'une et l'autre moindres que δ_0 : d'après ce qui vient d'être dit, ces deux points admettront respectivement deux caractéristiques, λ', λ'', vérifiant les relations

$$\operatorname{mod}(\lambda'-\lambda_0) < \frac{\alpha}{2}, \qquad \operatorname{mod}(\lambda''-\lambda_0) < \frac{\alpha}{2},$$

d'où résulte, par addition membre à membre,

$$\operatorname{mod}(\lambda'-\lambda_0)+\operatorname{mod}(\lambda_0-\lambda'') < \alpha,$$

et, à plus forte raison,

$$\operatorname{mod}(\lambda'-\lambda'') < \alpha.$$

11. Les mêmes choses étant posées qu'au n° 10, nommons désormais *caractéristique première* d'un point déterminé (quelconque) de la région $\mathfrak{R}$ ce que jusqu'ici nous avons simplement appelé *caractéristique;* puis, considérant le nombre positif donné α, nommons *caractéristique seconde* du même point toute constante positive telle que deux points arbitrairement choisis dans la région $\mathfrak{R}$, sous les seules conditions que leurs distances au premier soient l'une et l'autre moindres que cette constante, admettent respectivement, au nombre de leurs caractéristiques premières, deux quantités dont la différence présente un module moindre que α (I). Cela étant, *si un point* $(x_0, y_0, \ldots)$ *de la région* $\mathfrak{R}$ *admet, parmi ses caractéristiques secondes, la constante positive* δ_0, *tout point de la région* $\mathfrak{R}$ *suffisamment voisin du précédent admettra parmi les siennes une constante positive dont la différence à* δ_0, *prise en valeur absolue, tombe au-dessous d'une quantité positive assignée d'avance.*

Effectivement, tout point $(\xi, \eta, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}$ dont la distance à $(x_0, y_0, \ldots)$ tombe au-dessous de δ_0 ne peut manquer, comme on va le voir, d'admettre au nombre de ses caractéristiques secondes la différence (positive)

$$(4) \qquad \delta = \delta_0 - \sqrt{(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2+\ldots};$$

car les relations

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{(x'-\xi)^2+(y'-\eta)^2+\ldots} < \delta, \\ \sqrt{(x''-\xi)^2+(y''-\eta)^2+\ldots} < \delta, \end{array} \right.$$

qui peuvent s'écrire

$$\sqrt{(x'-\xi)^2+(y'-\eta)^2+\ldots}+\sqrt{(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2+\ldots} < \delta_0,$$
$$\sqrt{(x''-\xi)^2+(y''-\eta)^2+\ldots}+\sqrt{(x_0-\xi)^2+(y_0-\eta)^2+\ldots} < \delta_0,$$

entraînent, à plus forte raison (n° 2, I),

$$\sqrt{(x'-x_0)^2+(y'-y_0)^2+\ldots} < \delta_0,$$
$$\sqrt{(x''-x_0)^2+(y''-y_0)^2+\ldots} < \delta_0,$$

d'où résulte que deux points $(x', y', \ldots)$, $(x'', y'', \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}$, s'ils satisfont aux relations (5), admettent respectivement, au nombre de leurs caractéristiques premières, deux quantités dont la différence

présente un module moindre que α; le point $(\xi, \eta, \ldots)$ admet donc bien δ pour caractéristique seconde. La simple inspection de la formule (4) montre alors que, si le point $(\xi, \eta, \ldots)$ est suffisamment voisin de $(x_0, y_0, \ldots)$, la différence (positive) $\delta_0 - \delta$ tombe au-dessous de toute quantité donnée.

III. Revenons à notre énoncé général.

La région $\mathfrak{R}$ étant alors limitée et complète, et toute caractéristique seconde (II) d'un point de cette région étant, par définition même, essentiellement supérieure à zéro, la proposition du numéro précédent est applicable, et l'on peut affirmer qu'en désignant par β une constante positive convenablement choisie, tout point de la région $\mathfrak{R}$ admet, indépendamment de sa position, quelque caractéristique seconde supérieure à β.

Cela posé, considérons dans la région $\mathfrak{R}$ deux points, $(x_1, y_1, \ldots)$, $(x_2, y_2, \ldots)$, dont la distance mutuelle soit moindre que β : je dis que ces deux points admettent respectivement, parmi leurs caractéristiques premières, deux quantités dont la différence présente un module moindre que α. Effectivement, l'un quelconque de ces deux points, par exemple $(x_1, y_1, \ldots)$, admettant, d'après ce qui vient d'être dit, une caractéristique seconde supérieure à β, les relations

$$(6) \qquad \begin{cases} \sqrt{(x'-x_1)^2+(y'-y_1)^2+\ldots} < \beta, \\ \sqrt{(x''-x_1)^2+(y''-y_1)^2+\ldots} < \beta, \end{cases}$$

supposées vérifiées pour deux points $(x', y', \ldots)$, $(x'', y'', \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}$, entraînent comme conséquence nécessaire l'existence, en ces deux points, de caractéristiques premières dont la différence présente un module moindre que α. Or, la distance du point $(x_1, y_1, \ldots)$ à lui-même étant nulle, et sa distance au point $(x_2, y_2, \ldots)$ étant, par hypothèse, moindre que β, les relations (6) se trouvent vérifiées pour

$$(x', y', \ldots) = (x_1, y_1, \ldots), \qquad (x'', y'', \ldots) = (x_2, y_2, \ldots);$$

les points $(x_1, y_1 \ldots)$, $(x_2, y_2, \ldots)$ admettent donc respectivement, au nombre de leurs caractéristiques premières, deux quantités dont a différence présente un module moindre que α. C'est ce qu'il s'agissait d'établir.

Fonctions continues.

15. Nous nommerons *premier* et *second élément* de la quantité imaginaire $a' + ia''$ les deux quantités réelles a', a''.

Si aux n variables

$$(1) \qquad x = x' + ix'', \quad y = y' + iy'', \quad \ldots$$

on attribue tous les systèmes possibles de valeurs imaginaires, les systèmes de valeurs réelles que prennent alors leurs $2n$ éléments redonnent les divers points d'un espace à $2n$ dimensions,

$$(2) \qquad \big[[x', x'', y', y'', \ldots]\big].$$

Il arrive d'ailleurs sans cesse qu'on ait à considérer exclusivement, dans telle ou telle question, les systèmes de valeurs des n variables (1) satisfaisant à tel ou tel groupe de conditions entre leurs $2n$ éléments, ou, ce qui revient au même, les points situés dans telle ou telle région de l'espace (2).

Dans l'espace à $2n$ dimensions (2), à la considération duquel on est conduit par celle des n variables imaginaires (1), un point quelconque

$$(x', x'', y', y'', \ldots)$$

se désigne tout aussi bien par la notation

$$(x, y, \ldots),$$

et les valeurs $x, y, \ldots$ se nomment, en pareil cas, les *coordonnées imaginaires* du point. L'espace (2) se désigne de même par la notation

$$\big[[x, y, \ldots]\big].$$

Enfin, si l'on considère dans l'espace (2) deux points quelconques,

$$x_1 = x'_1 + ix''_1, \quad y_1 = y'_1 + iy''_1, \quad \ldots,$$
$$x_2 = x'_2 + ix''_2, \quad y_2 = y'_2 + iy''_2, \quad \ldots,$$

leur distance, égale par définition (nº 1) à

$$\sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (x''_1 - x''_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (y''_1 - y''_2)^2 + \ldots},$$

peut évidemment s'écrire sous la forme

$$\sqrt{\operatorname{mod}(x_1-x_2)^2+\operatorname{mod}(y_1-y_2)^2+\ldots}.$$

Si, notamment, il n'y a qu'une seule variable imaginaire, x, la distance des deux points x_1, x_2 est égale au module de la différence x_1-x_2.

16. Soient

$$x, \quad y, \quad \ldots$$

n variables indépendantes, que nous supposerons, indifféremment, *réelles* ou *imaginaires*.

Une fonction $f(x, y, \ldots)$, bien définie dans toute l'étendue d'une région $\mathfrak{R}$ de l'espace $[[x, y, \ldots]]$ [1], est dite *continue* dans cette région, si, un point $(x_0, y_0, \ldots)$ de la région et une constante positive α étant donnés, on peut leur faire correspondre quelque constante positive, β, telle que les relations simultanées

$$\operatorname{mod}(x-x_0)<\beta, \qquad \operatorname{mod}(y-y_0)<\beta, \qquad \ldots,$$

supposées vérifiées pour un point $(x, y, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}$, entraînent comme conséquence nécessaire la relation

(3) $$\operatorname{mod}[f(x, y, \ldots)-f(x_0, y_0, \ldots)]<\alpha;$$

ou, ce qui revient au même, si, le point $(x_0, y_0, \ldots)$ et la constante α étant donnés, on peut leur faire correspondre quelque constante positive, γ, telle que la relation

$$\sqrt{\operatorname{mod}(x-x_0)^2+\operatorname{mod}(y-y_0)^2+\ldots}<\gamma,$$

supposée vérifiée pour un point $(x, y, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}$, entraîne comme conséquence nécessaire la relation (3).

Si une fonction, $u=f(x,y,\ldots)$, est continue dans une région $\mathfrak{R}$ de l'espace $[[x,y,\ldots]]$, et si une variante $(x_{m,r,\ldots}, y_{m,r,\ldots}, \ldots)$, tombant constamment dans cette région, a pour limite un point $(X, Y, \ldots)$ *qui y soit également situé, la variante*

$$u_{m,r,\ldots}=f(x_{m,r,\ldots}, y_{m,r,\ldots}, \ldots)$$

[1] Cet espace est à n ou à $2n$ dimensions, suivant que les n variables $x, y, \ldots$ sont réelles ou imaginaires.

de l'espace $\big[[u]\big]$ *a pour limite le point*

$$U = f(X, Y, \ldots)$$

de cet espace.

Effectivement, la distance du point variable $(x_{m,r,\ldots}, y_{m,r,\ldots}, \ldots)$ au point fixe $(X, Y, \ldots)$ finissant, en vertu de notre hypothèse, par tomber au-dessous de toute quantité donnée (n° 7), il résulte de la continuité de $f(x, y, \ldots)$ que le module de la différence $U - u_{m,r,\ldots}$, c'est-à-dire la distance des deux points $u_{m,r,\ldots}$, U de l'espace $\big[[u]\big]$ (n° 1) (n° 15), jouit nécessairement aussi de cette même propriété : le point $u_{m,r,\ldots}$ a donc pour limite U (n° 7).

17. Si l'on observe que, dans le cas où les variables $x, y, \ldots$ sont imaginaires, l'espace $\big[[x, y, \ldots]\big]$ n'est autre chose, par définition (n° 15), que l'espace (2); si, d'un autre côté, on compare à notre hypothèse générale du n° 10 la définition, donnée ci-dessus (n° 16), de la *continuité,* on voit immédiatement qu'elle s'en déduit par la simple supposition que chaque point de la région $\mathfrak{R}$ possède une caractéristique *unique*. Nous pouvons donc, sans autre démonstration, énoncer les théorèmes suivants :

1° *Si une fonction est continue dans une région limitée et complète, son module y reste constamment inférieur à quelque quantité fixe* (n° 11) ;

2° *Si une fonction est continue dans une région limitée et complète, et qu'elle y puisse acquérir un module inférieur à toute quantité positive donnée, elle s'annule certainement en quelque point de la région* (n° 12);

3° *Si une fonction est continue dans une région limitée et complète, et qu'elle ne s'y annule jamais, son module y reste constamment supérieur à quelque quantité positive fixe* (n° 13);

4° *Si une fonction* $f(x, y, \ldots)$ *est continue dans une région limitée et complète, on peut, un nombre positif* α *étant donné, assigner un nombre positif* β *tel que, pour deux points* $(x_1, y_1, \ldots)$, $(x_2, y_2, \ldots)$ *arbitrairement choisis dans la région à une distance mutuelle moindre que* β, *la différence*

$$f(x_1, y_1, \ldots) - f(x_2, y_2, \ldots)$$

présente un module moindre que α (*n°* 14).

Observons enfin : 5° Que *le module d'une fonction continue* $f(x, y, \ldots)$ *est lui-même une fonction continue;* il suffit, pour s'en convaincre, de se reporter à notre définition du n° 16, et de remarquer que la relation

$$\operatorname{mod}[f(x, y, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)] < \alpha$$

entraîne comme conséquence nécessaire

$$\text{val. abs.}[\operatorname{mod} f(x, y, \ldots) - \operatorname{mod} f(x_0, y_0, \ldots)] < \alpha.$$

18. Nous terminerons ce Chapitre par la remarque suivante :

Soient :

$x, y, \ldots$ des variables indépendantes (réelles ou imaginaires) en nombre quelconque g;

$$(4) \qquad \begin{cases} u = \mathrm{U}(x, y, \ldots), \\ v = \mathrm{V}(x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

des fonctions de $x, y, \ldots$, en nombre quelconque j, toutes *continues* dans une même région, $\mathfrak{R}_{x, y, \ldots}$, de l'espace $[[x, y, \ldots]]$;

$\mathfrak{R}_{u, v, \ldots}$ la région de l'espace $[[u, v, \ldots]]$ constituée par l'ensemble des divers points $(u, v, \ldots)$ qui, en vertu des formules (4), correspondent (avec répétition possible) aux divers points de $\mathfrak{R}_{x, y, \ldots}$.

Cela posé, *si la région* $\mathfrak{R}_{x, y, \ldots}$ *est à la fois limitée et complète, la région* $\mathfrak{R}_{u, v, \ldots}$ *ne peut manquer de l'être aussi.*

I. *Une fonction entière,* $f(x, y, \ldots)$, *est continue dans toute l'étendue de l'espace* $[[x, y, \ldots]]$ (¹).

(¹) Il s'agit de faire voir qu'en désignant par $(x_0, y_0, \ldots)$ un point fixe donné et par α une constante positive donnée, on peut assigner une constante positive, β, telle que les relations simultanées

$$\operatorname{mod}(x - x_0) < \beta, \qquad \operatorname{mod}(y - y_0) < \beta, \qquad \ldots$$

entraînent comme conséquence nécessaire

$$\operatorname{mod}[f(x, y, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)] < \alpha.$$

Effectivement, si l'on pose

$$x - x_0 = h, \qquad y - y_0 = k, \qquad \ldots,$$

II. *Si l'on désigne par m un entier positif, et par z une variable indépendante assujettie à se mouvoir dans la région* $z \geqq 0$, *la fonction (positive)* $\sqrt[m]{z}$ *est continue* (¹).

III. On nomme *composition* des fonctions l'opération qui consiste à substituer aux variables $u, v, \ldots$, en nombre quelconque j, d'une fonction donnée,

(5) $$f(u, v, \ldots),$$

j fonctions données,

(6) $$U(x, y, \ldots), \quad V(x, y, \ldots), \quad \ldots,$$

---

la différence

$$f(x, y, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)$$

ou

$$f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)$$

peut, par l'application des premières règles de l'Algèbre, être mise sous forme d'un polynome entier en $h, k, \ldots$ ayant ses termes tous dissemblables et privé de terme constant. Si ce polynome, $P(h, k, \ldots)$, n'a que des coefficients nuls, il est nul quels que soient $h, k, \ldots$, et le nombre positif β est arbitraire. Dans le cas contraire, soient q le nombre de ses termes (à coefficients non nuls), μ le plus grand module des coefficients, et β un nombre positif à la fois inférieur à 1 et à $\frac{\alpha}{\mu q}$; en supposant les modules de $h, k, \ldots$ tous inférieurs à β, celui du terme

$$C h^a k^b \ldots,$$

où $a + b + \ldots$ est forcément plus grand que zéro, est inférieur à

$$\mu \beta^{a+b+\ldots} \leqq \mu \beta < \mu \frac{\alpha}{\mu q} = \frac{\alpha}{q};$$

la somme des modules des termes du polynome $P(h, k, \ldots)$ et, à plus forte raison, le module de $P(h, k, \ldots)$ sont donc inférieurs à $q \frac{\alpha}{q}$, c'est-à-dire à α.

(¹) En effet, si l'on prend arbitrairement, dans la région $z \geqq 0$, deux valeurs z_1, z_2, on a, en désignant par z_1 la plus grande des deux,

$$\sqrt[m]{z_1} \leqq \sqrt[m]{z_2} + \sqrt[m]{z_1 - z_2},$$

comme le montre l'élévation des deux membres de l'inégalité à la puissance m. En vertu de cette relation, qui peut s'écrire sous la forme

$$\sqrt[m]{z_1} - \sqrt[m]{z_2} \leqq \sqrt[m]{z_1 - z_2},$$

il suffit, pour que la différence (prise positivement) de deux valeurs de la fonction soit inférieure à α, que la différence (prise positivement) des deux valeurs de z soit inférieure à α^m. A plus forte raison cette fonction est-elle continue dans la région dont il s'agit.

d'autres variables $x, y, \ldots$, en nombre quelconque g, ce qui engendre évidemment une nouvelle fonction de ces dernières,

$$(7) \qquad F(x, y, \ldots) = f[U(x, y, \ldots), V(x, y, \ldots), \ldots];$$

relativement à cette opération, les fonctions (6) seront dites *simples*, $f(u, v, \ldots)$ se nommera la fonction *composante*, et $F(x, y, \ldots)$ la fonction *composée*.

Cela étant, *si les fonctions simples* (6) *sont toutes continues dans une même région*, $\mathfrak{R}_{x, y, \ldots}$, *de l'espace* $[[x, y, \ldots]]$; *si, de plus, la composante* (5) *est continue dans une région*, $\mathfrak{R}_{u, v, \ldots}$, *de l'espace* $[[u, v, \ldots]]$; *si enfin, pour un choix arbitraire du point* $(x, y, \ldots)$ *dans la première région, le point fourni par l'association des valeurs* (6) *se trouve toujours compris dans la seconde: la fonction composée* (7) *est certainement continue dans la région* $\mathfrak{R}_{x, y, \ldots}$.

Soient, en effet :

$(x_0, y_0, \ldots)$ un point particulier quelconque de $\mathfrak{R}_{x, y, \ldots}$;
$u_0, v_0, \ldots$ les valeurs correspondantes des fonctions (6);
α un nombre positif choisi à volonté ;
β un deuxième nombre positif, tel que la différence

$$f(u, v, \ldots) - f(u_0, v_0, \ldots)$$

présente un module inférieur à α, toutes les fois que le point $(u, v, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}_{u, v, \ldots}$ se trouve à une distance de $(u_0, v_0, \ldots)$ moindre que β;

γ un dernier nombre positif, tel que les j différences

$$U(x, y, \ldots) - U(x_0, y_0, \ldots), \quad V(x, y, \ldots) - V(x_0, y_0, \ldots), \quad \ldots$$

présentent toutes des modules moindres que $\frac{\beta}{\sqrt{j}}$, dès que le point $(x, y, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}_{x, y, \ldots}$ se trouve à une distance de $(x_0, y_0, \ldots)$ moindre que γ.

Cela étant, si un point $(x, y, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}_{x, y, \ldots}$ satisfait à la relation

$$\sqrt{\operatorname{mod}(x - x_0)^2 + \operatorname{mod}(y - y_0)^2 + \ldots} < \gamma,$$

le point $(u, v, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}_{u, v, \ldots}$ fourni par l'association des

valeurs (6) vérifiera la relation

$$\sqrt{\operatorname{mod}(u-u_0)^2+\operatorname{mod}(v-v_0)^2+\ldots}<\beta,$$

par suite aussi la relation

$$\operatorname{mod}[f(u, v, \ldots)-f(u_0, v_0, \ldots)]<\alpha,$$

c'est-à-dire qu'on aura

$$\operatorname{mod}[\mathrm{F}(x, y, \ldots)-\mathrm{F}(x_0, y_0, \ldots)]<\alpha.$$

IV. Revenons à notre énoncé.

La région $\mathfrak{R}_{u, v, \ldots}$ est nécessairement limitée : car chacune des fonctions $u, v, \ldots$, que définissent les formules (4), étant, par hypothèse, continue dans la région limitée et complète $\mathfrak{R}_{x, y, \ldots}$, y garde un module constamment inférieur à quelque nombre positif fixe (n° 17, 1°), et, dès lors, la quantité

$$\sqrt{\operatorname{mod} u^2+\operatorname{mod} v^2+\ldots},$$

distance du point $(u, v, \ldots)$ au point fixe $(0, 0, \ldots)$, jouit elle-même de cette propriété.

La région $\mathfrak{R}_{u, v, \ldots}$ est, en outre, complète : si l'on désigne, en effet, par $(\upsilon, \varphi, \ldots)$ un point fixe n'en faisant pas partie, et que l'on considère la distance du point $(\upsilon, \varphi, \ldots)$ à un point variable, $(u, v, \ldots)$, de la région, cette distance,

$$\sqrt{\operatorname{mod}(u-\upsilon)^2+\operatorname{mod}(v-\varphi)^2+\ldots},$$

ne peut manquer d'être, comme le sont par hypothèse les fonctions $u, v, \ldots$, continue dans la région limitée et complète $\mathfrak{R}_{x, y, \ldots}$ (n° 18, I, II, III) (n° 17, 5°). Comme, d'ailleurs, la distance en question ne s'annule en aucun point de $\mathfrak{R}_{x, y, \ldots}$, elle reste constamment supérieure à quelque quantité positive fixe (n° 17, 3°); on en conclut, comme il s'agissait de l'établir, que le point $(\upsilon, \varphi, \ldots)$ est *complètement extérieur* (n° 3) à la région $\mathfrak{R}_{u, v, \ldots}$.

CHAPITRE II.

SÉRIES EN GÉNÉRAL ET SÉRIES ENTIÈRES [1].

Premières propriétés.

19. On nomme *série* une suite illimitée de quantités,

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$

se formant successivement d'après une loi donnée, et que l'on somme en nombre indéfiniment croissant dans l'ordre même de leur formation : c'est ce qu'indique la notation usuelle

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots.$$

Dans ces sommations successives, il arrive de deux choses l'une : ou bien la variante S_n, obtenue en formant la somme

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

des n premiers *termes* de la série, tend, pour n infini, vers quelque limite, S; ou bien elle ne tend vers aucune limite.

Dans le premier cas, la série est dite *convergente,* et la limite S, qu'on représente aussi par la notation (1), s'appelle la *somme* de la série convergente. La différence $S - S_n$, qui tend alors vers zéro, est la somme de la série, également convergente,

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots,$$

que l'on obtient par la suppression des n premiers termes de la pro-

[1] Le Chapitre II, consacré aux séries, contient l'exposé des propriétés élémentaires, fort peu nombreuses, qui seront utiles dans les suivants : ces propriétés s'y trouvent rangées et groupées à peu près de la même façon que dans les Chapitres de l'Ouvrage de M. Méray, qui, plus complètement, traitent du même sujet (*Leçons nouvelles,* etc., 1re Partie, Chap. IV et V).

posée : on la nomme le *reste* de celle-ci, *arrêtée* à son terme de rang n.

Dans le second cas, celui où S_n ne tend vers aucune limite, la série est dite *divergente;* elle n'a alors ni somme ni reste.

D'après la règle générale formulée au n° 7, il faut, pour savoir si la série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente ou divergente, considérer la différence $S_{n+p} - S_n$ (n°s 1 et 15), c'est-à-dire la somme

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}$$

des p termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$, et chercher si, à partir d'une valeur de n suffisamment grande, et quel que soit p, cette somme conserve un module inférieur à toute quantité positive donnée.

20. Les remarques suivantes sont très souvent utilisées.

I. Désignons par $S_{n,p}$ la somme des p termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$ dans une première série

$$(2) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

par $S'_{n,p}$ la somme analogue dans une deuxième série

$$(3) \qquad u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n + \ldots,$$

et par α une quantité positive fixe. Cela étant :

1° *Si la série* (3) *est convergente, et si, à partir d'une certaine valeur de* n, *on a, quel que soit* p,

$$\operatorname{mod} S_{n,p} \leqq \alpha \operatorname{mod} S'_{n,p},$$

la série (2) *est également convergente.*

Car, à partir d'une valeur de n suffisamment grande, et quel que soit p, le module de $S'_{n,p}$ reste inférieur à toute quantité positive donnée, donc aussi celui de $S_{n,p}$.

2° *Si, au contraire, la série* (3) *est divergente, et si, à partir d'une certaine valeur de* n, *on a, quel que soit* p,

$$\operatorname{mod} S_{n,p} \geqq \alpha \operatorname{mod} S'_{n,p},$$

la série (2) *est également divergente.*

Car la relation précédente peut s'écrire

$$\operatorname{mod} S'_{n,p} \leq \frac{1}{\alpha} \operatorname{mod} S_{n,p};$$

si donc la série (2) était convergente, la série (3) le serait aussi en vertu de 1°, ce qui est contraire à l'hypothèse.

II. *Pour qu'une série soit convergente, il est nécessaire que son terme général tende vers zéro.*

Car, dans la série (2), le terme u_{n+1}, égal à $S_{n,1}$, est la valeur de $S_{n,p}$ pour $p=1$ (I), et dès lors, si l'on suppose la série convergente, doit tendre vers zéro pour n infini (n° 19).

On constate d'ailleurs sur maint exemple que *cette condition nécessaire n'est pas suffisante.*

III. *Dans une série convergente, on peut toujours, à condition de ne déplacer aucun de ses termes, les grouper arbitrairement sans détruire sa convergence ni altérer sa somme.*

En d'autres termes, si l'on désigne par S la somme de la série, par S_n celle des n premiers termes, par $S_{n,p}$ celle des p termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$, et par

$$n_1, \quad n_2, \quad \ldots, \quad n_k, \quad \ldots$$

des entiers positifs (>0) se succédant indéfiniment suivant quelque loi déterminée, la série

$$S_{n_1} + S_{n_1, n_2} + S_{n_1+n_2, n_3} + \ldots + S_{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}, n_k} + \ldots$$

est convergente et a pour somme S.

Car, dans cette dernière série, la somme des k premiers termes a pour valeur

$$S_{n_1+n_2+\ldots+n_k};$$

elle tend donc vers S pour k infini, puisque $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ est évidemment infini avec k.

IV. *Si des séries convergentes ont*

$$u'_n, \quad u''_n, \quad \ldots, \quad u^{(k)}_n$$

pour termes respectifs de rang n, et

$$S', \quad S'', \quad \ldots, \quad S^{(k)}$$

pour sommes respectives, si, en outre,

$$(4) \qquad a', \quad a'', \quad \ldots, \quad a^{(k)}$$

sont des coefficients constants en même nombre, la série ayant pour terme de rang n

$$u_n = a' u'_n + a'' u''_n + \ldots + a^{(k)} u_n^{(k)}$$

est aussi convergente, et sa somme S *se calcule à l'aide de la relation semblable*

$$S = a' S' + a'' S'' + \ldots + a^{(k)} S^{(k)}.$$

Entre les sommes des n premiers termes dans les $k+1$ séries considérées, on a évidemment la relation

$$S_n = a' S'_n + a'' S''_n + \ldots + a^{(k)} S_n^{(k)},$$

d'où l'on déduit immédiatement, par le passage aux limites, le point à démontrer.

En réduisant, soit le nombre k à 1, soit les coefficients (4) à $+1$ ou -1, on trouve ces corollaires, très souvent appliqués :

On multiplie ou on divise par une constante donnée la somme d'une série convergente en exécutant la même opération sur tous ses termes.

On combine par voie d'additions et soustractions les sommes de plusieurs séries convergentes (en nombre limité) *en combinant de la même manière leurs termes de même rang.*

Observations sur les séries à termes positifs.

21. Les séries à termes positifs donnent lieu aux observations générales suivantes :

I. *Quand une série à termes positifs est divergente, la somme* S_n *de ses n premiers termes est nécessairement infinie avec n.*

A. Une variante simple (n° 6), u_m, *à un seul indice, m, est nécessairement convergente, si, à partir d'une valeur suffisam-*

ment grande, μ, de cet indice, elle conserve la double propriété d'être toujours inférieure à quelque constante C, *et de ne jamais décroître quand son indice va en croissant.*

On ne restreint évidemment pas la généralité de la démonstration en supposant que μ soit la valeur minimum de l'indice m. Cela étant, et c désignant une quantité fixe moindre que u_μ, il résulte de nos hypothèses que l'on a, quel que soit m,

$$c < u_\mu < C,$$

et, à plus forte raison,

$$c < u_\mu \leqq C.$$

Si l'on divise maintenant en deux parties égales l'intervalle de c à C, il arrivera, ou bien que la valeur médiane, $\frac{c+C}{2}$, de l'intervalle total soit surpassée par u_m pour quelque valeur convenablement choisie de m, ou bien qu'elle ne le soit pour aucune : mais, dans l'un et dans l'autre cas, il existe un des deux intervalles partiels, et un seul, tel qu'on finisse par avoir toujours, en désignant par c_1 et C_1 ses deux valeurs extrêmes,

$$c_1 < u_m \leqq C_1.$$

De même, si l'on divise en deux parties égales l'intervalle de c_1 à C_1, il existe un des deux intervalles partiels, et un seul, tel qu'on finisse par avoir toujours, en désignant par c_2 et C_2 ses deux valeurs extrêmes,

$$c_2 < u_m \leqq C_2.$$

Et ainsi de suite indéfiniment. On formera de cette manière une suite illimitée d'intervalles

$$c \text{ à } C, \quad c_1 \text{ à } C_1, \quad c_2 \text{ à } C_2, \quad \ldots, \quad c_k \text{ à } C_k, \quad \ldots,$$

jouissant de la triple propriété suivante : 1° chacun d'eux est entièrement compris dans le précédent; 2° la différence $C_k - c_k$ a pour valeur $\frac{C-c}{2^k}$, et, par suite, est infiniment petite pour k infini ; 3° pour toute valeur particulière de k, la variante u_m finit par être toujours comprise dans l'intervalle de c_k à C_k.

Cela étant, il résulte d'une démonstration antérieure (n° 9, III) qu'une valeur choisie dans l'intervalle de c_k à C_k suivant une loi

déterminée quelconque tend vers une limite, Γ, située dans l'un quelconque des intervalles de la suite. Je dis que la variante u_m tend vers Γ : car, en désignant par ε une quantité positive arbitrairement choisie, et par k' une valeur particulière de k choisie de telle façon que $\frac{C - c}{2^{k'}}$ soit inférieur à ε, la variante u_m finira, en vertu de la troisième propriété des intervalles, par être constamment comprise dans l'intervalle de $c_{k'}$ à $C_{k'}$, et, comme la valeur fixe Γ s'y trouve également située, la différence $\Gamma - u_m$ finira par être moindre en valeur absolue que $\frac{C - c}{2^{k'}}$, et, à plus forte raison, que ε [1].

B. Revenons à notre énoncé.

La série proposée ayant tous ses termes positifs, la variante S_n ne décroît jamais quand n augmente : si donc elle ne finissait pas par surpasser une quantité positive arbitrairement choisie, elle ne la surpasserait pour aucune valeur de n, et la série serait convergente (*A*).

II. *Soient*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$
$$u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n + \ldots$$

deux séries à termes positifs.

1° *Si la deuxième série est convergente, et si l'on a, à partir d'un rang suffisamment éloigné,*

$$u_n \leqq u'_n,$$

la première est également convergente.

Car, à partir d'une valeur suffisamment grande de n, on a, quel que soit p,

$$\operatorname{mod} S_{n,p} \leqq \operatorname{mod} S'_{n,p}$$

(n° 20, I, 1°).

---

(1) Semblablement, *une variante simple, u_m, à un seul indice, m, est nécessairement convergente, si, à partir d'une valeur suffisamment grande, μ, de cet indice, elle conserve la double propriété d'être toujours supérieure à quelque constante c, et de ne jamais croître quand son indice va en croissant.* La variante $-u_m$ conserve en effet, pour $m \geqq \mu$, la double propriété d'être constamment inférieure à $-c$, et de ne jamais décroître quand son indice va en croissant : elle tend donc vers quelque limite, et, par suite, u_m tend vers la limite opposée.

2° *Si la deuxième série est divergente, et si l'on a, à partir d'un rang suffisamment éloigné,*

$$u_n \geqq u'_n,$$

la première est également divergente.

Car, si la première série était convergente, la deuxième le serait aussi en vertu de 1°.

3° *Si la deuxième série est convergente, et si l'on a, à partir d'un rang suffisamment éloigné,*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \frac{u'_{n+1}}{u'_n},$$

la première est également convergente.

Effectivement, si l'on désigne par ν une valeur particulière de n à partir de laquelle l'inégalité précédente soit constamment vérifiée, et par q un entier positif arbitraire, on a

$$\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} \leqq \frac{u'_{\nu+1}}{u'_\nu}, \qquad \frac{u_{\nu+2}}{u_{\nu+1}} \leqq \frac{u'_{\nu+2}}{u'_{\nu+1}}, \qquad \ldots, \qquad \frac{u_{\nu+q}}{u_{\nu+q-1}} \leqq \frac{u'_{\nu+q}}{u'_{\nu+q-1}},$$

d'où l'on déduit, par la multiplication membre à membre,

$$\frac{u_{\nu+q}}{u_\nu} \leqq \frac{u'_{\nu+q}}{u'_\nu} \qquad \text{ou} \qquad u_{\nu+q} \leqq \frac{u_\nu}{u'_\nu} u'_{\nu+q}.$$

On a donc, pour $n \geqq \nu$,

$$u_n \leqq \frac{u_\nu}{u'_\nu} u'_n,$$

et, par suite, pour $n \geqq \nu$ et quel que soit p,

$$\text{mod}\, S_{n,p} \leqq \frac{u_\nu}{u'_\nu} \text{mod}\, S'_{n,p}$$

(n° 20, I, 1°).

4° *Si la deuxième série est divergente, et si l'on a, à partir d'un rang suffisamment éloigné,*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq \frac{u'_{n+1}}{u'_n},$$

la première est également divergente.

Car, si la première série était convergente, la deuxième le serait aussi en vertu de 3°.

III. La progression géométrique à raison positive ρ,

$$1 + \rho + \rho^2 + \ldots,$$

est convergente ou divergente, suivant que ρ est ou non inférieur à 1. Dans le premier cas, la convergence résulte de l'égalité

$$1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^m = \frac{1 - \rho^{m+1}}{1 - \rho} = \frac{1}{1 - \rho} - \frac{\rho^{m+1}}{1 - \rho},$$

où $\frac{\rho^{m+1}}{1 - \rho}$ tend vers zéro pour m infini; dans le second cas, la divergence résulte de ce que le terme général ne tend pas vers zéro (n° 20, II).

En supposant alors que la série

$$u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n + \ldots$$

se réduise à cette progression, les règles 3° et 4° de l'alinéa précédent (II) conduisent aux deux suivantes :

Pour qu'une série à termes positifs soit convergente, il suffit que le rapport d'un terme au précédent finisse par rester inférieur à une quantité invariable, plus petite elle-même que l'unité (il suffit, en particulier, qu'il tende vers une limite plus petite que 1).

Pour qu'une série à termes positifs soit divergente, il suffit que le rapport d'un terme au précédent finisse par ne jamais tomber au-dessous de 1 (*il suffit, en particulier, qu'il tende vers une limite plus grande que* 1).

Séries absolument convergentes.

22. *Pour que la série (à termes quelconques)*

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

soit convergente, il suffit que la série

$$(2) \qquad v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,$$

formée par les modules de ses termes, le soit elle-même.

En appelant $S_{n,p}$ la somme des p termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$ dans la série (1), et $\Sigma_{n,p}$ la somme analogue dans la série (2), on a toujours

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{mod} S_{n,p} \leqq \Sigma_{n,p},$$

et cette inégalité, combinée avec la convergence de la série (2), entraîne (n° 20, I, 1°) celle de la série (1).

La somme et le reste de la série (1) *ont alors des modules inférieurs* (*égaux, au plus*) *à la somme et au reste correspondant de la série* (2).

Effectivement, si l'on désigne par S et Σ les sommes respectives des séries (1) et (2), par S_n et Σ_n les sommes de leurs n premiers termes, par R_n et P_n les restes correspondants, l'inégalité (3) donne, pour n fixe et p infini,

$$\operatorname{mod} R_n \leqq P_n,$$

et l'inégalité

$$\operatorname{mod} S_n \leqq \Sigma_n$$

donne de même, pour n infini,

$$\operatorname{mod} S \leqq \Sigma.$$

Il importe d'observer que *la convergence de la série* (2) *n'est pas nécessaire à celle de la série* (1) : mais les séries qui restent convergentes quand on y remplace chaque terme par son module jouissent de propriétés très importantes, dont nous allons exposer les principales; elles sont dites *absolument convergentes*.

23. *La série*

$$\text{(4)} \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

étant supposée absolument convergente :

1° *Toute série partielle*

$$\text{(5)} \qquad u' + u'' + \ldots,$$

formée, suivant une loi quelconque, mais sans répétition, avec des termes de la série (4), *est elle-même absolument convergente.*

2° *Une série*

$$\text{(6)} \qquad v_1 + v_2 + \ldots + v_m + \ldots,$$

ayant pour termes les sommes de semblables séries partielles, est aussi absolument convergente, si ces séries partielles ont été formées successivement suivant une loi quelconque, mais sans répétition, c'est-à-dire si aucune d'elles ne contient un terme de (4) *figurant déjà dans quelqu'une des précédentes.*

3° *Si ces séries partielles, successivement formées sans répétition, le sont en outre sans omission, c'est-à-dire si chaque terme de la proposée* (4) *figure dans quelqu'une d'entre elles, la série* (6) *a même somme que la proposée.*

I. En désignant par υ_n le module de u_n, par Σ la somme de la série convergente

$$\upsilon_1 + \upsilon_2 + \ldots + \upsilon_n + \ldots, \tag{7}$$

par υ', υ'', ... les modules respectifs de u', u'', ..., par $\sigma^{(g)}$ la somme

$$\upsilon' + \upsilon'' + \ldots + \upsilon^{(g)},$$

enfin par G le plus élevé des rangs qu'occupent dans la série (7) les g termes de $\sigma^{(g)}$, on a évidemment

$$\sigma^{(g)} \leqq \upsilon_1 + \upsilon_2 + \ldots + \upsilon_G \leqq \Sigma.$$

La variante positive $\sigma^{(g)}$ reste dès lors constamment inférieure à quelque quantité fixe; comme, d'ailleurs, elle ne décroît jamais quand g augmente, elle tend vers une limite (n° 21, I, A), et la série formée avec les modules des termes de (5) est convergente.

II. Soient

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_m, \quad \ldots$$

les sommes des séries convergentes (I) formées avec les modules des termes élémentaires de

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_m, \quad \ldots. \tag{8}$$

Considérant les m premières d'entre ces séries de modules, désignons par

$$\sigma_1^{(n)}, \quad \sigma_2^{(n)}, \quad \ldots, \quad \sigma_m^{(n)}$$

les sommes de leurs n premiers termes, et par K le plus élevé des rangs qu'occupent dans la série (7) les mn termes de ces sommes.

On a évidemment

$$\sigma_1^{(n)}+\sigma_2^{(n)}+\ldots+\sigma_m^{(n)}\leqq \upsilon_1+\upsilon_2+\ldots+\upsilon_K\leqq\Sigma,$$

d'où l'on tire, en laissant m fixe et faisant croître n indéfiniment,

$$\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_m\leqq\Sigma.$$

La variante positive

$$\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_m,$$

restant toujours inférieure à quelque quantité fixe, et n'allant jamais en décroissant quand m augmente, tend vers quelque limite (n° 21, I, A); la série

$$\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_m+\ldots$$

est donc convergente, et, à plus forte raison (n° 21, II, 1°), la série

$$\operatorname{mod} v_1+\operatorname{mod} v_2+\ldots+\operatorname{mod} v_m+\ldots.$$

III. Les séries (8) ayant été formées sans omission (ni répétition), il s'agit de prouver que les deux variantes convergentes

$$v_1+v_2+\ldots+v_m,\quad u_1+u_2+\ldots+u_n$$

ont même limite. Pour cela, il suffit évidemment de faire voir que leur différence

$$(v_1+v_2+\ldots+v_m)-(u_1+u_2+\ldots+u_n),$$

variante aux deux indices m, n, tend vers zéro pour m et n à la fois infinis.

Désignons à cet effet par

$$s_1^{(\nu)},\quad s_2^{(\nu)},\quad \ldots,\quad s_\mu^{(\nu)}$$

les sommes des ν premiers termes dans les μ premières des séries (8); par

$$r_1^{(\nu)},\quad r_2^{(\nu)},\quad \ldots,\quad r_\mu^{(\nu)}$$

les restes correspondants; par

$$\varphi_1,\quad \varphi_2,\quad \ldots,$$

comme ci-dessus (II), les sommes des séries convergentes respectivement formées avec les modules des termes élémentaires de

$$v_1,\quad v_2,\quad \ldots;$$

par

(9) $$\rho_1^{(\nu)}, \quad \rho_2^{(\nu)}, \quad \ldots, \quad \rho_\mu^{(\nu)}$$

les restes des séries

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_\mu,$$

arrêtées chacune à leur terme de rang ν (n° 19); par Φ_μ le reste de la série convergente

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots,$$

(II), arrêtée à son terme de rang μ; et par Υ_N le reste de la série (7), arrêtée à son terme de rang N. Posons enfin

$$t_{\mu,\nu} = s_1^{(\nu)} + s_2^{(\nu)} + \ldots + s_\mu^{(\nu)}$$

et

$$\omega_{\mu,\nu} = \rho_1^{(\nu)} + \rho_2^{(\nu)} + \ldots + \rho_\mu^{(\nu)} + \Phi_\mu.$$

En nommant δ une quantité positive arbitraire, on peut évidemment trouver pour N quelque valeur particulière rendant Υ_N inférieur à $\frac{\delta}{2}$; puis, N étant fixé, trouver pour μ, ν quelque système de valeurs particulières, telles que les termes

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_N$$

figurent tous dans $t_{\mu,\nu}$; puis, en augmentant, si cela est nécessaire, l'entier μ sans changer ν, faire en sorte que Φ_μ soit inférieur à $\frac{\delta}{4}$; et enfin, en augmentant, si cela est nécessaire, l'entier ν sans changer μ, faire en sorte que chacune des μ quantités (9) soit inférieure à $\frac{\delta}{4\mu}$. En résumé donc, on peut attribuer aux entiers N, μ, ν des valeurs particulières telles : 1° que Υ_N soit $< \frac{\delta}{2}$; 2° que les termes

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_N$$

figurent tous dans $t_{\mu,\nu}$; 3° que Φ_μ soit $< \frac{\delta}{4}$; 4° que chacune des μ quantités (9) soit $< \frac{\delta}{4\mu}$. La réunion des deux dernières circonstances entraînera notamment

$$\omega_{\mu,\nu} < \frac{\delta}{2}.$$

Les trois entiers N, μ, ν étant ainsi fixés, les relations

$$v_1 = s_1^{(\nu)} + r_1^{(\nu)},$$
$$v_2 = s_2^{(\nu)} + r_2^{(\nu)},$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$
$$v_\mu = s_\mu^{(\nu)} + r_\mu^{(\nu)}$$

nous donnent, par addition membre à membre,

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_\mu = t_{\mu,\nu} + r_1^{(\nu)} + r_2^{(\nu)} + \ldots + r_\mu^{(\nu)};$$

on aura donc, pour $m \geqq \mu$,

$$(v_1 + v_2 + \ldots + v_m) - t_{\mu,\nu} = r_1^{(\nu)} + r_2^{(\nu)} + \ldots + r_\mu^{(\nu)} + v_{\mu+1} + \ldots + v_m,$$

d'où

$$\text{mod}(v_1 + v_2 + \ldots + v_m - t_{\mu,\nu}) \leqq \rho_1^{(\nu)} + \rho_2^{(\nu)} + \ldots + \rho_\mu^{(\nu)} + \Phi_\mu = \omega_{\mu,\nu},$$

et par conséquent

(10) $$\text{mod}(v_1 + v_2 + \ldots + v_m - t_{\mu,\nu}) < \frac{\delta}{2}.$$

On aura d'un autre côté, pour $n \geqq \text{N}$,

$$\text{mod}(u_1 + u_2 + \ldots + u_n - t_{\mu,\nu}) \leqq \Upsilon_{\text{N}},$$

car, les termes u_1, u_2, ..., u_{N} étant tous contenus dans $t_{\mu,\nu}$, la différence

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n - t_{\mu,\nu}$$

devient, après réduction, une somme algébrique de termes précédés soit du signe +, soit du signe —, mais dont les indices, tous distincts entre eux, sont supérieurs à N; on en déduit, pour $n \geqq \text{N}$,

(11) $$\text{mod}(u_1 + u_2 + \ldots + u_n - t_{\mu,\nu}) < \frac{\delta}{2}.$$

L'addition membre à membre des relations (10) et (11) donne, pour $m \geqq \mu$ et $n \geqq \text{N}$,

$$\text{mod}(v_1 + v_2 + \ldots + v_m - t_{\mu,\nu}) + \text{mod}(u_1 + u_2 + \ldots + u_n - t_{\mu,\nu}) < \delta,$$

et à plus forte raison

$$\text{mod}[(v_1 + v_2 + \ldots + v_m - t_{\mu,\nu}) - (u_1 + u_2 + \ldots + u_n - t_{\mu,\nu})] < \delta,$$

c'est-à-dire

$$\text{mod}[(v_1 + v_2 + \ldots + v_m) - (u_1 + u_2 + \ldots + u_n)] < \delta.$$

24. *Inversement, soit*

(12) $$v_1 + v_2 + \ldots + v_m + \ldots$$

une série dont les termes sont eux-mêmes les sommes des séries convergentes

(13) $$\begin{cases} u'_1 + u''_1 + \ldots, \\ u'_2 + u''_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u'_m + u''_m + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si les séries

(14) $$\begin{cases} \upsilon'_1 + \upsilon''_1 + \ldots, \\ \upsilon'_2 + \upsilon''_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \upsilon'_m + \upsilon''_m + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

formées par les modules des termes de (13), *sont convergentes, et si, de plus, leurs sommes*

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_m, \quad \ldots$$

forment elles-mêmes une série convergente

(15) $$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_m + \ldots,$$

une série

(16) $$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

formée d'une manière quelconque, mais sans répétition ni omission, avec les termes élémentaires des séries partielles (13), *est, ainsi que la proposée* (12), *absolument convergente, et ces deux séries,* (12), (16), *ont la même somme.*

Effectivement, soit

(17) $$\upsilon_1 + \upsilon_2 + \ldots + \upsilon_n + \ldots$$

la série formée avec les modules des termes de (16). Si l'on donne à n une valeur particulière quelconque, et à m une autre suffisamment

grande pour que chaque terme de

$$\Sigma_n = \upsilon_1 + \upsilon_2 + \ldots + \upsilon_n$$

se trouve contenu dans quelqu'une des m premières séries (14), on a évidemment

$$\Sigma_n \leqq \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_m \leqq \Omega,$$

où Ω désigne la somme de la série (15). La variante positive Σ_n restant ainsi constamment inférieure à quelque quantité fixe, et n'allant d'ailleurs jamais en décroissant quand n augmente, tend vers une limite; en d'autres termes, la série (17) est convergente, et la série (16) absolument convergente.

Cela posé, il suffit, pour achever la démonstration, d'appliquer la proposition du n° 23 aux séries (12) et (16), dont la première s'obtient par le déplacement et le groupement, sans omission ni répétition, des termes de la seconde.

25. *Quand plusieurs séries (en nombre limité),*

$$\begin{aligned} \Sigma u_m &= u_1 + u_2 + \ldots, \\ \Sigma v_n &= v_1 + v_2 + \ldots, \\ \Sigma w_p &= w_1 + w_2 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

sont absolument convergentes, la série $(\Sigma u_m v_n w_p \ldots)$, *formée, comme dans une multiplication de polynomes, avec les produits partiels de leurs termes, est elle-même absolument convergente, et a pour somme le produit des sommes des proposées,* en sorte que l'on a, comme s'il s'agissait effectivement de polynomes,

$$\Sigma(u_m v_n w_p \ldots) = \Sigma u_m \times \Sigma v_n \times \Sigma w_p \times \ldots.$$

I. La proposition est exacte dans le cas où les séries données sont en nombre égal à 2.

Désignons par Σu_m, Σv_n les deux séries proposées, par $\Sigma \upsilon_m$, $\Sigma \varphi_n$ les séries (convergentes) formées avec les modules de leurs termes, et considérons la série $\Sigma \upsilon_m \varphi_n$. Les termes de cette dernière étant écrits à la suite les uns des autres suivant une loi déterminée (quelconque d'ailleurs), désignons par σ_g la somme de ses g premiers termes, et par k la plus grande valeur que puisse atteindre dans

ceux-ci la somme des indices des deux facteurs. Comme chacun des termes en question figure dans le développement du produit

$$\varpi_{k-1} = (\upsilon_1 + \upsilon_2 + \ldots + \upsilon_{k-1})(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_{k-1}),$$

on a évidemment

$$\sigma_g \leqq \varpi_{k-1},$$

et à plus forte raison

$$\sigma_g \leqq \Sigma \upsilon_m \times \Sigma \varphi_n.$$

La variante positive σ_g, restant ainsi constamment inférieure à une quantité fixe, et n'allant jamais en décroissant quand g augmente, tend vers une limite; en d'autres termes, la série $\Sigma \upsilon_m \varphi_n$ est convergente.

Observons maintenant que les termes de cette dernière sont précisément les modules de ceux de la série $\Sigma u_m v_n$, qui, dès lors, est absolument convergente, et dont on peut, en vertu du n° 23, ordonner et grouper les termes suivant une loi arbitraire. On peut, notamment, répartir ces termes en groupes successifs d'après la valeur qu'y possède l'indice m du facteur u_m, et transformer la série

$$\Sigma u_m v_n$$

en une autre ayant pour termes les sommes des séries partielles

$$\begin{array}{l} u_1 v_1 + u_1 v_2 + u_1 v_3 + \ldots, \\ u_2 v_1 + u_2 v_2 + u_2 v_3 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ u_m v_1 + u_m v_2 + u_m v_3 + \ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

on trouve ainsi qu'elle a pour somme

$$u_1 \Sigma v_n + u_2 \Sigma v_n + \ldots + u_m \Sigma v_n + \ldots$$

(n° 20, IV), c'est-à-dire

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_m + \ldots) \times \Sigma v_n,$$

ou enfin

$$\Sigma u_m \times \Sigma v_n.$$

II. Supposons maintenant que les séries proposées soient en nombre égal à 3, et désignons-les par

$$\Sigma u_m, \quad \Sigma v_n, \quad \Sigma w_p.$$

Pour avoir les divers produits partiels $u_m v_n w_p$, on peut, faisant d'abord abstraction de la dernière série, former les divers produits partiels $u_m v_n$, puis les multiplier par les divers termes w_p. Or, en vertu du cas déjà examiné, la série

$$\Sigma u_m v_n,$$

provenant de la première partie de l'opération, est absolument convergente et a pour somme

$$\Sigma u_m \times \Sigma v_n;$$

cela étant, et pour la même raison, la série

$$\Sigma u_m v_n w_p,$$

provenant de la seconde partie de l'opération, est absolument convergente et a pour somme

$$\Sigma u_m v_n \times \Sigma w_p,$$

c'est-à-dire

$$\Sigma u_m \times \Sigma v_n \times \Sigma w_p.$$

On passera de même du cas de trois facteurs au cas de quatre, et ainsi de suite, quel que soit le nombre des facteurs.

Il va sans dire que cette importante proposition s'applique à la formation, non seulement du produit des séries (absolument convergentes) données, mais encore de leurs puissances entières et d'un produit quelconque de semblables puissances.

26. En combinant la proposition précédente avec celle qui se trouve formulée dans l'alinéa IV du n° 20, on voit que, *si des séries données sont absolument convergentes, toute expression entière par rapport à leurs sommes se développe, exactement comme si les séries en question se réduisaient à de simples polynomes, en une autre qui est elle-même absolument convergente.*

Séries entières; domaines de convergence [1].

27. Une série ayant pour termes des monomes entiers, tous *dissemblables*, en $x, y, z, \ldots$, est dite *entière* par rapport à ces va-

(1) *Voir* la Préface, alinéa V.

riables. Ainsi

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

est une série entière en x;

$$a_{m,n} x^m y^n$$

est le terme général d'une série entière en x et y,

$$a_{m,n,p} x^m y^n z^p$$

le terme général d'une série entière en x, y et z : dans ces expressions, a_m, $a_{m,n}$, $a_{m,n,p}$ désignent des constantes dont la valeur dépend de celles qu'on attribue à leurs indices. Quant à l'ordre de succession des termes, qu'on peut faire varier à l'infini, il est, comme on le verra, indifférent, dans les circonstances générales où nous aurons à considérer les séries entières.

Dans une série de cette espèce, nous qualifierons parfois d'*effectifs* les termes à coefficient non nul. Un polynome entier n'est ainsi autre chose qu'une série entière contenant un nombre limité de termes effectifs, et le degré (ou degré effectif) de ce polynome est le plus haut degré des termes dont il s'agit.

28. La plus simple des séries entières est celle dont tous les coefficients sont égaux à 1, ou

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} \Sigma(x^m y^n z^p \ldots) = 1 + x + y + z + \ldots + x^2 + y^2 + z^2 \\ + xy + xz + yz + \ldots + x^3 + \ldots; \end{aligned} \right.$$

dans le cas d'une seule variable x, elle se réduit à la progression géométrique

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \quad (^1).$$

Ses propriétés, sur lesquelles nous aurons bientôt à nous appuyer, se résument dans l'énoncé suivant :

La série (1) *est absolument convergente quand on attribue aux variables* $x, y, z, \ldots$ *des valeurs dont les modules* $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ *soient tous inférieurs à* 1, *et elle a alors pour somme*

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)\ldots}.$$

---

(1) M. Méray la nomme, dans le cas général, une *progression géométrique à plusieurs raisons* (*Leçons nouvelles*, etc., 1re Partie, p. 79).

Elle diverge dans tous les autres cas, quel que soit l'ordre des termes.

Le dernier point s'aperçoit immédiatement : car, si le module de x, par exemple, est égal ou supérieur à 1, celui de x^m l'est aussi, et le terme général ne tend pas vers zéro (n° 20, II).

Si, au contraire, on a à la fois

$$\xi < 1, \quad \eta < 1, \quad \zeta < 1, \quad \ldots,$$

$x^m, y^m, z^m, \ldots$ tendent vers zéro pour m infini, et il en résulte que les diverses séries

$$(2) \qquad \begin{cases} 1 + x + x^2 + \ldots, \\ 1 + y + y^2 + \ldots, \\ 1 + z + z^2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

sont convergentes et ont pour sommes respectives

$$\frac{1}{1-x}, \quad \frac{1}{1-y}, \quad \frac{1}{1-z}, \quad \ldots :$$

car, dans la première, par exemple, la somme des m premiers termes, égale à

$$\frac{1-x^m}{1-x} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{1-x} - \frac{x^m}{1-x},$$

a pour limite $\frac{1}{1-x}$. Les séries (2) sont d'ailleurs absolument convergentes, car la série

$$1 + \xi + \xi^2 + \ldots.$$

par exemple, se déduit de

$$1 + x + x^2 + \ldots,$$

en attribuant à x la valeur ξ, qui est à elle-même son module, et elle converge, par suite, lorsque ce module est < 1 : on est donc en droit d'appliquer aux séries (2) le théorème du n° 25, relatif à la multiplication, et l'on en déduit immédiatement celui dont nous nous occupons.

29. *Si, pour certaines valeurs,*

$$(3) \qquad X, \quad Y, \quad Z, \quad \ldots,$$

toutes différentes de zéro, des variables $x, y, z, \ldots$, *le terme général de la série entière*

(4) $$\Sigma a_{m,n,p\ldots} x^m y^n z^p \ldots$$

a, quels que soient $m, n, p, \ldots$, *un module constamment inférieur à quelque quantité fixe* [et à plus forte raison (n° 20, II) si cette série, convenablement ordonnée, est convergente pour les valeurs (3)], *elle est absolument convergente pour tout système de valeurs de* $x, y, z, \ldots$ *satisfaisant aux relations*

(5) $$\operatorname{mod} x < \operatorname{mod} X, \quad \operatorname{mod} y < \operatorname{mod} Y, \quad \operatorname{mod} z < \operatorname{mod} Z, \quad \ldots,$$

I. *Quand une série,*

(6) $$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

est absolument convergente, la série

(7) $$u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n + \ldots,$$

obtenue en multipliant les termes de la première par des quantités $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ *dont les modules soient tous inférieurs à quelque quantité fixe, est elle-même absolument convergente.*

Car, en désignant par M cette quantité fixe, par $\Sigma_{n,p}$ la somme des p termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$ dans la série formée par les modules des termes de (6), et par $\Omega_{n,p}$ la somme analogue dans la série formée par les modules des termes de (7), on a évidemment

$$\Omega_{n,p} \leqq M \Sigma_{n,p}$$

(n° 20, I, 1°).

II. En vertu des inégalités (5), les quotients

$$\frac{x}{X}, \quad \frac{y}{Y}, \quad \frac{z}{Z}, \quad \ldots$$

ont tous des modules < 1, et il en résulte (n° 28) que la série

(8) $$\sum \left(\frac{x}{X}\right)^m \left(\frac{y}{Y}\right)^n \left(\frac{z}{Z}\right)^p \ldots,$$

entière par rapport à ces quotients et ayant tous ses coefficients égaux à 1, est absolument convergente. D'autre part, le module de la quantité

(9) $$a_{m,n,p\ldots} X^m Y^n Z^p \ldots$$

reste, en vertu de l'hypothèse, constamment inférieur à quelque nombre positif fixe. Cela étant, comme le terme général de la série proposée (4) s'obtient en multipliant par la quantité (9) le terme général de la série (8), la série (4) est, comme cette dernière, absolument convergente (I).

30. Nous nommerons *domaine* toute région définie par un système de relations de la forme

$$\bmod(x-x_0)<R_x, \qquad \bmod(y-y_0)<R_y, \qquad \bmod(z-z_0)<R_z, \qquad \ldots,$$

où $(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ désigne un point fixe et R_x, R_y, R_z, ... des constantes positives (>0); ces constantes seront elles-mêmes les *rayons* du domaine, le point $(x_0, y_0, z_0, \ldots)$ en sera le *centre* [1].

---

[1] Si l'on suppose les variables réelles, l'ensemble des valeurs de x qui satisfont à la relation

$$\bmod(x-x_0)<R_x$$

se trouve graphiquement représenté, sur un axe indéfini Ox, par l'*intérieur d'un segment* ayant pour extrémités les deux points qui correspondent aux valeurs

$$x_0-R_x, \quad x_0+R_x$$

(on doit faire abstraction des deux points extrêmes); car l'inégalité dont il s'agit équivaut à l'ensemble des deux suivantes :

$$x-x_0<R_x, \qquad x-x_0>-R_x,$$

c'est-à-dire à

$$x_0-R_x<x<x_0+R_x.$$

Si l'on suppose les variables imaginaires, l'ensemble des valeurs de x qui satisfont à la même inégalité $\bmod(x-x_0)<R_x$ se trouve graphiquement représenté, relativement à deux axes rectangulaires tracés dans un plan, par l'*intérieur d'un cercle* ayant pour rayon R_x et pour centre le point qui correspond à la valeur x_0 (on doit faire abstraction des points de la circonférence) : car, en mettant en évidence les deux éléments de la variable imaginaire, et posant

$$x=x'+ix'', \qquad x_0=x'_0+ix''_0,$$

l'inégalité peut s'écrire

$$(x'-x'_0)^2+(x''-x''_0)^2<R_x^2.$$

Observons en outre que, dans le cas où les variables sont réelles, la relation

$$\bmod(x-x_0)<R_x$$

est, ainsi que nous venons de le constater, de la forme

$$a_0<x<A,$$

Cela étant, la proposition du numéro précédent peut encore s'énoncer comme il suit :

Considérons un domaine ayant pour centre le point (o, o, o, ...) : *si, pour quelque système de valeurs de x, y, z, ... ayant respectivement pour modules les rayons du domaine, la série* (4), *convenablement ordonnée, est convergente, ou même seulement, si son terme général conserve un module constamment inférieur à quelque quantité fixe, elle est absolument convergente dans toute l'étendue du domaine.*

Nous nommerons *domaine de convergence* de la série entière (4) tout domaine ayant pour centre (o, o, o, ...) et dans l'intérieur duquel la série en question soit convergente; elle ne peut manquer d'ailleurs, en vertu de ce qui précède, d'y être absolument convergente. Les rayons d'un pareil domaine se nommeront *rayons de convergence;* pour la série (1), par exemple, des quantités positives toutes égales ou inférieures à 1 constituent un système de rayons de convergence.

31. Il est toujours sous-entendu, lorsqu'il s'agit d'une série entière, que les valeurs attribuées aux variables dont elle dépend sont intérieures à quelque domaine de convergence. Cela étant, voici les premières conséquences à tirer de ce qui précède :

1° *Dans toute l'étendue d'un domaine de convergence,* $\mathfrak{D}$, *de la série entière* (4), *la somme de cette série, indépendante de l'ordre et du groupement de ses termes* (n° 23), *définit une fonction de x, y, z, ...*

2° *Des termes pris à volonté dans la série* (4) *forment une nouvelle série entière, absolument convergente dans le domaine* $\mathfrak{D}$ (n° 23).

3° *Si tous les termes effectifs* (n° 27) *de la série entière* (4)

---

et que, réciproquement, cette dernière relation peut s'écrire

$$a_0 - \frac{a_0 + A}{2} < x - \frac{a_0 + A}{2} < A - \frac{a_0 + A}{2} \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{mod}\left(x - \frac{a_0 + A}{2}\right) < \frac{A - a_0}{2},$$

c'est-à-dire qu'elle est de la forme

$$\operatorname{mod}(x - x_0) < R_x.$$

sont divisibles par un même monome entier, $x^{\mu} y^{\nu} z^{\varpi} \ldots$, *les quotients de ces divisions forment une nouvelle série entière, absolument convergente dans le domaine* $\mathfrak{D}$, *et dont la somme, multipliée par* $x^{\mu} y^{\nu} z^{\varpi} \ldots$, *reproduit celle de la proposée.*

4° *On peut donc ordonner la série* (4), *exactement comme un polynome entier, par rapport à tel groupe partiel de ses variables qu'on voudra; les coefficients des puissances et produits de puissances des variables dont il s'agit sont alors des séries entières par rapport aux autres variables, admettant comme rayons de convergence ceux des rayons du domaine* $\mathfrak{D}$ *qui se rapportent à ces autres variables.*

32. Quand une série entière admet quelque domaine de convergence, il est clair qu'on en obtient une infinité d'autres en diminuant arbitrairement quelques-uns des rayons (sans augmenter les autres) : mais, à part cette observation évidente, on ne peut rien dire de général sur les domaines de convergence que peut admettre une série entière.

Quelquefois [c'est le cas de la série (1)], les rayons *maximums* sont déterminés individuellement pour chaque variable; plus souvent, ils ne le sont pas, et, par exemple, on peut en augmenter quelques-uns à condition de diminuer les autres.

Le cas d'une seule variable, très important dans l'étude des fonctions, donne lieu toutefois au théorème suivant :

Quand une série entière ne dépend que d'une seule variable, ou bien elle admet comme rayon de convergence une quantité positive arbitraire, ou bien elle n'en admet aucune, ou bien enfin elle admet un rayon de convergence maximum.

Effectivement, en supposant qu'on ne se trouve placé dans aucun des deux premiers cas, on pourra assigner deux quantités positives r, R, dont la première soit rayon de convergence, et dont la seconde, nécessairement supérieure à la première (n° 29), ne jouisse pas de cette propriété. Si l'on divise alors en deux parties égales l'intervalle de r à R, il y aura un de ces intervalles partiels, et un seul, dont la valeur initiale, r_1, sera rayon de convergence, tandis que la valeur finale, R_1, ne le sera pas. Si l'on divise à son tour en deux parties égales l'intervalle de r_1 à R_1, il y aura encore un de ces nouveaux

intervalles partiels, et un seul, dont la valeur initiale, r_2, sera rayon de convergence, tandis que la valeur finale, R_2, ne le sera pas. Et ainsi de suite indéfiniment. On formera de cette manière une succession illimitée d'intervalles,

$$r \text{ à } R, \quad r_1 \text{ à } R_1, \quad r_2 \text{ à } R_2, \quad \ldots, \quad r_k \text{ à } R_k, \quad \ldots,$$

jouissant de la triple propriété : 1° que chacun d'eux soit contenu dans le précédent; 2° que la différence $R_k - r_k$, égale à $\frac{R-r}{2^k}$, soit infiniment petite pour k infini; 3° que la valeur initiale d'un intervalle quelconque soit rayon de convergence de la série, mais non sa valeur finale.

Cela étant :

1° Les variantes r_k, R_k tendent vers une limite commune, ρ, supérieure à zéro (n° 9, III).

2° La série proposée admet comme rayon de convergence la quantité ρ, c'est-à-dire qu'elle est absolument convergente pour toute valeur de x dont le module ξ tombe au-dessous de ρ : car le rayon de convergence r_k, qui tend vers ρ, finit par surpasser ξ.

3° La série proposée n'admet aucun rayon de convergence supérieur à ρ : car, si un pareil rayon, P, existait, R_k, qui tend vers ρ, finirait par être inférieur à P, et dès lors, contrairement à ce qui précède, par être lui-même rayon de convergence.

Il va sans dire que, pour toute valeur de x dont le module surpasse le rayon de convergence maximum ρ, la série proposée diverge quel que soit l'ordre des termes : car si cette série, convenablement ordonnée, était alors convergente, elle admettrait, en vertu du n° 29, un rayon de convergence supérieur à ρ. Quant aux propriétés de la série pour les valeurs de x de module ρ, elles sont essentiellement variables avec la série que l'on considère.

Enfin, lorsque la série proposée n'admet aucun rayon de convergence, elle diverge, quel que soit l'ordre des termes, pour toute valeur de x non nulle [1].

---

[1] Les exemples suivants de séries entières à une variable correspondent respectivement aux trois cas de notre énoncé.

La série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

est absolument convergente pour toute valeur de x : car, dans la série formée par

Séries entières; substitution, à chaque variable indépendante, d'une somme de quelques autres.

33. *Dans la série entière*

(1) $$f(x, y, \ldots) = \Sigma a_{m,n,\ldots} x^m y^n \ldots,$$

---

les modules de ses termes, le rapport des termes de rangs $n+1$, n a pour valeur $\frac{\operatorname{mod} x}{n}$, et, dès lors, tend vers zéro pour n infini (n° 21, III).

La série

(a) $$1 + 1^1 x + 2^2 x^2 + \ldots + n^n x^n + \ldots$$

diverge, quel que soit l'ordre des termes, pour toute valeur de x non nulle. En effet, si cette série, convenablement ordonnée, convergeait pour quelque valeur de x de module $\xi > 0$, elle convergerait, quel que fût l'ordre de ses termes, pour toute valeur de x de module compris entre 0 et ξ (n° 29) : or, dans la série (a), le rapport des termes de rangs $n+1$, n a pour module la quantité

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} n \qquad (\operatorname{mod} x),$$

qui finit par surpasser 1, quelque valeur différente de zéro qu'on donne à x; le terme général de (a) ne tend donc pas vers zéro, puisque son module finit par croître sans cesse.

Enfin, la série

(b) $$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

a pour rayon de convergence maximum l'unité. Effectivement, le rapport des termes de rangs $n+1$, n a pour module la quantité

$$\frac{n}{n+1} \qquad (\operatorname{mod} x),$$

qui, pour n infini, tend vers $\operatorname{mod} x$. Si donc le module de x est < 1, la série formée par les modules des termes de (b) est convergente (n° 21, III). Au contraire, lorsqu'on attribue à x une valeur dont le module ξ soit supérieur à 1, la série (b) diverge, quel que soit l'ordre des termes; car, si cette série, convenablement ordonnée, était alors convergente, elle le serait, quel que fût l'ordre de ses termes, pour toute valeur de x de module moindre qne ξ (n° 29), et, notamment, pour toute valeur de x de module > 1 et $< \xi$: or, dans (b), le rapport d'un terme au précédent a pour valeur, comme nous l'avons dit, la quantité

$$\frac{n}{n+1} \qquad (\operatorname{mod} x),$$

qui, dans l'hypothèse actuelle,

$$1 < \operatorname{mod} x < \xi,$$

finit par surpasser l'unité; le terme général de (b) ne tend donc pas vers zéro, puisque son module finit par croître sans cesse.

admettant comme rayons de convergence les constantes positives

(2) $$R_x, \quad R_y, \quad \ldots,$$

substituons à $x, y, \ldots$ *les sommes respectives*

(3) $$x' + x'' + \ldots, \qquad y' + y'' + \ldots, \qquad \ldots,$$

où

(4) $$x', \quad x'', \quad \ldots, \quad y', \quad y'', \quad \ldots, \quad \ldots$$

désignent de nouvelles variables en nombres déterminés quelconques; soient, en outre,

(5) $$R_{x'}, \quad R_{x''}, \quad \ldots, \quad R_{y'}, \quad R_{y''}, \quad \ldots, \quad \ldots$$

des constantes positives, en nombres respectivement égaux, vérifiant les relations

(6) $$R_{x'} + R_{x''} + \ldots = R_x, \qquad R_{y'} + R_{y''} + \ldots = R_y, \qquad \ldots.$$

Cela étant, pour toutes les valeurs des nouvelles variables (4) *de modules respectivement inférieurs aux constantes positives* (5), *la quantité*

(7) $$f(x' + x'' + \ldots, y' + y'' + \ldots, \ldots)$$

peut s'exprimer à l'aide d'une deuxième série, entière par rapport aux nouvelles variables (4), *et admettant les rayons de convergence* (5).

Nous commencerons par observer que, si l'on développe, par les règles du calcul algébrique élémentaire, l'expression

(8) $$a_{m,n,\ldots}(x' + x'' + \ldots)^m (y' + y'' + \ldots)^n \ldots,$$

ce qui donne, toutes réductions faites, un polynome entier par rapport aux variables (4), la somme des modules des termes de ce polynome est égale à

(9) $$\alpha_{m,n,\ldots}(\xi' + \xi'' + \ldots)^m (\eta' + \eta'' + \ldots)^n \ldots,$$

où $\alpha_{m,n,\ldots}$, ξ', ξ'', $\ldots$, η', η'', $\ldots$, $\ldots$ désignent les modules respectifs de $a_{m,n,\ldots}$, x', x'', $\ldots$, y', y'', $\ldots$, $\ldots$.

Cela posé, quand les modules ξ', ξ'', $\ldots$, η', η'', $\ldots$, $\ldots$ des va-

riables (4) sont respectivement inférieurs aux quantités (5), les égalités (6) montrent que leurs sommes

$$(10) \qquad (\xi' + \xi'' + \ldots), \quad (\eta' + \eta'' + \ldots), \quad \ldots,$$

et à plus forte raison les modules des sommes (3), sont inférieurs aux quantités (2), rayons de convergence de la série (1) : on peut donc, en pareil cas, donner aux variables $x, y, \ldots$ de la série (1) des valeurs égales à ces sommes (3). En d'autres termes, si l'on nomme

$$(11) \qquad u_{m,n,\ldots}, \quad v_{m,n,\ldots}, \quad \ldots, \quad w_{m,n,\ldots}$$

les monomes entiers, dissemblables en $x', x'', \ldots, y', y'', \ldots, \ldots$, qui résultent du développement de l'expression (8), la série qui a pour terme général le polynome

$$(12) \qquad (u_{m,n,\ldots} + v_{m,n,\ldots} + \ldots + w_{m,n,\ldots})$$

est convergente, et sa somme peut se désigner par la notation (7).

Mais il y a plus, et la convergence subsiste lorsqu'on remplace dans la série en question chacun des polynomes tels que (12) par la somme des modules de ses termes : car cette somme de modules est égale, ainsi que nous l'avons observé, à l'expression (9), c'est-à-dire à la valeur que prend le module du terme général de la série proposée (1), lorsque, dans cette dernière, on attribue aux variables $x, y, \ldots$ les valeurs positives (10), inférieures aux rayons de convergence (2). On peut donc appliquer le théorème du n° 24 à la série qui a pour terme général le polynome (12), et la remplacer par une autre ayant pour termes, non plus les sommes des polynomes, mais tous les monomes tels que (11) qui constituent les termes élémentaires des polynomes. La série (absolument convergente) qui en résulte, série évidemment entière par rapport aux variables (4), a ainsi une somme égale à l'expression (7); et, de plus, elle admet bien les rayons de convergence (5), puisque les valeurs attribuées aux variables (4) ont des modules arbitrairement choisis au-dessous de ces rayons.

Continuité de la somme d'une série entière.

34. *La somme d'une série entière, considérée à l'intérieur d'un domaine de convergence* (n° 30), *est une fonction continue des variables.*

1. *Si l'on désigne par* $\mathfrak{D}$ *un domaine de convergence de la série entière*

(1) $$f(x, y, \ldots) = \Sigma a_{m,n,\ldots} x^m y^n \ldots,$$

et par $\mathfrak{D}'$ *un domaine concentrique dont les rayons soient respectivement inférieurs à ceux du précédent, on peut, un nombre positif* ε *étant donné, assigner un nombre positif* θ *tel, que les relations*

(2) $$\operatorname{mod}(x_1 - x_2) < \theta, \qquad \operatorname{mod}(y_1 - y_2) < \theta, \qquad \ldots,$$

supposées vérifiées pour deux points, $(x_1, y_1, \ldots)$, $(x_2, y_2, \ldots)$, *du domaine* $\mathfrak{D}'$, *entraînent comme conséquence nécessaire la relation*

(3) $$\operatorname{mod}[f(x_1, y_1, \ldots) - f(x_2, y_2, \ldots)] < \varepsilon.$$

A. Le point à établir est exact si $f(x, y, \ldots)$ se réduit à un polynome entier.

Choisissons arbitrairement, comme il est permis de le faire en pareil cas, les rayons R'_x, R'_y, ... du domaine $\mathfrak{D}'$: ce dernier se trouve alors représenté par l'ensemble des relations

$$\operatorname{mod} x < R'_x, \qquad \operatorname{mod} y < R'_y, \qquad \ldots.$$

Cela étant, considérons pour un instant, au lieu du domaine $\mathfrak{D}'$, la région *limitée et complète* (nos 4 et 5)

(4) $$\operatorname{mod} x \leqq R'_x, \qquad \operatorname{mod} y \leqq R'_y, \qquad \ldots,$$

qui contient $\mathfrak{D}'$. En vertu de la continuité des polynomes entiers (n° 18, 1), on peut, un nombre positif ε étant donné, assigner un nombre positif θ tel, que les relations simultanées (2), supposées vérifiées pour deux points de la région (4), entraînent comme conséquence nécessaire la relation (3) (n° 17, 4°) : à plus forte raison ces mêmes relations (2), supposées vérifiées pour deux points du domaine $\mathfrak{D}'$, entraîneront-elles la relation (3).

B. Le point à démontrer est exact si la série proposée $f(x, y, \ldots)$ contient un nombre illimité de termes effectifs (n° 27).

Désignons en effet par $\alpha_{m,n,\ldots}$ le module de $a_{m,n,\ldots}$, par R'_x, R'_y, ... les rayons du domaine $\mathfrak{D}'$, et ordonnons la série (1) suivant

une loi quelconque. Pour toutes valeurs de $x, y, \ldots$ intérieures au domaine $\mathfrak{D}'$, le module du terme général est inférieur à

(5) $$\alpha_{m,n,\ldots} R_x'^m R_y'^n \ldots.$$

D'autre part, dans la série convergente qui a pour terme général cette dernière quantité (5), la somme des termes qui suivent celui de rang N est, pour N suffisamment grand, inférieur à $\frac{\varepsilon}{3}$. Nous donnerons à l'entier N une valeur particulière qui satisfasse à cette condition, et, désignant alors par $\varphi_N(x, y, \ldots)$ la somme des N premiers termes de la série proposée, puis par $\psi_N(x, y, \ldots)$ le reste correspondant, nous aurons

$$f(x, y, \ldots) = \varphi_N(x, y, \ldots) + \psi_N(x, y, \ldots),$$

et, en particulier,

$$f(x_1, y_1, \ldots) = \varphi_N(x_1, y_1, \ldots) + \psi_N(x_1, y_1, \ldots),$$
$$f(x_2, y_2, \ldots) = \varphi_N(x_2, y_2, \ldots) + \psi_N(x_2, y_2, \ldots),$$

d'où

$$f(x_1, y_1, \ldots) - f(x_2, y_2, \ldots) = [\varphi_N(x_1, y_1, \ldots) - \varphi_N(x_2, y_2, \ldots)] + \psi_N(x_1, y_1, \ldots) - \psi_N(x_2, y_2, \ldots),$$

et, par suite,

(6) $$\left\{ \begin{aligned} &\operatorname{mod}[f(x_1, y_1, \ldots) - f(x_2, y_2, \ldots)] \\ &\quad \leqq \operatorname{mod}[\varphi_N(x_1, y_1, \ldots) - \varphi_N(x_2, y_2, \ldots)] \\ &\quad\quad + \operatorname{mod}\psi_N(x_1, y_1, \ldots) + \operatorname{mod}\psi_N(x_2, y_2, \ldots). \end{aligned} \right.$$

Or, il résulte de la manière même dont on a fixé l'entier N que, pour tout point $(x, y, \ldots)$ intérieur au domaine $\mathfrak{D}'$, la série déduite de $\psi_N(x, y, \ldots)$ par la substitution à chaque terme de son module a une somme moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$, et qu'à plus forte raison $\psi_N(x, y, \ldots)$ a un module moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$. On a donc, quels que soient $(x_1, y_1, \ldots)$ et $(x_2, y_2, \ldots)$ à l'intérieur de $\mathfrak{D}'$,

(7) $$\operatorname{mod}\psi_N(x_1, y_1, \ldots) < \frac{\varepsilon}{3},$$

(8) $$\operatorname{mod}\psi_N(x_2, y_2, \ldots) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'un autre côté, $\varphi_N(x, y, \ldots)$ étant un polynome entier, il existe,

d'après A, un nombre positif θ tel, que les relations simultanées

$$\operatorname{mod}(x_1 - x_2) < \theta, \qquad \operatorname{mod}(y_1 - y_2) < \theta, \qquad \ldots,$$

supposées vérifiées pour deux points du domaine $\mathfrak{D}'$, entraînent comme conséquence nécessaire

$$\operatorname{mod}[\varphi_N(x_1, y_1, \ldots) - \varphi_N(x_2, y_2, \ldots)] < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{9}$$

Cela étant, l'addition membre à membre des relations (6), (7), (8), (9) donne immédiatement

$$\operatorname{mod}[f(x_1, y_1, \ldots) - f(x_2, y_2, \ldots)] < \varepsilon.$$

II. Revenant à notre énoncé général, désignons par $\mathfrak{D}$ un domaine de convergence de la série entière proposée; par R_x, R_y, ... les rayons de ce domaine; par $(x_0, y_0, \ldots)$ un point particulier (quelconque) du domaine, tel, par conséquent, que les modules de x_0, y_0, ... soient respectivement *inférieurs* à R_x, R_y, ...; enfin, par R'_x, R'_y, ... des quantités positives satisfaisant aux relations

$$\begin{gathered}\operatorname{mod} x_0 < R'_x < R_x, \\ \operatorname{mod} y_0 < R'_y < R_y, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{gathered}$$

et par $\mathfrak{D}'$ le domaine, concentrique à $\mathfrak{D}$, de rayons R'_x, R'_y, ... Il résulte évidemment de ces relations que le point $(x_0, y_0, \ldots)$ est intérieur au domaine $\mathfrak{D}'$.

Cela étant, si l'on assujettit les variables $x, y, \ldots$ à vérifier les relations

$$\begin{gathered}\operatorname{mod}(x - x_0) < R'_x - \operatorname{mod} x_0, \\ \operatorname{mod}(y - y_0) < R'_y - \operatorname{mod} y_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{gathered}$$

qui peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{gathered}\operatorname{mod}(x - x_0) + \operatorname{mod} x_0 < R'_x, \\ \operatorname{mod}(y - y_0) + \operatorname{mod} y_0 < R'_y, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{gathered}$$

on aura, à plus forte raison,

$$\operatorname{mod} x < R'_x, \qquad \operatorname{mod} y < R'_y, \qquad \ldots,$$

c'est-à-dire que le point $(x, y, \ldots)$ sera nécessairement intérieur au

domaine $\mathfrak{D}'$: on pourra alors (I), un nombre positif ε étant donné, trouver, au-dessous des différences positives

$$R'_x - \operatorname{mod} x_0, \qquad R'_y - \operatorname{mod} y_0, \qquad \ldots,$$

un nombre positif θ tel, que les relations simultanées

$$\operatorname{mod}(x - x_0) < \theta, \qquad \operatorname{mod}(y - y_0) < \theta, \qquad \ldots$$

entraînent comme conséquence nécessaire

$$\operatorname{mod}[f(x, y, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)] < \varepsilon.$$

Conditions pour que la somme d'une série entière soit nulle identiquement, pour que celles de deux séries entières soient égales identiquement.

35. *Pour que la somme d'une série entière, admettant quelque domaine de convergence, y soit nulle indépendamment des valeurs attribuées aux variables, il faut et il suffit que les coefficients de cette série soient tous nuls.*

La condition est évidemment suffisante, et il nous reste à en établir la nécessité.

I. *Si, dans une série entière en x,*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

admettant quelque domaine de convergence, le premier coefficient a_0 est différent de zéro, le module de la somme reste différent de zéro pour toutes valeurs de x de module suffisamment petit.

Effectivement, le premier coefficient a_0 est la valeur particulière que prend la somme de la série pour $x = 0$; si donc on désigne par α_0 le module (non nul) de a_0, et par ε une quantité positive choisie comme on voudra au-dessous de α_0, on peut (n° 34) assigner un nombre positif θ tel, que la relation

$$\operatorname{mod}(x - 0) < \theta \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{mod} x < \theta$$

entraîne comme conséquence nécessaire

$$\operatorname{mod}[f(x) - f(0)] < \alpha_0 - \varepsilon$$

ou

$$\operatorname{mod}[f(x) - a_0] < \alpha_0 - \varepsilon,$$

et à plus forte raison

$$\alpha_0 - \operatorname{mod} f(x) < \alpha_0 - \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{mod} f(x) > \varepsilon.$$

II. *Si une série entière en x,*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

admet quelque domaine de convergence, et si l'équation $f(x) = 0$ possède une infinité de racines à l'intérieur d'un domaine de petitesse arbitraire ayant pour centre le point zéro, les coefficients de la série sont tous nuls.

Effectivement, il résulte de l'alinéa I que a_0 est nul et que $f(x)$ peut (n° 31, 3°) s'écrire sous la forme

$$x(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots).$$

Le premier facteur de ce produit ne s'annulant que pour $x = 0$, le second s'annule une infinité de fois dans l'intérieur d'un domaine de petitesse arbitraire ayant pour centre le point zéro; il a donc, comme tout à l'heure $f(x)$, son premier coefficient nul, et peut s'écrire sous la forme

$$x(a_2 + a_3 x + \ldots).$$

Dans ce nouveau produit, le premier facteur ne s'annule que pour $x = 0$, et le second s'annule dès lors une infinité de fois dans un domaine de petitesse arbitraire ayant pour centre le point zéro; il a donc encore son premier coefficient nul et peut s'écrire

$$x(a_3 + a_4 x + \ldots).$$

Et ainsi de suite indéfiniment.

III. La condition posée dans notre énoncé général est donc nécessaire lorsqu'il s'agit d'une série entière à une seule variable, et il suffit alors de prouver que, si elle l'est pour une série entière à $k - 1$ variables, elle l'est encore pour la série

$$\Sigma a_{m,n,\ldots} x^m y^n \ldots, \tag{1}$$

dépendant des k variables $x, y, \ldots$.

A cet effet, ordonnons la série (1) par rapport à x (n° 31, 4°), et mettons-la sous la forme

$$A_0(y, \ldots) + A_1(y, \ldots)x + A_2(y, \ldots)x^2 + \ldots, \tag{2}$$

où

$$A_0(y, \ldots), \quad A_1(y, \ldots), \quad A_2(y, \ldots), \quad \ldots \tag{3}$$

sont des séries entières dépendant des $k-1$ variables $y, \ldots$. Si, à l'intérieur du domaine où la série (1) est supposée convergente, on attribue à $y, \ldots$ un système déterminé de valeurs particulières, l'expression (2) s'évanouit quel que soit x, et l'on a (II)

$$A_0(y, \ldots) = 0, \quad A_1(y, \ldots) = 0, \quad A_2(y, \ldots) = 0, \quad \ldots.$$

Mais, les valeurs particulières que nous venons d'attribuer à $y, \ldots$ étant arbitraires, il résulte de ce qui est admis sur les séries entières à $k-1$ variables que les coefficients des diverses séries (3) sont tous nuls, et, par suite, ceux de la proposée.

36. *Pour que les sommes des séries entières*

$$f(x, y, \ldots) = \Sigma a_{m,n,\ldots} x^m y^n \ldots,$$
$$g(x, y, \ldots) = \Sigma b_{m,n,\ldots} x^m y^n \ldots,$$

admettant quelque domaine commun de convergence, y soient égales independamment des valeurs attribuées aux variables, il faut et il suffit que les termes semblables de ces deux séries soient pourvus de coefficients respectivement égaux.

Effectivement, pour que les sommes

$$f(x, y, \ldots), \quad g(x, y, \ldots)$$

soient égales indépendamment des valeurs attribuées aux variables, il faut et il suffit que la série

$$f(x, y, \ldots) - g(x, y, \ldots) = \Sigma(a_{m,n,\ldots} - b_{m,n,\ldots}) x^m y^n \ldots,$$

qui admet le domaine de convergence commun aux deux proposées, y ait une somme constamment nulle : donc (n° 35), il faut et il suffit qu'on ait, quels que soient $m, n, \ldots,$

$$a_{m,n,\ldots} - b_{m,n,\ldots} = 0$$

ou

$$a_{m,n,\ldots} = b_{m,n,\ldots}.$$

CHAPITRE III [1].

FONCTIONS OLOTROPES [2] ET LEURS DÉRIVÉES; COMPOSITION DES FONCTIONS OLOTROPES.

Régions continues; régions normales.

37. Désignons par $x, y, \ldots$ des variables *réelles* ou *imaginaires*, en nombre quelconque n; par $s, t, \ldots$ des variables *réelles* en nombre quelconque p; enfin, par

$$\varphi(s, t, \ldots), \quad \chi(s, t, \ldots), \quad \ldots$$

n fonctions de $s, t, \ldots$, toutes *continues* (nº 16) dans un même *intervalle complexe* (nº 9, II). Cela posé, l'ensemble des n formules

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} x = \varphi(s, t, \ldots), \\ y = \chi(s, t, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

où les divers systèmes de valeurs attribuées à $s, t, \ldots$ n'excèdent pas l'intervalle en question, définit ce que nous nommerons un *arc continu* (à p variables) tracé dans l'espace $\big[[x, y, \ldots]\big]$. Les *points de l'arc* seront les divers systèmes de valeurs de $x, y, \ldots$ qui correspondent, en vertu des formules (1), aux valeurs ci-dessus spécifiées de $s, t, \ldots$. Si, dans chacun des intervalles simples où $s, t, \ldots$ sont respectivement assujettis à varier, on considère l'une des deux valeurs extrêmes comme initiale, et l'autre comme finale, il faudra entendre par *extrémité initiale* de l'arc le point qui correspond aux valeurs initiales de $s, t, \ldots$, et par *extrémité finale* de l'arc le point qui correspond à

---

[1] Ce Chapitre contient l'exposé, quelque peu modifié, d'une partie des considérations que M. Méray donne pour base à la théorie générale des fonctions.

[2] Orthographe conforme à celle qu'a adoptée M. Méray.

leurs valeurs finales. Des arcs, tracés dans l'espace $\big[[x, y, \ldots]\big]$, seront dits *placés bout à bout,* si l'extrémité finale de chacun d'eux coïncide avec l'extrémité initiale du suivant. Enfin, un arc sera dit *situé dans telle ou telle région* de l'espace $\big[[x, y, \ldots]\big]$, si chacun de ses points s'y trouve situé.

38. Considérons, dans l'espace $\big[[x, y, \ldots]\big]$, le *chemin brisé* ayant pour *sommets* successifs

$$(2)\quad (x_0, y_0, \ldots),\quad (x_1, y_1, \ldots),\quad (x_2, y_2, \ldots),\quad \ldots,\quad (x_g, y_g, \ldots),\quad (X, Y, \ldots),$$

et formons, avec les coordonnées $x, y, \ldots$ de deux sommets consécutifs quelconques, le Tableau des différences

$$\begin{array}{llll} x_1 - x_0, & x_2 - x_1, & \ldots, & X - x_g, \\ y_1 - y_0, & y_2 - y_1, & \ldots, & Y - y_g, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots; \end{array}$$

évaluons enfin, dans les lignes respectives de ce Tableau, les plus grands modules, $\mu_x, \mu_y, \ldots$, que présentent les différences dont il s'agit : ces quantités $\mu_x, \mu_y, \ldots$ se nommeront les *écarts maxima du chemin brisé* (2).

Cela posé, si l'on considère, dans l'espace $\big[[x, y, \ldots]\big]$, un arc continu quelconque, il est facile de voir que *les extrémités initiale et finale de l'arc peuvent être reliées l'une à l'autre par quelque chemin brisé ayant tous ses sommets sur l'arc, et présentant des écarts maxima respectivement inférieurs à des constantes positives données* $r_x, r_y, \ldots$.

Désignons en effet par $s, t, \ldots$ les variables (réelles) dont l'arc dépend, par $\mathfrak{J}$ l'intervalle complexe où elles sont assujetties à se mouvoir, et par γ un nombre positif tel, que les inégalités simultanées

$$\operatorname{mod}(s' - s'') < \gamma, \qquad \operatorname{mod}(t' - t'') < \gamma, \qquad \ldots,$$

supposées vérifiées pour deux points, $(s', t', \ldots)$, $(s'', t'', \ldots)$, de l'intervalle $\mathfrak{J}$, entraînent comme conséquences nécessaires, pour les valeurs correspondantes de $x, y, \ldots$, les relations

$$\operatorname{mod}(x' - x'') < r_x, \qquad \operatorname{mod}(y' - y'') < r_y, \qquad \ldots :$$

un pareil nombre γ existe certainement, car l'intervalle complexe $\mathfrak{J}$

constitue, dans l'espace $\big[[s, t, \ldots]\big]$, une région limitee et complète où les seconds membres des formules qui définissent l'arc sont tous continus (n° 9, II), (n° 17, 4°). Désignons ensuite par s_0, t_0, ... les valeurs initiales de s, t, ..., par S, T, ... leurs valeurs finales, et formons, dans l'intervalle $\mathfrak{J}$, la suite

$$(3)\quad (s_0, t_0, \ldots),\quad (s_1, t_1, \ldots),\quad (s_2, t_2, \ldots),\quad \ldots,\quad (s_g, t_g, \ldots),\quad (S, T, \ldots),$$

sous la seule condition que les différences

$$\begin{array}{llll} s_1 - s_0, & s_2 - s_1, & \ldots, & S - s_g, \\ t_1 - t_0, & t_2 - t_1, & \ldots, & T - t_g, \\ \ldots\;\ldots & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \end{array}$$

formées en comparant deux termes consécutifs quelconques de la suite (3), soient toutes moindres que γ en valeur absolue. Aux divers points (3) de l'espace $\big[[s, t, \ldots]\big]$ correspondent, dans l'espace $\big[[x, y, \ldots]\big]$, en vertu des formules qui définissent l'arc, certains points,

$$(x_0, y_0, \ldots),\quad (x_1, y_1, \ldots),\quad (x_2, y_2, \ldots),\quad \ldots,\quad (x_g, y_g, \ldots),\quad (X, Y, \ldots),$$

et ces derniers forment un chemin brisé qui, en vertu de la définition de γ, satisfait bien à la condition requise.

Plus généralement, si l'on considère, dans l'espace $\big[[x, y, \ldots]\big]$, un chemin continu formé d'arcs placés bout à bout, *les extrémités initale et finale du chemin dont il s'agit peuvent être reliées l'une à l'autre par quelque chemin brisé ayant tous ses sommets sur cette suite d'arcs, et présentant des écarts maxima respectivement inférieurs à des constantes positives données.*

39. Une région de l'espace $\big[[x, y, \ldots]\big]$ sera dite *continue,* si deux points, $(x_0, y_0, \ldots)$, $(X, Y, \ldots)$, arbitrairement choisis dans la région, peuvent toujours être reliés l'un à l'autre par une suite d'arcs continus placés bout à bout dans cette région, le premier des arcs dont il s'agit ayant son extrémité initiale en $(x_0, y_0, \ldots)$, et le dernier son extrémité finale en $(X, Y, \ldots)$.

La remarque présentée au n° 4 relativement aux régions limitées ou complètes s'applique évidemment aux régions continues : si des

régions, respectivement extraites des espaces

$$\big[[x, \ldots]\big], \quad \big[[y, \ldots]\big], \quad \ldots,$$

sont toutes continues, leur association forme, dans l'espace

$$\big[[x, \ldots, y, \ldots \ldots]\big],$$

une région également continue ([1]).

De la remarque finale du numéro précédent il résulte que, dans une région continue, deux points quelconques peuvent être reliés l'un à l'autre par quelque chemin brisé ayant tous ses sommets dans la région et présentant des écarts maxima respectivement moindres que des quantités positives données.

Enfin, si l'on désigne par $x, y, \ldots$ des variables indépendantes, en nombre quelconque g, assujetties à se mouvoir dans une région *continue*, $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$, par

$$u = \mathrm{U}(x, y, \ldots),$$
$$v = \mathrm{V}(x, y, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

des fonctions de $x, y, \ldots$, en nombre quelconque j, toutes *continues* dans cette région, et par $\mathfrak{R}_{u,v,\ldots}$ l'ensemble des divers points de l'espace $\big[[u, v, \ldots]\big]$ qui, en vertu des formules ci-dessus, correspondent (avec répétition possible) aux divers points de $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$,

([1]) Il convient d'observer encore que, si l'on désigne par $x, y, z, s, \ldots$ des variables réelles en nombre pair $2n$, toute région qui, par rapport à ces $2n$ variables réelles, satisfait à la définition de la continuité, y satisfait aussi par rapport aux n variables imaginaires

$$u = x + iy, \qquad v = z + is, \qquad \ldots,$$

et réciproquement. Si l'on désigne en effet par $t, \ldots$ des variables réelles en nombre quelconque, par f_1, f_2 deux fonctions réelles de ces variables, et qu'on pose

$$f = f_1 + if_2,$$

la continuité des deux fonctions réelles f_1, f_2 dans une région de l'espace $\big[[t, \ldots]\big]$ entraîne celle de la fonction imaginaire f dans les mêmes limites, et réciproquement : tout arc continu tracé dans l'espace $\big[[x, y, z, s, \ldots]\big]$ fournit donc, par la simple considération des formules qui relient $x, y, z, s, \ldots$ à $u, v, \ldots$, un arc continu tracé dans l'espace $\big[[u, v, \ldots]\big]$, et réciproquement; de là résulte immédiatement notre remarque.

les diverses continuités supposées entraînent celle de la région $\mathfrak{R}_{u,v,\ldots}$.

40. *Tout domaine* (n° 30) *est une région continue.*

Effectivement, si, dans le domaine $\mathfrak{D}$, défini par les relations

$$\mathrm{mod}(x-a) < R_x, \qquad \mathrm{mod}(y-b) < R_y, \qquad \ldots,$$

où $(a, b, \ldots)$ désigne un point fixe, et R_x, R_y, ... des constantes positives (>0), on prend arbitrairement deux points, $(x_0, y_0, \ldots)$, $(X, Y, \ldots)$, les formules

$$(4) \qquad \begin{cases} x = x_0 + s(X - x_0), \\ y = y_0 + s(Y - y_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

où l'indéterminée s est assujettie à varier dans l'intervalle de o à 1 ($0 \leqq s \leqq 1$), définissent un arc continu ayant pour extrémités initiale et finale les deux points choisis. Ces formules (4) peuvent d'ailleurs s'écrire

$$(5) \qquad \begin{cases} x - a = (1-s)(x_0 - a) + s(X - a), \\ y - b = (1-s)(y_0 - b) + s(Y - b), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et, pour toute valeur de s n'excédant pas l'intervalle de o à 1, le module acquis par le second membre de la première formule (5) est inférieur ou égal à

$$(1-s)\,\mathrm{mod}(x_0 - a) + s\,\mathrm{mod}(X - a),$$

par suite inférieur ou égal au produit de la plus grande des quantités

$$\mathrm{mod}(x_0 - a), \quad \mathrm{mod}(X - a)$$

par la somme $(1-s) + s = 1$, par suite inférieur ou égal à la plus grande de ces quantités, par suite, enfin, inférieur à R_x. On ferait voir, par un raisonnement tout semblable, que, dans les mêmes limites, le module acquis par le second membre de la deuxième formule (5) reste inférieur à R_y; et ainsi jusqu'à la dernière. L'arc (4), terminé aux deux points $(x_0, y_0, \ldots)$, $(X, Y, \ldots)$, est donc entièrement situé dans le domaine $\mathfrak{D}$.

41. Nous dirons qu'une région $\mathfrak{R}$ de l'espace $[[x, y, \ldots]]$ est *normale,* si elle satisfait à la double condition suivante : 1° la région $\mathfrak{R}$ est continue (n° 39); 2° tout point de la région $\mathfrak{R}$ est le centre de quelque domaine (n° 30) entièrement situé dans $\mathfrak{R}$ (¹).

La remarque présentée aux n°s 4 et 39 relativement aux régions limitées, complètes ou continues, s'applique encore aux régions normales : si des régions, respectivement extraites des espaces

$$[[x, \ldots]], \quad [[y, \ldots]], \quad \ldots,$$

sont toutes normales, leur association fournit, dans l'espace

$$[[x, \ldots, y, \ldots, \ldots]],$$

une région également normale.

Tout domaine est une région normale.

Considérons un domaine $\mathfrak{D}$, de centre $(a, b, \ldots)$ et de rayons R_x, R_y, ... : la continuité de cette région ayant déjà été établie au numéro précédent, il suffit de faire voir que tout point $(x_0, y_0, \ldots)$ intérieur à $\mathfrak{D}$ est le centre de quelque domaine entièrement situé dans $\mathfrak{D}$.

Or, si l'on désigne par $\rho_x, \rho_y, \ldots$ les différences (nécessairement supérieures à zéro)

$$R_x - \operatorname{mod}(x_0 - a), \quad R_y - \operatorname{mod}(y_0 - b), \quad \ldots,$$

il est facile de se convaincre que les relations

$$\operatorname{mod}(x - x_0) < \rho_x, \qquad \operatorname{mod}(y - y_0) < \rho_y, \qquad \ldots$$

entraînent comme conséquences nécessaires

$$\operatorname{mod}(x - a) < R_x, \qquad \operatorname{mod}(y - b) < R_y, \qquad \ldots.$$

Car de la relation

$$(x - a) + (a - x_0) = x - x_0,$$

on tire

$$\operatorname{mod}(x - a) - \operatorname{mod}(x_0 - a) \leqq \operatorname{mod}(x - x_0);$$

(¹) Ou, ce qui revient au même, lorsqu'un point fait partie de la région, tous ceux dont la distance au point considéré est suffisamment petite en font également partie.

si donc on suppose le module de $x - x_0$ inférieur à ρ_x, on aura la suite d'inégalités

$$\text{mod}(x-a) - \text{mod}(x_0 - a) \leqq \text{mod}(x - x_0) < \text{R}_x - \text{mod}(x_0 - a),$$

d'où l'on déduit, par la comparaison des quantités extrêmes,

$$\text{mod}(x-a) < \text{R}_x.$$

Et l'on trouverait, par un calcul semblable,

$$\text{mod}(y-b) < \text{R}_y, \qquad \ldots.$$

Définition des fonctions olotropes.

42. Les variables $x, y, \ldots$ étant supposées, indifféremment, *réelles* ou *imaginaires,* nous dirons qu'une fonction, $f(x, y, \ldots)$, de ces variables, bien définie *dans une région normale* (n° 41), $\mathfrak{R}$, y est *olotrope,* si, autour d'un point quelconque, $(x_0, y_0, \ldots)$, de la région, pris comme centre, on peut assigner quelque domaine dans toute l'étendue duquel la fonction $f(x, y, \ldots)$ soit exprimable à l'aide d'un même développement, entier par rapport aux différences $x - x_0, y - y_0, \ldots$. Les rayons d'un pareil domaine (qu'on doit supposer, naturellement, compris tout entier dans la région $\mathfrak{R}$) se nommeront *olomètres* (simultanés) de la fonction au point $(x_0, y_0, \ldots)$; le développement entier qui exprime la fonction dans le voisinage de ce point sera dit avoir lieu *à partir de* $(x_0, y_0, \ldots)$, et, par rapport à lui, les quantités $x_0, y_0, \ldots$ et $f(x_0, y_0, \ldots)$ se nommeront les *valeurs initiales* des variables et de la fonction.

Il ne faut jamais perdre de vue que *la définition,* donnée ci-dessus, *d'une fonction olotrope implique essentiellement la nature normale de la région où on la considère* (¹).

(¹) M. Méray formule comme il suit la définition des fonctions olotropes (*Leçons nouvelles,* etc., 1re Partie, p. 110) :

« Nous dirons que la fonction $f(x, y, \ldots)$ est *olotrope* en $x_0, y_0, \ldots$, avec des *olomètres* au moins égaux à $\delta_x, \delta_y, \ldots$, quand $f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$ peut se développer en une série entière par rapport à $h, k, \ldots$ admettant $\delta_x, \delta_y, \ldots$ pour rayons de convergence.

» Nous dirons encore que $f(x, y, \ldots)$ est *olotrope* dans des aires données S_x, $S_y, \ldots$, avec les *olomètres* (invariables) $\delta_x, \delta_y, \ldots$, quand elle jouit de cette pro-

Il va sans dire, enfin, que, étant donné un système d'olomètres de la fonction au point $(x_0, y_0, \ldots)$, si l'on diminue arbitrairement

---

priété en tout système de valeurs initiales de ces variables prises respectivement à l'intérieur de ces aires. »

Cette définition nous semble donner lieu à diverses objections, dont voici les principales :

1° Si l'on ne suppose pas expressément la *continuité* de la région où se meuvent les variables indépendantes, il devient impossible d'établir d'une façon rigoureuse la proposition fondamentale du n° 57 sur la nullité identique d'une fonction analytique.

2° Si l'on se borne à supposer que chacune des n variables

$$x = x' + ix'', \qquad y = y' + iy'', \qquad \ldots$$

se meut, indépendamment des autres, dans quelque portion ou *aire* donnée du plan qui sert à sa notation graphique, au lieu de supposer, plus généralement, que le point

$$(x', x'', y', y'', \ldots)$$

varie dans quelque région de l'espace à $2n$ dimensions, il devient, dans bien des cas, fort incommode d'appliquer aux fonctions analytiques leurs propriétés même les plus essentielles : il faut renoncer, par exemple, à considérer une fonction analytique des n variables *réelles* x', y', ... dans le fragment d'espace

$$x'^2 + y'^2 + \ldots < \mathrm{R}^2;$$

car ce dernier ne peut évidemment s'obtenir, ni par l'association de n segments, respectivement pris sur les axes indéfinis qui servent à la notation graphique des n variables isolées, ni par un nombre fini de semblables associations. Nous n'insisterons pas sur les inconvénients d'une semblable exclusion ; elle nous paraît d'ailleurs d'autant moins naturelle que, lorsqu'il s'agit de la variable imaginaire $x = x' + ix''$, rien, dans la définition citée, n'empêche de considérer la région $x'^2 + x''^2 < \mathrm{R}^2$.

3° Alors même qu'on s'affranchirait, comme nous croyons utile de le faire, de la restriction précédente, la définition citée en impose une autre dont il y a, nous semble-t-il, tout avantage à s'affranchir pareillement : d'après elle, en effet, toute fonction de x, y, ..., olotrope dans une région, l'est forcément aussi dans cette même région accrue d'une certaine *zone additionnelle* (*Leçons nouvelles*, etc., 1re Partie, p. 112) ; si, pour fixer les idées, on considère une fonction d'une variable imaginaire qui soit analytique à l'*intérieur* d'une circonférence (abstraction faite de la circonférence elle-même), cette fonction n'y pourra être qualifiée d'*olotrope* qu'à la condition d'être analytique à l'intérieur de quelque circonférence concentrique de rayon plus grand. Si donc on tient à ne rien préjuger de ce que peut être la fonction dans une région, si petite qu'elle soit, extérieure à la circonférence donnée, on sera obligé, pour spécifier sa nature analytique dans la région intérieure, de dire qu'elle est olotrope, non à l'intérieur de la circonférence elle-même, mais à l'intérieur de toute circonférence concentrique de rayon moindre. Or, une pareille obligation peut, dans des cas moins simples, conduire à des énoncés fort pénibles.

Telles sont les principales raisons pour lesquelles nous avons cru devoir proposer une définition un peu différente, et faire appel, notamment, à la considération des régions *normales*.

quelques-uns d'entre eux sans augmenter les autres, on a encore un système d'olomètres de la fonction au point considéré.

43. *Toute fonction olotrope dans une région (normale)* 𝕽 *y est continue.*

C'est ce qui résulte immédiatement de la définition ci-dessus (n° 42) et de la continuité des séries entières (n° 34).

44. *Si l'on désigne par $f(x, y, \ldots)$ une fonction olotrope dans une région (normale)* 𝕽, *et par $(x_0, y_0, \ldots)$ un point particulier quelconque de cette région, il n'existe, pour représenter $f(x, y, \ldots)$ dans le voisinage de ce point conformément à la définition ci-dessus, qu'un seul développement entier par rapport aux différences $x - x_0, y - y_0, \ldots$*

Supposons, en effet, qu'il existe deux développements de cette nature, c'est-à-dire qu'en posant

$$x - x_0 = h, \qquad y - y_0 = k, \qquad \ldots,$$

la quantité

$$f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$$

soit exprimable à l'aide d'un premier développement entier en $h, k, \ldots$ pour toutes valeurs de $h, k, \ldots$ de modules respectivement inférieurs à certaines constantes positives $\delta'_x, \delta'_y, \ldots$; puis, qu'elle soit de même exprimable à l'aide d'un deuxième développement entier en $h, k, \ldots$ pour toutes valeurs de $h, k, \ldots$ de modules respectivement inférieurs à certaines constantes positives $\delta''_x, \delta''_y, \ldots$. Si l'on désigne alors par δ_x la plus petite des deux constantes δ'_x, δ''_x, par δ_y la plus petite des deux constantes δ'_y, δ''_y, etc., les deux développements dont il s'agit ont des sommes égales pour toutes valeurs de $h, k, \ldots$ de modules respectivement inférieurs à $\delta_x, \delta_y, \ldots$, puisque, dans ces limites, ils représentent l'un et l'autre la quantité

$$f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots);$$

ils ont donc leurs coefficients semblables respectivement égaux (n° 36).

45. Considérons, d'une part, un domaine, 𝕯, de centre $(x_0, y_0, \ldots)$ et de rayons $\delta_x, \delta_y, \ldots$; d'autre part, le domaine, 𝖉, ayant pour centre

un point quelconque, $(x_1, y_1, \ldots)$, du précédent, et pour rayons les différences (nécessairement positives)

$$(1) \qquad \delta_x - \operatorname{mod}(x_1 - x_0), \quad \delta_y - \operatorname{mod}(y_1 - y_0), \quad \ldots;$$

ce deuxième domaine est entièrement compris dans le premier, car les relations

$$\begin{aligned} &\operatorname{mod}(x - x_1) < \delta_x - \operatorname{mod}(x_1 - x_0), \\ &\operatorname{mod}(y - y_1) < \delta_y - \operatorname{mod}(y_1 - y_0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

qui peuvent s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} &\operatorname{mod}(x - x_1) + \operatorname{mod}(x_1 - x_0) < \delta_x, \\ &\operatorname{mod}(y - y_1) + \operatorname{mod}(y_1 - y_0) < \delta_y, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

entraînent, à plus forte raison,

$$\begin{aligned} &\operatorname{mod}(x - x_0) < \delta_x, \\ &\operatorname{mod}(y - y_0) < \delta_y, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Cela étant, *si une fonction $f(x, y, \ldots)$ est exprimable dans toute l'étendue du domaine $\mathfrak{D}$ à l'aide d'un développement entier par rapport aux différences $x - x_0$, $y - y_0$, $\ldots$, elle l'est dans toute l'étendue du domaine $\mathfrak{d}$ à l'aide d'un développement entier par rapport aux différences $x - x_1$, $y - y_1$, $\ldots$.*

Effectivement, désignons par $F(h, k, \ldots)$ la somme de la série entière en $h, k, \ldots$ qui, par hypothèse, représente la quantité

$$f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$$

pour toutes valeurs de $h, k, \ldots$ de modules respectivement inférieurs à $\delta_x, \delta_y, \ldots$; par $\theta_x, \theta_y, \ldots$ des quantités positives respectivement inférieures aux différences (1), et d'ailleurs arbitrairement choisies; enfin par $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots$ les quantités également positives

$$\begin{aligned} &\delta_x - \operatorname{mod}(x_1 - x_0) - \theta_x, \\ &\delta_y - \operatorname{mod}(y_1 - y_0) - \theta_y, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

On a, d'après cela,

$$\begin{aligned} &[\operatorname{mod}(x_1 - x_0) + \varepsilon_x] + \theta_x = \delta_x, \\ &[\operatorname{mod}(y_1 - y_0) + \varepsilon_y] + \theta_y = \delta_y, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

d'où résulte, en vertu du nº 33, que la série entière en

$$h,\quad k,\quad \ldots,\quad h',\quad k',\quad \ldots$$

obtenue par le développement de la quantité

$$F(h+h',\ k+k',\ \ldots)$$

admet les rayons de convergence

$$\operatorname{mod}(x_1-x_0)+\varepsilon_x,\quad \operatorname{mod}(y_1-y_0)+\varepsilon_y,\quad \ldots,\quad \theta_x,\quad \theta_y,\quad \ldots,$$

et représente, entre ces limites, la quantité dont il s'agit, égale à

$$f(x_0+h+h',\ y_0+k+k',\ \ldots).$$

Dès lors, la série déduite de la précédente en y faisant

$$h=x_1-x_0,\qquad k=y_1-y_0,\qquad \ldots,$$

et ordonnant par rapport à h', k', ..., admet certainement les rayons de convergence θ_x, θ_y, ..., et représente, entre ces limites, la quantité

$$(2)\qquad f(x_1+h',\ y_1+k',\ \ldots).$$

Comme d'ailleurs θ_x, θ_y, ..., respectivement inférieurs aux différences (1), en sont aussi rapprochés qu'on le veut, cette dernière série, entière en h', k', ..., admet les différences (1) comme rayons de convergence, et représente, entre ces limites, la quantité (2), ce qu'il s'agissait d'établir.

46. De là résultent immédiatement les conséquences suivantes :

I. *Lorsqu'une série entière en* $x-x_0, y-y_0$, ... *admet les rayons de convergence* R_x, R_y, ...: 1° *sa somme est une fonction olotrope de* x, y, ... *dans le domaine ayant pour centre* $(x_0, y_0, \ldots)$ *et pour rayons* R_x, R_y, ...; 2° *en un point* $(x_1, y_1, \ldots)$ *de ce domaine, la fonction dont il s'agit admet pour olomètres les différences (positives)*

$$R_x-\operatorname{mod}(x_1-x_0),\qquad R_y-\operatorname{mod}(y_1-y_0),\qquad \ldots.$$

II. *Soient* $f(x, y, \ldots)$ *une fonction olotrope dans une région (normale);* $(x_0, y_0, \ldots)$ *un point de cette région;* δ_x, δ_y, ... *un système d'olomètres de* $f(x, y, \ldots)$ *au point* $(x_0, y_0, \ldots)$*; enfin,*

$(x_1, y_1, \ldots)$ *un point intérieur au domaine de centre* $(x_0, y_0, \ldots)$ *et de rayons* $\delta_x, \delta_y, \ldots$.

Cela étant, la fonction $f(x, y, \ldots)$ *ne peut manquer d'admettre au point* $(x_1, y_1, \ldots)$ *les olomètres*

$$\delta_x - \operatorname{mod}(x_1 - x_0), \quad \delta_y - \operatorname{mod}(y_1 - y_0), \quad \ldots.$$

47. *Une fonction entière* $\mathrm{F}(x, y, \ldots)$ *est olotrope dans toute l'étendue de l'espace* $\big[[x, y, \ldots]\big]$ *avec des olomètres de grandeur indéfinie.*

Car, quelles que soient les valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots$, et aussi quels que soient les accroissements $h, k, \ldots$, on peut, au moyen des premières règles de l'Algèbre, transformer l'expression

$$\mathrm{F}(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$$

en un polynome entier par rapport à $h, k, \ldots$, qui constitue une série entière limitée.

48. *Si l'on désigne par* x *une variable réelle ou imaginaire, par* a *une constante quelconque, et par* x_0 *une valeur particulière de* x *différente de* a, *la fonction* $\frac{1}{x-a}$ *peut, dans toute l'étendue du domaine ayant pour centre* x_0 *et pour rayon le module de* $x_0 - a$, *s'exprimer à l'aide d'un développement entier en* $x - x_0$.

La relation

$$\operatorname{mod}(x - x_0) < \operatorname{mod}(a - x_0)$$

entraînant de toute nécessité $x \neq a$, on voit tout d'abord que la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x - a}$$

est bien définie dans toute l'étendue du domaine en question. On a d'ailleurs, en posant $x = x_0 + h$,

$$f(x_0 + h) = \frac{1}{x_0 - a + h} = \frac{1}{x_0 - a} \, \frac{1}{1 + \dfrac{h}{x_0 - a}},$$

et, comme le module de $h = x - x_0$ est supposé inférieur à celui de

$x_0 - a$, la quantité

$$h' = -\frac{h}{x_0 - a}$$

a un module < 1 ; il vient donc (n° 28)

$$\frac{1}{1-h'} = 1 + h' + h'^2 + \ldots,$$

d'où

$$f(x_0+h) = \frac{1}{x_0 - a} - \frac{h}{(x_0-a)^2} + \frac{h^2}{(x_0-a)^3} - \ldots.$$

De là résultent immédiatement les conséquences suivantes :

Si x désigne une variable réelle, la fonction $\frac{1}{x-a}$ est olotrope dans la région (normale) que définit la relation $x > a$, et aussi dans la région (normale) que définit la relation $x < a$.

Si x désigne une variable imaginaire, la fonction $\frac{1}{x-a}$ est olotrope dans la région (normale) que définit la relation $x \neq a$.

Dans l'un et l'autre cas, la fonction admet pour olomètre au point x le module de $x - a$.

Dérivées premières [1].

49. Lorsqu'une fonction $f(x, y, \ldots)$ est olotrope (n° 42) dans une région (normale) $\mathfrak{R}$, à tout point $(x, y, \ldots)$ de cette région correspond, pour exprimer la valeur de la fonction dans son voisinage, un développement, et un seul (n° 44), entier par rapport aux accroissements $h, k, \ldots$ qu'on attribue à $x, y, \ldots$; le seul choix du point $(x, y, \ldots)$ détermine donc entièrement les coefficients du développement qui lui correspond, et, dès lors, *chacun de ces coefficients peut, dans la région $\mathfrak{R}$, être considéré comme une fonction de* $x, y, \ldots$. Nous allons établir actuellement qu'*une pareille fonction est, comme la proposée $f(x, y, \ldots)$, olotrope dans la région $\mathfrak{R}$, et qu'elle admet en chaque point de cette région les olomètres de la proposée.*

Effectivement, désignons par

$$f_{p,q,\ldots}(x, y, \ldots)$$

---

[1] *Voir* MÉRAY, *Leçons nouvelles*, etc., 1re Partie, p. 119 et suiv.

le coefficient de $h^p k^q \ldots$ dans le développement de

$$f(x+h, y+k, \ldots);$$

par $(x_0, y_0, \ldots)$ un point quelconque de $\mathfrak{R}$; par δ_x, δ_y, ... des olomètres de la fonction $f(x, y, \ldots)$ en ce point; par $F(h, k, \ldots)$ la somme de la série entière en $h, k, \ldots$ qui, par hypothèse, représente la quantité

$$f(x_0+h, y_0+k, \ldots)$$

pour toutes valeurs de $h, k, \ldots$ de modules respectivement inférieurs à $\delta_x, \delta_y, \ldots$; enfin par $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots$ des quantités positives respectivement inférieures à $\delta_x, \delta_y, \ldots$, et d'ailleurs de petitesse arbitraire. En vertu du n° 33, la série entière en

$$h, \quad k, \quad \ldots, \quad h', \quad k', \quad \ldots$$

obtenue par le développement de la quantité

$$F(h+h', k+k', \ldots)$$

admet les rayons de convergence

$$\delta_x - \varepsilon_x, \quad \delta_y - \varepsilon_y, \quad \ldots, \quad \varepsilon_x, \quad \varepsilon_y, \quad \ldots,$$

et représente, entre ces limites, la quantité dont il s'agit, c'est-à-dire

$$f(x_0+h+h', y_0+k+k', \ldots);$$

si on l'ordonne par rapport à $h', k', \ldots$, le coefficient de $h'^p k'^q \ldots$ est une série entière en $h, k, \ldots$ admettant les rayons de convergence

$$\delta_x - \varepsilon_x, \quad \delta_y - \varepsilon_y, \quad \ldots,$$

et représente, dans ces limites, la quantité

$$(1) \qquad f_{p,q,\ldots}(x_0+h, y_0+k, \ldots).$$

Enfin, comme $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots$ sont de petitesse arbitraire, on peut dire que cette même série entière en $h, k, \ldots$ admet les rayons de convergence $\delta_x, \delta_y, \ldots$, et représente, dans ces limites, la quantité (1). C'est ce qu'il s'agissait d'établir.

50. Soit $f(x, y, \ldots)$ une fonction olotrope dans une région $\mathfrak{R}$. Si l'on désigne par $(x, y, \ldots)$ un point quelconque de cette dernière,

le terme indépendant de $h, k, \ldots$ dans le développement de

$$f(x+h, y+k, \ldots),$$

effectué à partir des valeurs initiales $x, y, \ldots$, a pour valeur $f(x, y, \ldots)$. Dans ce même développement, les coefficients des premières puissances de $h, k, \ldots$ se nomment les *dérivées* de $f(x, y, \ldots)$ *prises par rapport à* $x, y, \ldots$ respectivement. On les représente souvent par

$$f'_x(x, y, \ldots), \quad f'_y(x, y, \ldots), \quad \ldots.$$

Cela étant, le calcul d'une dérivée se ramène toujours, comme nous allons le voir, au cas d'une variable unique.

Considérons en effet le développement entier en $h, k, \ldots$ qui, pour toutes valeurs de $h, k, \ldots$ suffisamment voisines de zéro, exprime la quantité

$$f(x+h, y+k, \ldots):$$

si, dans un pareil développement, on introduit l'hypothèse numérique

$$k = \ldots = 0,$$

on obtiendra un développement entier en h qui, pour toutes valeurs de h suffisamment voisines de zéro, exprimera la quantité

$$f(x+h, y, \ldots);$$

un raisonnement semblable à celui du n° 44 prouve d'ailleurs qu'il ne peut exister qu'un seul développement entier en h jouissant de cette dernière propriété. Or, l'hypothèse numérique introduite dans le premier des deux développements considérés n'a pas changé le coefficient de la première puissance de h, et l'on peut dès lors, pour calculer ce coefficient, prendre indifféremment l'un ou l'autre des deux développements. Il en résulte que la dérivée de $f(x, y, \ldots)$ par rapport à x est égale au coefficient de la première puissance de h dans le développement (unique) de la quantité

$$f(x+h, y, \ldots);$$

en d'autres termes, *pour obtenir la dérivée de* $f(x, y, \ldots)$ *par rapport à* x, *on peut opérer comme si* x *était la seule variable, en considérant toutes les autres comme momentanément réduites à des constantes,* ce qui ramène bien, comme nous l'avions annoncé, le calcul d'une dérivée au cas d'une variable unique.

51. Appliquons ce qui précède à quelques exemples.

1° *Une constante* (si on veut la considérer comme un cas extrême d'une fonction olotrope) *a des dérivées toutes identiquement nulles.*

Car, dans le voisinage de valeurs initiales quelconques attribuées aux variables indépendantes, elle est représentée par un développement entier se réduisant à la constante dont il s'agit.

2° *La fonction entière*

$$A(x-a)^{\alpha}(y-b)^{\beta}\ldots, \tag{2}$$

où $A, a, b, \ldots$ sont des constantes, et les exposants $\alpha, \beta, \ldots$ des entiers positifs ou nuls, *a pour dérivée par rapport à* x

$$A\alpha(x-a)^{\alpha-1}(y-b)^{\beta}\ldots. \tag{3}$$

Il suffit en effet, pour obtenir la dérivée de la fonction (2) par rapport à x, de remplacer dans cette fonction x par $x+h$, c'est-à-dire $x-a$ par $x-a+h$, de développer

$$A(x-a+h)^{\alpha}(y-b)^{\beta}\ldots,$$

suivant les puissances de h, et de prendre, dans le développement ainsi obtenu, le coefficient de h. Or, si α est supérieur à zéro, l'application de la formule du binome donne

$$(x-a+h)^{\alpha}=(x-a)^{\alpha}+\alpha(x-a)^{\alpha-1}h+\ldots,$$

et l'on a bien, pour la dérivée cherchée, l'expression (3). Si α est nul, la fonction (2), indépendante de x, a manifestement par rapport à x une dérivée toujours nulle, que rien n'empêche, dans ce cas extrême, de représenter encore par l'expression (3) [où $\alpha = 0$] [1].

3° Soient $f(x, y, \ldots)$ une fonction olotrope dans une région $\mathfrak{R}$; $(x_0, y_0, \ldots)$ un point particulier de cette région;

$$\Sigma a_{m,n,\ldots}(x-x_0)^m(y-y_0)^n\ldots \tag{4}$$

la série entière en $x-x_0, y-y_0, \ldots$ qui, dans le voisinage du point en question, représente $f(x, y, \ldots)$. Cela étant, *la dérivée par*

---

[1] On sait que, si l'entier m est nul, l'expression C^m (où C est $\neq 0$) est égale, par convention, à l'unité, et que, si l'entier m est supérieur à zéro, l'expression C^{-m} est égale, par convention, à $\frac{1}{C^m}$. Il va sans dire que le produit d'une puissance négative (entière) de $x-a$ par un facteur nul doit, même dans l'hypothèse numérique $x=a$ où il prend une forme indéterminée, être considéré comme nul.

rapport à x de $f(x, y, \ldots)$ est représentée, dans les mêmes limites, par la somme de la série

$$\Sigma\, m a_{m,n,\ldots}(x - x_0)^{m-1}(y - y_0)^n \ldots,$$

obtenue en prenant les dérivées semblables de tous les termes du développement (4).

Effectivement, si l'on pose

$$x - x_0 = h, \qquad y - y_0 = k, \qquad \ldots,$$

il résulte du n° 49 que la quantité

$$f'_x(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$$

est représentable, dans les mêmes limites que

$$f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots),$$

par la somme d'un développement entier en $h, k, \ldots$, et que, pour obtenir ce dernier, il suffit de considérer la série entière en

$$h, \quad k, \quad \ldots, \quad h', \quad k', \quad \ldots$$

qui provient du développement de l'expression

$$\Sigma\, a_{m,n,\ldots}(h + h')^m (k + k')^n \ldots,$$

d'ordonner cette série par rapport à $h', k', \ldots$, puis de prendre le coefficient de la première puissance de h'. Or, il vient ainsi

$$\Sigma\, m a_{m,n,\ldots} h^{m-1} k^n \ldots,$$

résultat conforme à notre énoncé.

4° *La dérivée de* $\frac{1}{x - a}$ *est* $-\frac{1}{(x - a)^2}$.

C'est ce qui résulte immédiatement du n° 48 (¹).

(¹) Les dérivées étant le plus souvent définies comme limites de rapports, il convient d'observer que, *lorsqu'on donne à une seule variable, x, d'une fonction olotrope $f(x, y, \ldots)$ un accroissement infiniment petit, le rapport à cet accroissement de l'accroissement correspondant de la fonction a pour limite $f'_x(x, y, \ldots)$.* On a, en effet, pour toutes valeurs de h suffisamment voisines de zéro,

$$f(x + h, y, \ldots) = f(x, y, \ldots) + h f'_x(x, y, \ldots) + \ldots,$$

d'où

$$\frac{f(x + h, y, \ldots) - f(x, y, \ldots)}{h} = f'_x(x, y, \ldots) + \ldots;$$

or, en vertu de la continuité des séries entières, le second membre de cette dernière relation tend, pour h infiniment petit, vers le terme indépendant de h, c'est-à-dire vers $f'_x(x, y, \ldots)$.

Dérivées d'ordres quelconques ([1]).

52. Comme les dérivées d'une fonction $f(x, y, \ldots)$, olotrope dans une région $\mathfrak{R}$, sont elles-mêmes olotropes dans cette région (n°s 49 et 50), elles ont des dérivées jouissant de cette propriété; de même pour celles-ci, leurs propres dérivées, et ainsi de suite indéfiniment. Les dérivées ainsi formées de proche en proche sont les *dérivées partielles de tous ordres* de la fonction $f(x, y, \ldots)$; leur nomenclature repose sur le théorème suivant :

Lorsque, sur une fonction olotrope, on exécute successivement diverses dérivations, le résultat dépend uniquement des nombres exprimant combien de fois on a dérivé par rapport à chaque variable, dans quelque ordre que ces opérations partielles aient pu être exécutées.

I. Considérons d'abord l'expression

$$A(x-x_0)^\alpha(y-y_0)^\beta\ldots,$$

où $A, x_0, y_0, \ldots$ désignent des constantes, $\alpha, \beta, \ldots$ des entiers positifs ou nuls, et soient $p, q, \ldots$ les nombres de dérivations relatives à $x, y, \ldots$ respectivement qu'il faut exécuter sur elle dans un ordre quelconque.

Si aucune des différences $\alpha-p, \beta-q, \ldots$ n'est négative, le résultat final peut se représenter (n° 51, 2°), dans quelque ordre qu'on ait procédé, par la formule

$$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)\times\beta(\beta-1)\ldots(\beta-q+1)\times\ldots \\ \times A(x-x_0)^{\alpha-p}(y-y_0)^{\beta-q}\ldots :$$

il est donc indépendant de l'ordre des dérivations.

Si quelqu'une des différences $\alpha-p, \beta-q, \ldots$ est négative, on se trouve forcément conduit, dans le cours des dérivations successives, à exécuter, sur une expression de même forme que la proposée, une dérivation relative à une variable qu'elle ne contient pas : on trouve donc, quel que soit l'ordre adopté, un résultat nul (n° 51, 2°).

II. Lorsqu'on a affaire à une fonction olotrope quelconque, on

---

([1]) *Voir* MÉRAY, *Leçons nouvelles*, etc., 1re Partie, p. 122 et suiv.

peut, dans le voisinage d'un point quelconque, $(x_0, y_0, \ldots)$, de la région où on la considère, la représenter par la somme d'une série entière en $x - x_0, y - y_0, \ldots$. Cela étant, il suffit d'observer, d'une part, que les dérivations successives à exécuter sur une pareille série doivent l'être séparément sur tous les termes (n° 51, 3°), d'autre part, que le résultat ainsi obtenu pour chaque terme est, en vertu du cas déjà examiné (I), indépendant de l'ordre des dérivations.

53. Pour spécifier une des dérivées successives d'une fonction olotrope $f(x, y, \ldots)$, il suffit donc d'indiquer combien de dérivations partielles sa formation comporte relativement à chaque variable. En représentant ces nombres par p, q, ... pour $x, y, \ldots$ respectivement, on dit que cette dérivée est *d'ordres partiels* p, q, ... *par rapport à* $x, y, \ldots$ respectivement, et aussi *d'ordre total* $p + q + \ldots$ sans distinction faite entre les variables. On la représente quelquefois par

$$f_{x,y,\ldots}^{(p,q,\ldots)}(x, y, \ldots),$$

plus souvent par

$$\frac{\partial^{p+q+\ldots} f(x, y, \ldots)}{\partial x^p \, \partial y^q \ldots}.$$

Les dérivées proprement dites, dont il était question dans le paragraphe précédent, sont d'ordre total 1, et se nomment les dérivées *premières*. Les dérivées d'ordre totaux 2, 3, etc., sont les dérivées *secondes, troisièmes,* etc. Enfin, il est quelquefois commode de considérer une fonction olotrope comme étant à elle-même sa dérivée (unique) d'ordre zéro.

Le nombre des dérivées d'ordre total M est évidemment égal à celui des termes d'un polynome homogène de degré M par rapport à l'ensemble des variables. Dans le cas d'une seule variable, il se réduit à 1, quel que soit M.

Ainsi qu'il a été dit plus haut (n° 52), *si une fonction olotrope de* $x, y, \ldots$ *est représentée, dans le voisinage du point* $(x_0, y_0, \ldots)$, *par la série entière*

$$(1) \qquad \Sigma\, a_{m,n,\ldots}(x - x_0)^m (y - y_0)^n \ldots,$$

sa dérivée d'ordres partiels p, q, ... *s'obtient, dans les mêmes limites, en exécutant la dérivation semblable sur tous les termes du développement* (1).

54. *Si l'on considère, d'une part, la dérivée d'ordres partiels $p, q, \ldots$, par rapport à $x, y, \ldots$ respectivement, d'une fonction olotrope $f(x, y, \ldots)$, si l'on considère, d'autre part, le coefficient de $h^p k^q \ldots$ dans le développement de*

$$f(x+h, y+k, \ldots)$$

en une série entière par rapport aux accroissements $h, k, \ldots$, la première de ces deux fonctions est le produit de la seconde par le facteur numérique $1.2\ldots p.1.2\ldots q\ldots$.

Effectivement, soient $(x_0, y_0, \ldots)$ un point pris à volonté dans la région (normale) où l'on considère la fonction olotrope $f(x, y, \ldots)$, et

$$\Sigma a_{m,n,\ldots}(x-x_0)^m(y-y_0)^n\ldots$$

le développement de $f(x, y, \ldots)$ à partir des valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots$: on sait (n° 53) que le développement de

$$f^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x, y, \ldots)$$

à partir des mêmes valeurs s'obtient en effectuant la dérivation d'ordres partiels $p, q, \ldots$ sur tous les termes du précédent. Or (n° 52, I), si quelqu'une des différences $m-p$, $n-q$, ... est négative, la dérivation dont il s'agit, exécutée sur le terme général

$$a_{m,n,\ldots}(x-x_0)^m(y-y_0)^n\ldots,$$

donne un résultat identiquement nul; si aucune des différences $m-p$, $n-q$, ... n'est négative, et si quelqu'une d'entre elles est positive, cette même dérivation donne un résultat dont la valeur *initiale* est nulle; enfin, si les différences $m-p$, $n-q$, ... sont toutes nulles, elle donne pour résultat la constante numérique

$$1.2\ldots p.1.2\ldots q\ldots a_{p,q,\ldots}.$$

De tout ce qui précède, on conclut

$$f^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(x_0, y_0, \ldots) = 1.2\ldots p.1.2\ldots q\ldots a_{p,q,\ldots},$$

ce qui démontre la proposition.

55. En vertu de la proposition ci-dessus établie (n° 54), le développement de

$$f(x_0+h, y_0+k, \ldots)$$

en une série entière par rapport à $h, k, \ldots$ peut évidemment s'écrire sous la forme

$$\Sigma f_{x,y,\ldots}^{(m,n,\ldots)}(x_0, y_0, \ldots)\frac{h^m}{1.2\ldots m}\frac{k^n}{1.2\ldots n}\cdots$$

Si les valeurs initiales des variables sont toutes nulles, les accroissements $h, k, \ldots$ se confondent avec $x, y, \ldots$, et le développement devient

$$\Sigma f_{x,y,\ldots}^{(m,n,\ldots)}(0, 0, \ldots)\frac{x^m}{1.2\ldots m}\frac{y^n}{1.2\ldots n}\cdots$$

Lorsqu'on suppose le nombre des variables égal à 1, les deux développements ainsi obtenus sont identiques, dans leur forme extérieure, à ceux de Taylor et de Maclaurin : mais M. Méray fait remarquer avec raison qu'en les établissant (comme nous venons de le faire) conformément au point de vue qu'il a, le premier, systématiquement adopté, on est conduit à y attacher un sens bien différent de celui qu'y attachaient ces géomètres [1].

Nullité identique d'une fonction olotrope; égalité identique de deux fonctions olotropes [2].

56. Une fonction, olotrope dans une région $\mathfrak{R}$, y est dite *identiquement nulle,* deux fonctions, olotropes dans une région $\mathfrak{R}$, y sont dites *identiquement égales,* lorsque la nullité ou l'égalité a lieu en tout point de cette région (supposée normale).

Lorsqu'une fonction $f(x, y, \ldots)$, olotrope dans une région $\mathfrak{R}$, y est identiquement nulle, toutes ses dérivées le sont aussi.

En effet, si l'on désigne par $(x_0, y_0, \ldots)$ un point déterminé (quelconque) de la région $\mathfrak{R}$, la quantité $f(x_0 + h, y_0 + k, \ldots)$ est, pour toutes valeurs suffisamment petites de $h, k, \ldots$, exprimable par une série entière en $h, k, \ldots$. D'ailleurs, ce développement (unique) a nécessairement tous ses coefficients nuls, puisque, en lui attribuant de pareils coefficients, il exprime évidemment la valeur toujours nulle de notre fonction.

---

(1) *Voir* MÉRAY, *Leçons nouvelles*, etc., 1re Partie, p. 126.

(2) *Ibid.,* 1re Partie, p. 131, 132, 151, 152 et 153.

57. Inversement, *une fonction* $f(x, y, \ldots)$, *olotrope dans une région* $\mathfrak{R}$, *y est identiquement nulle, si, en quelque point de cette région, elle s'annule numériquement avec toutes ses dérivées.*

I. *Si une fonction* $f(x, y, \ldots)$ *est olotrope dans une région* $\mathfrak{R}$, *et si, dans cette dernière, on considère un fragment limité et complet,* $\mathfrak{F}$, *on peut assigner quelque constante positive,* r, *telle que la fonction* $f(x, y, \ldots)$ *admette, en un point quelconque de* $\mathfrak{F}$, *un système d'olomètres (au moins) égaux à* r.

Considérant en effet, dans l'espace $[[x, y, \ldots]]$ (1), la région limitée et complète $\mathfrak{F}$ (comprise tout entière dans $\mathfrak{R}$), nommons *caractéristique* d'un point de cette région toute quantité positive (> 0) ρ, telle que la fonction $f(x, y, \ldots)$ admette au point considéré un système d'olomètres (au moins) égaux à ρ. Cela étant, si un point déterminé $(x', y', \ldots)$ de la région $\mathfrak{F}$ admet parmi ses caractéristiques la constante ρ', tout point $(\xi, \eta, \ldots)$ de cette même région qui satisfait aux relations

$$\mathrm{mod}(\xi - x') < \rho', \qquad \mathrm{mod}(\eta - y') < \rho', \qquad \ldots$$

admettra parmi les siennes (n° 46, II) la plus petite des différences positives

$$\rho' - \mathrm{mod}(\xi - x'), \quad \rho' - \mathrm{mod}(\eta - y'), \quad \ldots,$$

c'est-à-dire une quantité dont la différence à ρ' tombe au-dessous de toute quantité donnée lorsque le point $(\xi, \eta, \ldots)$ est suffisamment voisin de $(x', y', \ldots)$.

Ainsi, les diverses conditions spécifiées au n° 10 relativement aux caractéristiques se trouvent bien remplies dans la région limitée et complète $\mathfrak{F}$, et, comme les caractéristiques sont ici essentiellement supérieures à zéro, il existe bien quelque constante positive, r, possédant la propriété énoncée (n° 13).

II. *Si une fonction* $f(x, y, \ldots)$ *est olotrope dans une région* $\mathfrak{R}$, *et si, dans cette dernière, on trace un arc continu, on peut assigner quelque constante positive,* r, *telle que la fonction* $f(x, y, \ldots)$

---

(1) Cet espace est à n ou $2n$ dimensions, suivant que les n variables $x, y, \ldots$ sont réelles ou imaginaires.

admette, en un point quelconque de l'arc, un système d'olomètres (au moins) égaux à r.

Car, les variables (réelles) s, t, ... dont l'arc dépend (n° 37) étant assujetties à se mouvoir dans un intervalle complexe, c'est-à-dire dans une région de l'espace $[[s, t, \ldots]]$ à la fois limitée et complète, il résulte du n° 18 que l'ensemble des divers points $(x, y, \ldots)$ qui, en vertu des formules définissant l'arc, correspondent (avec répétition possible) aux divers points de l'intervalle complexe, forme, dans l'espace $[[x, y, \ldots]]$, une région à la fois limitée et complète : les conclusions de l'alinéa I sont donc applicables.

III. *Si une fonction $f(x, y, \ldots)$ est olotrope dans une région $\mathfrak{R}$, et si, dans cette dernière, on trace un chemin continu formé d'arcs placés bout à bout* (n° 37), *on peut assigner quelque constante positive, r, telle que la fonction $f(x, y, \ldots)$ admette, en un point quelconque du chemin, un système d'olomètres (au moins) égaux à r.*

C'est là une conséquence immédiate de l'alinéa II.

IV. *Lorsqu'une fonction $f(x, y, \ldots)$ est olotrope dans une région $\mathfrak{R}$, la connaissance des valeurs numériques que prennent la fonction et toutes ses dérivées en un seul point, $(x_0, y_0, \ldots)$, de la région, suffit pour déterminer entièrement sa valeur et celles de toutes ses dérivées en tout autre point,* $(X, Y, \ldots)$, *de la région.*

Effectivement, la région $\mathfrak{R}$ étant normale (n° 42), et, par suite, continue (n°s 41 et 39), les deux points $(x_0, y_0, \ldots)$, $(X, Y, \ldots)$ peuvent être reliés l'un à l'autre par une suite d'arcs continus placés bout à bout dans cette région. En vertu de l'alinéa III, on peut assigner quelque constante positive, r, telle que la fonction $f(x, y, \ldots)$ admette, en un point quelconque du chemin continu ainsi tracé, un système d'olomètres (au moins) égaux à r; et, d'autre part, il résulte du n° 38 que les extrémités initiale et finale d'un pareil chemin peuvent être reliées l'une à l'autre par quelque chemin brisé,

$$(x_0, y_0, \ldots), \quad (x_1, y_1, \ldots), \quad (x_2, y_2, \ldots), \quad \ldots, \quad (x_g, y_g, \ldots), \quad (X, Y, \ldots),$$

ayant tous ses sommets sur les arcs dont il s'agit, et présentant des écarts maxima moindres que r.

Cela posé, la connaissance des valeurs numériques de $f(x, y, \ldots)$ et de toutes ses dérivées au point $(x_0, y_0, \ldots)$ nous permet de construire (idéalement) le développement de $f(x, y, \ldots)$ à partir de $(x_0, y_0, \ldots)$, et, comme les modules de $x_1 - x_0, y_1 - y_0, \ldots$ sont tous moindres que r, l'hypothèse

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad \ldots,$$

introduite dans ce développement et dans toutes ses dérivées, fournira les valeurs prises au point $(x_1, y_1, \ldots)$ par la fonction $f(x, y, \ldots)$ et par toutes ses dérivées. On passera alors du second sommet au troisième comme on a passé du premier au second, et l'on continuera de cette manière jusqu'au sommet final $(X, Y, \ldots)$.

V. Les mêmes notations étant adoptées qu'à l'alinéa IV, si l'on suppose nulles les valeurs numériques prises au point $(x_0, y_0, \ldots)$ par la fonction $f(x, y, \ldots)$ et par toutes ses dérivées, ou, ce qui revient au même, les coefficients du développement initial, on voit que la nullité identique de celui-ci entraîne, de proche en proche, celle de tous les développements subséquents, et que, par suite, la fonction s'annule au point $(X, Y, \ldots)$ avec toutes ses dérivées.

58. *Lorsque deux fonctions, olotropes dans une même région, y sont identiquement égales, leurs dérivées semblables le sont aussi.*

Inversement, *deux fonctions, olotropes dans une même région, y sont identiquement égales, si, en quelque point de cette région, les valeurs numériques de l'une et de ses diverses dérivées sont respectivement égales aux valeurs numériques de l'autre et de ses dérivées semblables.*

Il résulte immédiatement des nos 42 et 54 que la différence,

$$F(x, y, \ldots) - f(x, y, \ldots),$$

de deux fonctions, olotropes dans une région $\mathfrak{R}$, y est elle-même olotrope, et qu'elle a pour dérivée d'ordres partiels $p, q, \ldots$ la différence des dérivées d'ordres partiels $p, q, \ldots$ des deux fonctions : cette simple remarque ramène les deux propositions qu'il s'agit d'établir à celles des nos 56 et 57.

Principe général de la composition des fonctions olotropes [1].

59. Soient :

(1) $$f(u, v, \ldots)$$

une composante donnée;

(2) $$U(x, y, \ldots), \quad V(x, y, \ldots), \quad \ldots$$

des fonctions simples données (en même nombre que les variables $u, v, \ldots$ de la composante);

(3) $$F(x, y, \ldots) = f[U(x, y, \ldots), V(x, y, \ldots), \ldots]$$

la fonction composée résultant de leur combinaison (n° 18, III); $x_0, y_0, \ldots$ des valeurs particulières attribuées aux variables $x, y, \ldots$;

$$u_0 = U(x_0, y_0, \ldots), \quad v_0 = V(x_0, y_0, \ldots), \quad \ldots$$

les valeurs correspondantes des fonctions simples (2).

Si, d'une part, autour du point $(u_0, v_0, \ldots)$, *pris comme centre, on peut assigner quelque domaine,* $\mathfrak{D}$, *dans toute l'étendue duquel la composante* (1) *soit exprimable à l'aide d'un développement entier par rapport aux différences* $u - u_0$, $v - v_0, \ldots$; *si, d'autre part, autour du point* $(x_0, y_0, \ldots)$, *pris comme centre, on peut assigner quelque domaine,* $\mathfrak{d}$, *dans toute l'étendue duquel chacune des fonctions simples* (2) *soit exprimable à l'aide d'un développement entier par rapport aux différences* $x - x_0$, $y - y_0, \ldots$: *la fonction composée* (3) *jouit certainement de cette dernière propriété dans toute l'étendue d'un domaine suffisamment petit concentrique à* $\mathfrak{d}$.

Effectivement, soient :

Δ une quantité positive inférieure à tous les rayons du domaine $\mathfrak{D}$;
δ une quantité positive inférieure à tous ceux du domaine $\mathfrak{d}$;

(4) $$\Sigma K_{M,N,\ldots}(u - u_0)^M (v - v_0)^N \ldots = f(u, v, \ldots)$$

---

(1) *Voir* MÉRAY, *Leçons nouvelles*, etc., 1re Partie, p. 209 et suiv.

le développement de la composante à partir de u_0, v_0, ... ;

(5) $$\left\{\begin{array}{l}\Sigma a_{m,n,\ldots}(x-x_0)^m(y-y_0)^n\ldots = \mathrm{U}(x, y, \ldots) - u_0,\\ \Sigma b_{m,n,\ldots}(x-x_0)^m(y-y_0)^n\ldots = \mathrm{V}(x, y, \ldots) - v_0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{array}\right.$$

les séries obtenues en développant les fonctions simples à partir de x_0, y_0, ..., et supprimant dans ces développements respectifs les termes constants u_0, v_0, ... ;

ξ, η, ..., $\alpha_{m,n,\ldots}$, $\beta_{m,n,\ldots}$, ... les modules respectifs de $x-x_0$, $y-y_0$, ..., $a_{m,n,\ldots}$, $b_{m,n,\ldots}$, ...

Si, dans chacune des séries (5), on remplace chaque terme par son module, les séries

(6) $$\left\{\begin{array}{l}\Sigma \alpha_{m,n,\ldots}\xi^m\eta^n\ldots,\\ \Sigma \beta_{m,n,\ldots}\xi^m\eta^n\ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

ainsi obtenues ont des sommes qui deviennent plus petites que toute quantité donnée pour des valeurs suffisamment petites de ξ, η, ... : on peut donc, au-dessous de δ, assigner une quantité positive δ', telle que, pour toutes valeurs de ξ, η, ... inférieures à δ', les sommes des séries (6) restent inférieures à Δ.

Cela posé, assujettissons désormais x, y, ... à vérifier les relations

(7) $$\operatorname{mod}(x-x_0) < \delta', \qquad \operatorname{mod}(y-y_0) < \delta', \qquad \ldots.$$

Puisque les sommes des séries (6) sont alors inférieures à Δ, celles des séries (5) présentent, à plus forte raison, des modules inférieurs à cette quantité, et l'on a

$$\begin{array}{l}\operatorname{mod}[\mathrm{U}(x, y, \ldots) - u_0] < \Delta,\\ \operatorname{mod}[\mathrm{V}(x, y, \ldots) - v_0] < \Delta,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{array}$$

la valeur de la fonction composée peut donc s'obtenir en substituant à $u-u_0$, $v-v_0$, ..., dans la série (4), les sommes respectives des séries (5). Dans la série résultant de cette substitution, considérons le terme général

(8) $$\mathrm{K}_{\mathrm{M,N},\ldots}[\Sigma a_{m,n,\ldots}(x-x_0)^m(y-y_0)^n\ldots]^{\mathrm{M}}[\Sigma b_{m,n,\ldots}(x-x_0)^m(y-y_0)^n\ldots]^{\mathrm{N}}\ldots,$$

et développons-le suivant la règle de multiplication des séries (sans réduction des termes semblables en $x - x_0, y - y_0, \ldots$) (n° 25) : dans ce développement, la somme des modules des termes est égale à

$$\operatorname{mod} K_{M,N,\ldots} [\Sigma \alpha_{m,n,\ldots} \xi^m \eta^n \ldots]^M [\Sigma \beta_{m,n,\ldots} \xi^m \eta^n \ldots]^N \ldots,$$

par suite inférieure à

(9) $$\operatorname{mod} K_{M,N,\ldots} \Delta^M \Delta^N \ldots.$$

Or, la quantité (9) est le terme général d'une série convergente : car si, dans la série (4), on attribue aux différences $u - u_0, v - v_0, \ldots$ des valeurs dont les modules soient égaux aux quantités $\Delta, \Delta, \ldots$, par suite inférieurs aux rayons du domaine de convergence $\mathfrak{D}$, le module du terme général y acquiert précisément la valeur (9).

Si donc on suppose vérifiées les relations (7), non seulement les séries partielles, $T_{M,N,\ldots}$, analogues à celle que fournit l'expression (8) développée mécaniquement par la règle de multiplication, restent convergentes lorsqu'à chaque terme on substitue son module, mais encore les sommes de ces diverses séries de modules forment elles-mêmes une série convergente. On peut donc, en vertu des n°s 24 et 23, exécuter, sur la série qui a pour termes les sommes des séries partielles $T_{M,N,\ldots}$, les deux opérations successives suivantes : 1° la transformer en une autre procédant suivant les termes élémentaires des séries partielles $T_{M,N,\ldots}$; 2° ranger et grouper arbitrairement les termes de la série résultante, et, notamment, effectuer la réduction des termes semblables en $x - x_0, y - y_0, \ldots$. Or, on tombe ainsi sur une série entière par rapport à ces différences : c'est ce qu'il s'agissait d'établir.

De la démonstration ci-dessus résulte, en outre, la règle suivante :

Le développement de la fonction composée à partir de $x_0, y_0, \ldots$ peut s'obtenir en combinant le développement de la composante, effectué à partir des valeurs correspondantes, $u_0, v_0, \ldots$, des fonctions simples, avec ceux de

$$U(x, y, \ldots) - u_0, \quad V(x, y, \ldots) - v_0, \quad \ldots,$$

effectués à partir de $x_0, y_0, \ldots$: il suffit de remplacer respectivement par les derniers développements les différences

$$u - u_0, \quad v - v_0, \quad \ldots,$$

qui figurent dans chaque terme du premier, d'appliquer à chaque résultat la règle de multiplication des séries (n° 25), *de former, sans omission ni répétition, une série procédant suivant les termes élémentaires des séries partielles ainsi obtenues, et d'opérer finalement la réduction des termes semblables en* $x - x_0$, $y - y_0$, ...

60. *Si, d'une part, les fonctions simples*

$$(10) \qquad U(x, y, \ldots), \quad V(x, y, \ldots), \quad \ldots$$

sont toutes olotropes dans une région $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$; *si, d'autre part, la composante* $f(u, v, \ldots)$ *jouit de la même propriété dans une région* $\mathfrak{R}_{u,v,\ldots}$; *si enfin, pour un choix arbitraire du point* $(x, y, \ldots)$ *dans la première région, l'association des valeurs prises par les fonctions simples* (10) *donne un point constamment situé dans la seconde : les fonctions composées*

$$(11) \qquad \begin{cases} f[U(x, y, \ldots), V(x, y, \ldots), \ldots], \\ f_{u,v,\ldots}^{(p,q,\ldots)}[U(x, y, \ldots), V(x, y, \ldots), \ldots] \end{cases}$$

ne peuvent manquer d'être olotropes dans la région $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$.

Il suffit d'observer que $f_{u,v,\ldots}^{(p,q,\ldots)}(u, v, \ldots)$ est olotrope dans les mêmes limites que $f(u, v, \ldots)$ (n° 49) (n° 54), et d'avoir égard à la proposition du numéro précédent.

61. Nous noterons les conséquences particulières suivantes :

I. *Quand la composante* $f(u, v, \ldots)$ *est olotrope dans toute l'étendue de l'espace* $[[u, v, \ldots]]$ *(et, notamment, quand elle se réduit à un polynome entier), les fonctions composées* (11) *sont olotropes dans toute région,* $\mathfrak{R}_{x,y,\ldots}$, *où les fonctions simples le sont à la fois.*

II. *L'inverse arithmétique d'une fonction* $U(x, y, \ldots)$ *est olotrope dans toute région où cette dernière l'est elle-même sans s'annuler.*

Effectivement, la fonction composée $\frac{1}{U(x, y, \ldots)}$ s'obtient en combinant la fonction simple $U(x, y, \ldots)$ avec la composante $\frac{1}{u}$. Or, si

l'on désigne par $(x_0, y_0, \ldots)$ un point particulier quelconque de la région où l'on considère la fonction olotrope $U(x, y, \ldots)$, cette dernière peut, dans toute l'étendue de quelque domaine ayant pour centre $(x_0, y_0, \ldots)$, s'exprimer à l'aide d'un développement entier par rapport aux différences $x - x_0, y - y_0, \ldots$; d'un autre côté, la valeur, u_0, qu'elle acquiert en $(x_0, y_0 \ldots)$ est, par hypothèse, essentiellement différente de zéro, en sorte que $\frac{1}{u}$ peut, dans toute l'étendue de quelque domaine ayant pour centre u_0, s'exprimer à l'aide d'un développement entier par rapport à $u - u_0$ (n° 48) : donc, en vertu du n° 59, $\frac{1}{U(x, y, \ldots)}$ peut, dans toute l'étendue de quelque domaine ayant pour centre $(x_0, y_0, \ldots)$, s'exprimer à l'aide d'un développement entier par rapport aux différences $x - x_0, y - y_0, \ldots$.

III. *Le rapport* $\frac{U(x, y, \ldots)}{V(x, y, \ldots)}$ *est olotrope dans toute région où ses deux termes le sont sans que son dénominateur s'annule.*

Car on peut le considérer comme une fonction composée, provenant de la composante entière uv et des deux fonctions simples

$$U(x, y, \ldots), \quad \frac{1}{V(x, y, \ldots)},$$

qui sont toutes deux olotropes dans la région dont il s'agit, la première par hypothèse, la seconde en vertu de II.

IV. *Une fonction rationnelle* (quotient de deux fonctions entières) *est olotrope dans toute région où son dénominateur ne s'annule pas.*

Il suffit d'observer que le numérateur et le dénominateur, étant l'un et l'autre des fonctions entières, sont indéfiniment olotropes, puis de se reporter à l'alinéa III.

V. *Une fonction rationnelle de fonctions simples est olotrope dans toute région où ces dernières le sont sans que le dénominateur s'annule.*

Il suffit d'observer que le numérateur et le dénominateur, provenant l'un et l'autre d'une composante entière, sont olotropes dans la région considérée (I), puis de se reporter à l'alinéa III.

Différentiation des fonctions composées (¹).

62. La différentiation d'une fonction composée s'effectue d'ordinaire à l'aide d'une formule très simple, permettant d'écrire immédiatement ses dérivées premières, et qu'on applique plusieurs fois de suite pour le calcul des dérivées d'ordre supérieur.

La dérivée première relative à x de la fonction composée

$$F = f(U, V, \ldots),$$

qui s'obtient par la combinaison des fonctions simples

$$U(x, y, \ldots), \quad V(x, y, \ldots), \quad \ldots$$

avec la composante $f(u, v, \ldots)$, est donnée par la formule

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial x} + \ldots, \tag{1}$$

où il faut, naturellement, faire dans $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \ldots$ les substitutions

$$u = U, \quad v = V, \quad \ldots.$$

Si l'on se souvient en effet qu'on peut, dans le calcul d'une dérivée première relative à x, considérer x comme étant momentanément seule variable (n° 50), si d'autre part on se reporte à la règle finale du n° 59, on voit qu'il suffit, pour obtenir la dérivée cherchée, de considérer le développement

$$f(u + \Delta u, v + \Delta v, \ldots) = f(u, v, \ldots) + \frac{\partial f}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial f}{\partial v}\Delta v + \ldots, \tag{2}$$

d'y substituer à $\Delta u, \Delta v, \ldots$ les séries entières en Δx

$$\sum \frac{\partial^m U}{\partial x^m}\frac{\Delta x^m}{1.2\ldots m}, \quad \sum \frac{\partial^n V}{\partial x^n}\frac{\Delta x^n}{1.2\ldots n}, \quad \ldots, \tag{3}$$

privées de leurs termes indépendants respectifs, d'ordonner le résultat par rapport à Δx, et de prendre le coefficient de la première puissance de Δx. Or, comme les séries (3), privées de leurs termes indépendants, contiennent toutes Δx en facteur, la partie linéaire

(¹) *Voir* MÉRAY, *Leçons nouvelles,* etc., 1ʳᵉ Partie, p. 215 et suiv.

et homogène en Δu, Δv, ... du développement (2) donnera seule dans le résultat des termes linéaires en Δx. Il suffira donc, pour obtenir ces derniers, de multiplier respectivement les termes en Δx des séries (3) par les coefficients de Δu, Δv, ... dans le développement (2); en ajoutant les produits ainsi obtenus, on sera bien conduit à la formule (1).

63. Appliquons à quelques cas très simples la règle ci-dessus établie.

I. *Composante linéaire et homogène*

$$f(u, v, \ldots) = au + bv + \ldots,$$

où a, b, ... sont des constantes.

On a alors évidemment

$$\frac{\partial f}{\partial u} = a, \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = b, \qquad \ldots,$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial x}(a\mathrm{U} + b\mathrm{V} + \ldots) = a\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + b\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x} + \ldots;$$

on trouve ainsi, pour la dérivée cherchée, *la même fonction linéaire et homogène des dérivées semblables des fontions simples.*

Cette règle s'étend immédiatement aux dérivations d'ordre supérieur.

En particulier :

Si l'on multiplie une fonction donnée par une constante, toute dérivée du produit est le produit, par cette constante, de la dérivée semblable de cette fonction.

Toute dérivée d'une somme algébrique de fonctions est la somme algébrique des dérivées semblables de ces fonctions.

II. *Composante*

$$f(u, v, w, \ldots) = uvw\ldots.$$

On a évidemment

$$\frac{\partial f}{\partial u} = vw\ldots, \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = uw\ldots, \qquad \frac{\partial f}{\partial w} = uv\ldots, \qquad \ldots.$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{UVW}\ldots) = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\mathrm{VW}\ldots + \mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\mathrm{W}\ldots + \mathrm{UV}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x}\ldots + \ldots.$$

C'est la règle connue pour former les dérivées premières d'un produit.

III. *Composante* $f(u) = u^\alpha$, *où* α *désigne un entier positif ou négatif* (¹).

Si l'entier α est positif (ou nul), on a, comme nous l'avons vu plus haut (n° 51, 2°),

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \alpha u^{\alpha-1},$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{U}^\alpha) = \alpha \mathrm{U}^{\alpha-1}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}.$$

Ces formules subsistent pour α négatif. Si l'on pose en effet $\alpha = -\alpha'$, où α' désigne un entier positif, on a

$$f(u) = u^{-\alpha'} = \frac{1}{u^{\alpha'}} = \left(\frac{1}{u}\right)^{\alpha'},$$

d'où l'on déduit, en vertu du cas déjà examiné et du n° 51 (4°),

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \alpha'\left(\frac{1}{u}\right)^{\alpha'-1}\frac{\partial\left(\frac{1}{u}\right)}{\partial u} = \alpha'\left(\frac{1}{u}\right)^{\alpha'-1}\left(-\frac{1}{u^2}\right)$$
$$= -\alpha'\frac{1}{u^{\alpha'+1}} = -\alpha' u^{-\alpha'-1} = \alpha u^{\alpha-1}.$$

On aura donc, cette fois encore,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{U}^\alpha) = \alpha \mathrm{U}^{\alpha-1}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}.$$

C'est la règle connue pour former les dérivées premières d'une puissance entière à exposant positif ou négatif.

IV. *Composante* $f(u, v) = \frac{u}{v}$.

On a (n° 50) (n° 63, I) (n° 51, 4°)

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{v}, \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{u}{v^2},$$

(¹) Pour la signification de l'exposant entier négatif, *voir* la Note de la page 80.

d'où

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{1}{V}\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{U}{V^2}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V\frac{\partial U}{\partial x} - U\frac{\partial V}{\partial x}}{V^2}.$$

C'est la règle connue pour former les dérivées premières d'un quotient.

64. Supposons maintenant qu'on ait à former les dérivées d'ordre supérieur d'une fonction composée,

$$(4) \qquad F(x, y, \ldots) = f[U(x, y, \ldots), V(x, y, \ldots), \ldots],$$

des variables $x, y, \ldots$.

En vertu de la formule (1), toute dérivée première de cette fonction est une somme de produits où figurent comme facteurs les dérivées premières des fonctions simples

$$U(x, y, \ldots), \quad V(x, y, \ldots), \quad \ldots$$

et de la composante $f(u, v, \ldots)$. De ces dérivées, les unes dépendent directement de $x, y, \ldots$ et sont olotropes dans les mêmes limites que les fonctions simples ; les autres sont des fonctions composées dont les dérivées premières sont calculables par la même règle et entre les mêmes limites que s'il s'agissait de (4) : en combinant la règle dont il s'agit avec les règles particulières qui donnent les dérivées premières d'une somme et d'un produit, on pourra exprimer toute dérivée seconde de la fonction composée (4) par une somme de produits où figurent comme facteurs les dérivées premières et secondes des fonctions simples et de la composante.

On passera de la même manière aux dérivées du troisième ordre, et ainsi de suite indéfiniment.

65. La différentiation des fonctions composées conduit à des expressions faisant partie d'une classe dont il convient de donner une définition générale.

Si, dans une composante quelconque, on suppose que les diverses variables indépendantes soient remplacées, les unes par d'autres variables indépendantes $x, y, \ldots$, les autres par des fonctions $U, V, \ldots$ de $x, y, \ldots$, les autres enfin par des dérivées déterminées, $\Omega, \ldots$, de $U, V, \ldots$, cette opération engendre, en définitive, une fonction

de $x, y, \ldots$ que nous nommerons *fonction composée différentielle* (1).

Cela étant, *si les fonctions* U, V, ... *sont toutes olotropes dans une région* $\mathfrak{R}$, *si la composante l'est elle-même dans une région* $\mathfrak{R}'$, *si enfin, pour un choix arbitraire d'un point de la première région, l'association des valeurs prises par les variables* $x, y, \ldots$, *les fonctions* U, V, ... *et les dérivées* Ω, ... *donne un point constamment situé dans la seconde : la fonction composée différentielle dont il s'agit est olotrope dans la première région.*

Il en est de même de toutes celles qu'on obtient en prenant pour nouvelle composante quelqu'une des dérivées partielles de la composante donnée.

Cette proposition est une conséquence immédiate du n° 60. Entre les limites qu'elle assigne, une fonction composée différentielle a ses dérivées de tous ordres calculables par l'application des règles générales (n°s 62 et 64).

66. Les mêmes notations étant adoptées qu'au numéro précédent, si, dans l'expression

$$(5) \qquad f(x, y, \ldots, \mathrm{U}, \mathrm{V}, \ldots, \Omega, \ldots),$$

on laisse indéterminées les fonctions U, V, ... de $x, y, \ldots$ (tout le reste étant déterminé), on obtient, suivant qu'elles sont choisies de telle ou telle façon, telle ou telle fonction composée de $x, y, \ldots$. Cela étant, *pour que la fonction composée soit identiquement nulle en* $x, y, \ldots$ *indépendamment du choix de* U, V, ..., *il faut et il suffit que l'expression* (5) *soit identiquement nulle en*

$$x, \quad y, \quad \ldots, \quad \mathrm{U}, \quad \mathrm{V}, \quad \ldots, \quad \Omega, \quad \ldots,$$

considérées comme autant de variables indépendantes distinctes.

La condition, évidemment suffisante, est, de plus, nécessaire : car, en désignant par

$$(x_0, y_0, \ldots, \mathrm{U}_0, \mathrm{V}_0, \ldots, \Omega_0, \ldots)$$

un point arbitrairement choisi dans la région où la composante est supposée olotrope, on peut assujettir les fonctions indéterminées

---

(1) Comme cas particulier, on peut, naturellement, supposer qu'aucune dérivée des fonctions U, V, ... n'intervient dans la formation de la fonction composée.

U, V, ..., et celles d'entre leurs dérivées qui figurent dans (5), à satisfaire aux conditions initiales

$$\left.\begin{array}{l} U = U_0 \\ V = V_0 \\ \ldots\ldots \\ \Omega = \Omega_0 \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \text{pour} \quad x - x_0 = y - y_0 = \ldots = 0,$$

et l'on devra avoir, en vertu de la nullité requise,

$$f(x_0, y_0, \ldots, U_0, V_0, \ldots, \Omega_0, \ldots) = 0.$$

67. Les mêmes notations étant adoptées, *pour que les deux fonctions composées*

(6) $$f(x, y, \ldots, U, V, \ldots, \Omega, \ldots),$$
(7) $$F(x, y, \ldots, U, V, \ldots, \Omega, \ldots)$$

soient identiquement égales en x, y, ... *indépendamment du choix de* U, V, ..., *il faut et il suffit que les expressions* (6) *et* (7) *soient identiquement égales en*

$$x, \; y, \; \ldots, \; U, \; V, \; \ldots, \; \Omega, \; \ldots,$$

considérées comme autant de variables indépendantes distinctes.

On suppose, naturellement, que les composantes f et F admettent quelque région commune d'olotropie : cela étant, on ramènera le théorème actuel au précédent en considérant la fonction composée obtenue par la différence des deux premières.

68. Les mêmes notations étant adoptées, *si, dans l'expression*

$$f(x, y, \ldots, U, V, \ldots, \Omega, \ldots),$$

on laisse indéterminé le choix des fonctions U, V, ... *de* $x, y, \ldots$, *deux expressions d'une même dérivée quelconque de la fonction composée, obtenues par l'application des règles générales* (n°s 62 et 64), *sont identiquement égales entre elles quand on y considère* $x, y, \ldots$, U, V, ... *et les dérivées de tous ordres de* U, V, ... *comme autant de variables indépendantes distinctes.*

Il suffit, pour s'en convaincre, d'observer que les deux expressions doivent être identiquement égales en x, y, ... indépendamment du choix de U, V, ..., et d'appliquer le théorème précédent.

CHAPITRE IV.

GÉNÉRALITÉS SUR LE CALCUL DES FONCTIONS PAR CHEMINEMENT [1].

Définitions premières relatives au calcul des fonctions par cheminement; monodromie.

69. Une série entière en $x-x_0, y-y_0, \ldots$, admettant, autour du centre $(x_0, y_0, \ldots)$, quelque domaine de convergence, définit, comme nous l'avons vu (nº 46, I), une fonction olotrope de $x, y, \ldots$ dans l'intérieur d'un pareil domaine [2]. Donnons à ce développement la forme de Taylor; puis, désignant par $(x_1, y_1, \ldots)$ un point intérieur au domaine, introduisons dans ce développement et dans toutes ses dérivées l'hypothèse numérique $x=x_1, y=y_1, \ldots$. La connaissance des sommes de ces divers développements nous permettra évidemment de construire celui de notre fonction à partir des nouvelles valeurs initiales $x_1, y_1, \ldots$: ce deuxième développement de Taylor, entier en $x-x_1, y-y_1, \ldots$, admettra certainement quelque domaine de convergence, et nous dirons, pour abréger, qu'il *se raccorde* avec le précédent.

Cela posé, considérons, dans l'espace $[[x, y, \ldots]]$, un chemin brisé ayant pour sommets successifs

$$(1)\quad (x_0, y_0, \ldots),\quad (x_1, y_1, \ldots),\quad (x_2, y_2, \ldots),\quad \ldots,\quad (x_g, y_g, \ldots),\quad (X, Y, \ldots).$$

Si, à partir de ces sommets successifs, on peut construire autant de développements dont chacun se raccorde avec le précédent, et dont le premier ne soit autre que le développement donné, le chemin brisé (1) sera dit *praticable* relativement au développement donné. D'après cela, il faudra donc, pour que le chemin (1) soit praticable, que le développement donné admette des rayons de convergence

[1] *Voir* MÉRAY, *Leçons nouvelles*, etc., 1re Partie, p. 130 et suiv.

[2] Il va sans dire que, ici encore, les variables $x, y, \ldots$ sont supposées indifféremment *réelles* ou *imaginaires*.

respectivement supérieurs aux modules des différences $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, ..., ce qui permettra de construire, à partir des valeurs x_1, y_1, ..., un deuxième développement se raccordant avec le premier ; il faudra ensuite que ce nouveau développement admette des rayons de convergence respectivement supérieurs aux modules des différences $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, ..., ce qui permettra de construire, à partir de x_2, y_2, ..., un troisième développement se raccordant avec le second ; et ainsi de suite jusqu'au développement construit à partir de x_g, y_g, ..., qui doit admettre des rayons de convergence supérieurs aux modules des différences $X - x_g$, $Y - y_g$, ..., afin qu'un dernier développement puisse être finalement construit à partir de X, Y, ...

Nous avons déjà eu l'occasion, dans ce qui précède (n° 57, IV et V), d'effectuer un cheminement de cette nature, et nous avons fait voir que, lorsqu'une fonction de x, y, ... est olotrope dans une région, la connaissance du développement de la fonction à partir d'un seul point de la région suffit pour qu'on puisse construire, par l'opération échelonnée que nous venons de décrire, son développement à partir d'un autre point quelconque de la même région. Mais il va sans dire qu'on peut se proposer d'effectuer des cheminements analogues en prenant comme base des calculs successifs, non plus un développement fourni par telle ou telle fonction qu'on sait être olotrope dans telle ou telle région, mais une série entière en $x - x_0$, $y - y_0$, ..., arbitrairement choisie sous la seule condition d'admettre quelque domaine de convergence. Tant qu'on ne franchit pas les limites de convergence du développement initial, ce que nous venons de dire reste applicable, puisque la somme du développement définit, dans tout domaine de convergence, une fonction olotrope des variables x, y, ... ; mais, au delà, toute certitude disparaît, en général, quant à la possibilité du cheminement. Il y a plus : si l'on considère deux chemins brisés partant du point $(x_0, y_0, \ldots)$ et aboutissant au même sommet final, ces deux chemins, à supposer qu'ils soient l'un et l'autre praticables par rapport au développement donné, peuvent conduire, suivant les cas, soit au même développement final, soit, au contraire, à deux développements distincts.

Dans l'Ouvrage déjà cité de M. Méray, le développement entier en $x - x_0$, $y - y_0$, ... choisi comme base du calcul précédent est qualifié de *fondamental;* de même les premières valeurs, x_0, y_0, ...,

des variables indépendantes [cette qualification s'étend d'elle-même au point $(x_0, y_0, \ldots)$ dont elles sont les coordonnées réelles ou imaginaires (n°s 1 et 15)]. Un développement fondamental donné (admettant quelque domaine de convergence) est dit définir, non pas une fonction, mais une *pseudo-fonction* de $x, y, \ldots$ [1] : pour plus de simplicité toutefois, M. Méray remplace souvent le mot *pseudo-fonction* par le mot *fonction*, auquel il attache le même sens [2].

Si à un développement fondamental quelconque on substitue sa dérivée d'ordres partiels $p, q, \ldots$, tout chemin brisé praticable relativement aux anciennes données l'est encore relativement aux nouvelles, et les développements successifs obtenus dans le second cas sont les dérivées d'ordres partiels $p, q, \ldots$ de ceux qu'on obtient dans le premier. Cette deuxième pseudo-fonction se nomme la *dérivée d'ordres partiels* $p, q, \ldots$ de la proposée.

Enfin, si l'on considère simultanément diverses pseudo-fonctions de $x, y, \ldots$ définies par un même point fondamental et divers développements fondamentaux, une expression de forme entière par rapport aux sommes de ces développements et de leurs dérivées d'ordres quelconques définit évidemment une nouvelle pseudo-fonction; et tout chemin praticable à la fois pour les diverses pseudo-fonctions données ne peut manquer de l'être aussi pour la nouvelle.

70. Considérons actuellement, d'une part, une pseudo-fonction de $x, y, \ldots$, définie, conformément aux explications qui précèdent, par un point fondamental, $(x_0, y_0, \ldots)$, et par un développement fondamental; d'autre part, une région *continue*, $\mathfrak{R}$, extraite de l'espace $\left[\left[x, y, \ldots\right]\right]$, et contenant le point $(x_0, y_0, \ldots)$. Nous dirons que la pseudo-fonction dont il s'agit est *calculable par cheminement dans la région* $\mathfrak{R}$ *avec les rayons de convergence* $R_x, R_y, \ldots$, si tout chemin brisé ayant son premier sommet au point fondamental, ses divers sommets dans la région $\mathfrak{R}$ et des écarts maxima (n° 38) respectivement inférieurs à $R_x, R_y, \ldots$ est praticable pour la pseudo-fonction et conduit à des développements successifs admettant tous comme rayons de convergence $R_x, R_y, \ldots$.

---

[1] Que M. Méray qualifie d'*oloïde*.

[2] En y adjoignant l'épithète *localement olotrope*.

Cette condition étant supposée réalisée, si, de plus, le développement final auquel on est conduit à l'extrémité d'un pareil chemin brisé dépend uniquement des coordonnées de cette extrémité, et non du chemin suivi pour y arriver, la pseudo-fonction sera dite *monodrome* dans la région $\mathfrak{R}$.

Toute pseudo-fonction monodrome dans une région normale y peut être assimilée à une véritable fonction olotrope (n°s 41 et 42).

Effectivement, il résulte tout d'abord de la monodromie supposée qu'à tout point de cette région normale on peut faire correspondre un développement bien déterminé, et que, dès lors, la considération des termes constants des divers développements définit, dans la région dont il s'agit, une fonction *proprement dite* de $x, y, \ldots$.

Cela étant, désignons par $(X, Y, \ldots)$ un point quelconque de la région, par r une constante positive ne surpassant aucun des rayons R_x, R_y, ..., telle, en outre, que le domaine $\mathfrak{d}$, ayant pour centre le point $(X, Y, \ldots)$ avec des rayons tous égaux à r, soit entièrement situé dans la région ; désignons enfin par $(x', y', \ldots)$ un point quelconque de ce domaine. Pour avoir le développement qui correspond à ce dernier point, on peut, en vertu de la monodromie supposée, partir du développement qui correspond au point $(X, Y, \ldots)$, et opérer, de $(X, Y, \ldots)$ en $(x', y', \ldots)$, un cheminement *direct* (c'est-à-dire exclusivement composé du sommet initial et du sommet final) : la valeur de notre fonction au point $(x', y', \ldots)$ est, par définition, le terme constant du développement résultant, et s'obtient, dès lors (n° 69), en introduisant dans le développement qui correspond au point $(X, Y, \ldots)$ l'hypothèse numérique

$$x = x', \quad y = y', \quad \ldots;$$

elle est donc, dans toute l'étendue du domaine $\mathfrak{d}$, exprimable à l'aide d'une série entière par rapport aux différences $x - X$, $y - Y$, ...

Régions monodromiques (1).

71. Certaines régions, extraites de l'espace $[[x, y, \ldots]]$, jouissent, par leur *forme* même, de cette propriété remarquable, que le seul

(1) Pour définir les régions *monodromiques*, M. Méray considère, dans les plans qui servent à la notation graphique des variables x, y, ..., certaines aires, S_x,

fait, pour une pseudo-fonction, d'y être calculable par cheminement, entraîne comme conséquence nécessaire la *monodromie* (sous la seule condition que, dans les chemins brisés parcourus, les sommets successifs soient suffisamment rapprochés). L'examen de ce cas remarquable nécessite tout d'abord quelques définitions nouvelles.

Nous nommerons *lacet* tout chemin brisé dont le sommet final coïncide avec le sommet initial; le point où se trouvent réunis les deux sommets extrêmes sera l'*origine du lacet*.

Nous nommerons *réseau* une suite (limitée) de lacets,

$$L_0, \quad L_1, \quad L_2, \quad \ldots, \quad L_p,$$

ayant tous la même origine et le même nombre de sommets, et dont le premier, L_0, a tous ses sommets confondus avec l'origine commune; cette dernière sera l'*origine du réseau*.

Étant donné, dans l'espace $\big[[x, y, \ldots]\big]$, un réseau, prenons-y à volonté, soit deux sommets consécutifs appartenant à un même lacet, soit deux sommets de même rang appartenant à deux lacets consécutifs, et formons les différences entre les coordonnées semblables de ces deux points; en répétant l'opération de toutes les manières possibles, nous obtiendrons le Tableau

$$\begin{array}{ll} x' - x'', & \ldots, \\ y' - y'', & \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots. \end{array}$$

Cela étant, si, dans les lignes respectives du Tableau, on évalue les

---

S_y, ... (*voir* au Chapitre III la note du n° 42), et il assigne à ces aires des formes telles *qu'on ne puisse y tracer deux groupes de chemins conduisant des valeurs fondamentales* x_0, y_0, ... *à un même autre système quelconque de valeurs des variables* X, Y, ..., *sans qu'il soit possible d'amener les chemins de l'un de ces groupes à coïncider géométriquement avec ceux de l'autre par des déformations progressives exécutées uniquement à l'intérieur de ces aires.*

« Les aires, ajoute M. Méray, n'auraient pas la forme prescrite par l'énoncé, si l'une d'elles était perforée, si S_x par exemple était une couronne limitée par deux circonférences concentriques.... Pour qu'elles aient la forme voulue, il faut évidemment et il suffit que toutes soient *imperforées,* c'est-à-dire qu'aucune d'elles n'offre de solutions de continuité intérieures analogues à celles qu'on pourrait pratiquer dans une feuille de papier de forme quelconque en y frappant des coups d'emporte-pièce qui n'entameraient pas son bord et n'empiéteraient pas les uns sur les autres. » (*Leçons nouvelles,* etc., 1re Partie, p. 134 et 135).

Il nous a semblé que cette définition laissait un peu à désirer au point de vue de la précision analytique : c'est ce qui nous a conduit à la modifier comme ci-dessus.

plus grands modules, μ_x, μ_y, ..., que présentent les différences dont il s'agit, ces quantités μ_x, μ_y, ... se nommeront les *écarts maxima du réseau*.

Ces diverses définitions étant posées, les régions auxquelles nous avons fait allusion plus haut sont celles qui, étant *continues,* satisfont en outre à la condition suivante :

Une constante positive α étant donnée, on peut assigner une constante positive β, non supérieure à α, et telle, que tout lacet ayant ses divers sommets dans la région avec des écarts maxima moindres que β (n° 38) *puisse être considéré comme le lacet final de quelque réseau ayant ses divers sommets dans la région avec des écarts maxima moindres que α* ([1]).

Il est facile de voir que la remarque du n° 4, dont l'exactitude a déjà été constatée pour les régions limitées, complètes, continues, normales (nos 4, 39, 41), s'applique encore aux régions ci-dessus définies.

72. Les régions dont il s'agit donnent lieu à la proposition capitale suivante :

Toute pseudo-fonction de x, y, ... calculable par cheminement avec les rayons R_x, R_y, ... dans une région, $\mathfrak{R}$, qui (outre la continuité) présente le caractère spécifié au numéro précédent, y est certainement monodrome avec des rayons r_x, r_y, ... convenablement choisis au-dessous de R_x, R_y, ...

En d'autres termes, si, parmi les chemins brisés (tous praticables pour la pseudo-fonction) qui partent du point fondamental, et qui, avec des écarts maxima moindres que R_x, R_y, ..., ont tous leurs sommets dans la région $\mathfrak{R}$, on s'astreint à ne considérer que ceux dont les écarts maxima sont moindres que r_x, r_y, ..., le développement auquel on est conduit à l'extrémité d'un pareil chemin dépend

---

([1]) Ou, ce qui revient au même : Une constante positive α étant donnée, on peut assigner une constante positive γ, non supérieure à α, et telle, que tout lacet ayant ses divers sommets dans la région et deux sommets consécutifs quelconques à une distance mutuelle moindre que γ, puisse être considéré comme le lacet final de quelque réseau ayant ses divers sommets dans la région, deux sommets consécutifs quelconques d'un même lacet à une distance mutuelle moindre que α, et deux sommets de même rang de deux lacets consécutifs quelconques à une distance mutuelle également moindre que α.

uniquement des coordonnées de cette extrémité, et non du chemin suivi pour y arriver.

I. Dans ce qui suit, nous aurons plus d'une fois à exprimer que deux chemins brisés de même extrémité, praticables par rapport à un développement fondamental donné, conduisent au même développement final : en désignant par

$$a_0 a_1 a_2 \ldots a_g \mathrm{A},$$
$$a_0 a'_1 a'_2 \ldots a'_{g'} \mathrm{A}$$

les deux chemins dont il s'agit, *nous exprimerons cette équivalence à l'aide de la notation*

$$\Psi[a_0 a_1 a_2 \ldots a_g \mathrm{A}] = \Psi[a_0 a'_1 a'_2 \ldots a'_{g'} \mathrm{A}].$$

II. *Si, par rapport à un développement fondamental donné, deux chemins brisés de même extrémité,*

(1) $$a_0 a_1 a_2 \ldots a_g \mathrm{A},$$
(2) $$a_0 a'_1 a'_2 \ldots a'_{g'} \mathrm{A},$$

sont praticables et équivalents, si, de plus, le chemin brisé

$$a_0 a_1 a_2 \ldots a_g \mathrm{A} \alpha_1 \ldots \alpha_k,$$

obtenu par un certain allongement de (1), *est praticable, le chemin brisé*

$$a_0 a'_1 a'_2 \ldots a'_{g'} \mathrm{A} \alpha_1 \ldots \alpha_k,$$

obtenu par le même allongement de (2), *est praticable, comme le précédent, et conduit au même développement final.*

III. *Considérons un developpement fondamental admettant les rayons de convergence* R_x, R_y, ..., *et un chemin brisé,*

$$\begin{aligned} a_0 &= (x_0, \quad y_0, \quad \ldots), \\ a_1 &= (x_0 + h_1, \; y_0 + k_1, \; \ldots) = (x_1, y_1, \ldots), \\ a_2 &= (x_1 + h_2, \; y_1 + k_2, \; \ldots) = (x_2, y_2, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_p &= (x_{p-1} + h_p, \; y_{p-1} + k_p, \; \ldots) = (x_p, y_p, \ldots), \end{aligned}$$

ayant son origine au point fondamental $(x_0, y_0, \ldots)$: *si les accroissements successivement attribués aux variables vérifient*

les relations

$$(3)\quad \begin{cases} \operatorname{mod} h_1 + \operatorname{mod} h_2 + \ldots + \operatorname{mod} h_p < R_x, \\ \operatorname{mod} k_1 + \operatorname{mod} k_2 + \ldots + \operatorname{mod} k_p < R_y, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

les deux chemins

$$a_0 a_1 a_2 \ldots a_p,$$
$$a_0 a_p$$

sont praticables et conduisent au même développement final.

On sait qu'à l'intérieur du domaine de centre $(x_0, y_0, \ldots)$ et de rayons R_x, R_y, ..., la somme du développement fondamental définit une fonction olotrope, $f(x, y, \ldots)$. Cela étant, si l'on désigne par q un entier quelconque de la suite 1, 2, ..., p, les relations (3) donnent immédiatement

$$\operatorname{mod}(x_q - x_0) = \operatorname{mod}(h_1 + h_2 + \ldots + h_q) < R_x,$$
$$\operatorname{mod}(y_q - y_0) = \operatorname{mod}(k_1 + k_2 + \ldots + k_q) < R_y,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

dès lors, les points a_0, a_1, a_2, ..., a_p sont tous situés dans une région où la fonction $f(x, y, \ldots)$ est olotrope, et la quantité

$$f(x_{q-1} + h,\ y_{q-1} + k,\ \ldots)$$

est développable en une série entière par rapport à h, k, ..., tant que les modules de ces accroissements sont respectivement inférieurs aux différences

$$R_x - \operatorname{mod}(x_{q-1} - x_0) = R_x - \operatorname{mod}(h_1 + h_2 + \ldots + h_{q-1}),$$
$$R_y - \operatorname{mod}(y_{q-1} - y_0) = R_y - \operatorname{mod}(k_1 + k_2 + \ldots + k_{q-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

(n° 46, I). Comme on a précisément, en vertu de (3),

$$\operatorname{mod}(h_1 + h_2 + \ldots + h_{q-1}) + \operatorname{mod} h_q < R_x,$$
$$\operatorname{mod}(k_1 + k_2 + \ldots + k_{q-1}) + \operatorname{mod} k_q < R_y,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{mod} h_q < R_x - \operatorname{mod}(h_1 + h_2 + \ldots + h_{q-1}),$$
$$\operatorname{mod} k_q < R_y - \operatorname{mod}(k_1 + k_2 + \ldots + k_{q-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

les valeurs

$$x_q = x_{q-1} + h_q, \qquad y_q = y_{q-1} + k_q, \qquad \ldots$$

se trouvent certainement dans les limites où $f(x, y, \ldots)$ est développable par la formule de Taylor à partir des valeurs $x_{q-1}, y_{q-1}, \ldots$.

Cela posé, si l'on considère le développement de $f(x, y, \ldots)$ à partir des valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots$, l'hypothèse numérique $x = x_1$, $y = y_1, \ldots$, introduite dans ce développement et dans toutes ses dérivées, fournira, aux facteurs numériques connus près, les coefficients du développement de $f(x, y, \ldots)$ effectué à partir de x_1, $y_1, \ldots$, et permettra de construire le développement dont il s'agit. Ce deuxième développement une fois connu, on en déduira, par le même mécanisme, le développement de $f(x, y, \ldots)$ à partir du troisième sommet $(x_2, y_2, \ldots)$, et ainsi de suite jusqu'au sommet final $(x_p, y_p \ldots)$. Le chemin $a_0 a_1 a_2 \ldots a_p$ est donc praticable, et équivaut au chemin direct $a_0 a_p$.

IV. *Lorsqu'un développement fondamental, entier en $x - x_0$, $y - y_0, \ldots$, converge dans le domaine de centre $(x_0, y_0, \ldots)$ et de rayons R_x, $R_y, \ldots$, tout chemin brisé ayant son origine en $(x_0, y_0, \ldots)$ et ses divers sommets dans le domaine en question équivaut, s'il est praticable, au chemin direct formé avec les deux sommets extrêmes.*

1° Le point ci-dessus énoncé est exact lorsque le nombre des sommets est égal à 3.

Désignant, en effet, par $f(x, y, \ldots)$ la somme du développement donné, entier en $x - x_0, y - y_0, \ldots$, et par

$$a_0 = (x_0,\ y_0,\ \ldots),$$
$$a_1 = (x_1,\ y_1,\ \ldots),$$
$$A = (X,\ Y,\ \ldots)$$

les trois sommets de notre chemin brisé, on observera tout d'abord que le développement auquel on est conduit en a_1 coïncide avec celui de $f(x, y, \ldots)$, effectué à partir des valeurs $x_1, y_1, \ldots$.

Si l'on désigne maintenant par s une indéterminée réelle assujettie à varier dans l'intervalle de 0 à 1 ($0 \leqq s \leqq 1$), et que l'on considère le point $(x, y, \ldots)$ défini par les formules

$$(4)\qquad \begin{cases} x = x_1 + s(X - x_1), \\ y = y_1 + s(Y - y_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

il résulte, en premier lieu, du raisonnement fait au n° 40, que ce point est, quel que soit s, situé dans le domaine de centre $(x_0, y_0, \ldots)$ et de rayons R_x, R_y, ..., et, en second lieu, d'une proposition formulée à l'alinéa II du n° 57, que la fonction $f(x, y, \ldots)$ admet en ce point, quel que soit s, des olomètres au moins égaux à une constante positive δ convenablement choisie. Désignant alors par ε une quantité positive assez petite pour que les produits

$$(5) \qquad \varepsilon \bmod(X - x_1), \quad \varepsilon \bmod(Y - y_1), \quad \ldots$$

soient tous inférieurs à δ, partageons l'intervalle de o à 1 en intervalles partiels d'amplitude inférieure à ε, et soient

$$0, \quad s', \quad s'', \quad \ldots, \quad s^{(g)}, \quad 1$$

les valeurs de s qui limitent les intervalles partiels successifs,

$$(6) \quad (x_1, y_1, \ldots), \quad (x', y', \ldots), \quad (x'', y'', \ldots), \quad \ldots, \quad (x^{(g)}, y^{(g)}, \ldots), \quad (X, Y, \ldots)$$

les points correspondants fournis par les formules (4) : il résulte immédiatement de ces dernières que, pour deux sommets consécutifs du chemin (6), les différences entre les coordonnées semblables ont des modules respectivement inférieurs aux quantités (5), par suite à δ. Si donc on prend pour développement fondamental celui de $f(x, y, \ldots)$ effectué à partir des valeurs $x_1, y_1, \ldots$, le parcours du chemin brisé (6) fait retomber de toute nécessité sur le développement de $f(x, y, \ldots)$ effectué à partir des valeurs X, Y, ... Observons maintenant, chose extrêmement aisée à vérifier, que, sur le chemin brisé (6), la somme des modules des accroissements successivement attribués à chaque variable est égale à l'une ou à l'autre des quantités

$$(7) \qquad \bmod(X - x_1), \quad \bmod(Y - y_1), \quad \ldots,$$

suivant qu'il s'agit de l'une ou de l'autre des variables $x, y, \ldots$. Comme, en vertu de notre hypothèse, le chemin $a_0 a_1$ A est praticable, les quantités (7) ne peuvent manquer d'être toutes inférieures à certains rayons de convergence du développement de $f(x, y, \ldots)$ effectué à partir de $(x_1, y_1, \ldots)$, et l'on peut, dès lors, en vertu de l'alinéa III, passer directement du sommet a_1 au sommet A.

Ainsi, le développement final auquel conduit le chemin donné $a_0 a_1$ A coïncide avec le développement de $f(x, y, \ldots)$ effectué à

partir des valeurs X, Y, ... ; il équivaut donc au chemin direct, $a_0 A$.

2° Le point énoncé au début du présent alinéa IV est exact, quel que soit le nombre des sommets de notre chemin brisé.

Si l'on désigne en effet par $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_g$, A les sommets successifs du chemin dont il s'agit, on a d'abord, en vertu de 1°,

$$\Psi[a_0 a_1 a_2] = \Psi[a_0 a_2]$$

(I), d'où l'on déduit (II)

$$\Psi[a_0 a_1 a_2 a_3] = \Psi[a_0 a_2 a_3].$$

Une nouvelle application de 1° donne alors

$$\Psi[a_0 a_2 a_3] = \Psi[a_0 a_3],$$

d'où, par comparaison avec la relation qui précède,

$$\Psi[a_0 a_1 a_2 a_3] = \Psi[a_0 a_3].$$

En continuant ce raisonnement de proche en proche, on tombera finalement sur la relation

$$\Psi[a_0 a_1 a_2 \ldots a_g \mathrm{A}] = \Psi[a_0 \mathrm{A}].$$

V. *Considérons, relativement à une pseudo-fonction donnée, le chemin brisé*

$$a_0 a_1 a_2 \ldots a_{g-1} a_g \mathrm{A}\, a_g a_{g-1} \ldots a_2 a_1 a_0,$$

où les deux tronçons successifs

$$a_0 a_1 a_2 \quad \ldots a_{g-1} a_g \mathrm{A},$$
$$\mathrm{A}\ a_g a_{g-1} \ldots a_2 \quad a_1 a_0$$

se composent des mêmes sommets, pris d'abord dans un certain ordre, puis dans l'ordre inverse : un pareil chemin, s'il est praticable, fait retomber de toute nécessité sur le développement fondamental.

Effectivement, l'application alternative des alinéas IV et II donne successivement

$$\Psi[a_0 a_1 a_2 \ldots a_{g-1} a_g \mathrm{A}\, a_g \qquad] = \Psi[a_0 a_1 a_2 \ldots a_{g-1} a_g \qquad],$$
$$\Psi[a_0 a_1 a_2 \ldots a_{g-1} a_g \mathrm{A}\, a_g a_{g-1}] = \Psi[a_0 a_1 a_2 \ldots a_{g-1} a_g a_{g-1}]$$
$$= \Psi[a_0 a_1 a_2 \ldots a_{g-1} \qquad],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et nous conduit, de proche en proche, à la relation

$$\Psi[a_0 a_1 a_2 \ldots a_{g-1} a_g \Lambda a_g a_{g-1} \ldots a_2 a_1 a_0] = \Psi[a_0],$$

qu'il s'agit d'établir.

VI. Revenons à notre énoncé général.

Si l'on désigne par r le plus petit des rayons R_x, R_y, ..., on peut, en vertu des hypothèses faites sur la région $\mathfrak{R}$, assigner au-dessous de $\frac{r}{2}$ une constante positive, ρ, telle que tout lacet construit dans $\mathfrak{R}$ avec des écarts maxima moindres que ρ puisse être considéré comme le lacet final de quelque réseau construit dans $\mathfrak{R}$ avec des écarts maxima moindres que $\frac{r}{2}$.

Cela étant, désignons par $(x_0, y_0, \ldots)$ le point fondamental, par $(X, Y, \ldots)$ un point arbitrairement choisi dans la région $\mathfrak{R}$, et construisons arbitrairement dans cette région, de $(x_0, y_0, \ldots)$ à $(X, Y, \ldots)$, deux chemins brisés, C', C'', présentant des écarts maxima moindres que ρ (n° 39). Il résulte de notre hypothèse que ces chemins sont tous deux praticables pour la pseudo-fonction donnée, et qu'ils conduisent à des développements successifs admettant des rayons de convergence au moins égaux à r : tout revient donc à prouver que le développement final est le même pour l'un et pour l'autre. A cet effet, nous désignerons par C''_1 le chemin brisé C'' considéré en sens inverse, et nous établirons que le lacet (C', C''_1), évidemment praticable, fait retomber sur le développement fondamental : il en résultera que dans le chemin praticable formé des trois tronçons successifs C', C''_1, C'', la suppression des deux premiers tronçons est permise, et comme, en vertu de l'alinéa V, la suppression des deux derniers l'est également, les deux chemins C' et C'', équivalents l'un et l'autre à (C', C''_1, C''), seront par là même équivalents entre eux.

Or, d'après ce qui a été dit, le lacet (C', C''_1), dont les écarts maxima sont moindres que ρ, peut être considéré comme le lacet final de quelque réseau construit dans $\mathfrak{R}$ avec des écarts maxima moindres que $\frac{r}{2}$. Comme un lacet ayant tous ses sommets confondus au point fondamental fait évidemment retomber sur le développement fondamental, tout revient à prouver que deux lacets consécutifs du réseau (évidemment praticables pour la pseudo-fonction donnée avec des

rayons de convergence égaux à r, puisque leurs écarts maxima tombent au-dessous de $\frac{r}{2}$) conduisent au même développement final.

Désignons à cet effet par

$$a_0 a_1 a_2 \dots a_i a_0$$

et

$$a_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i a_0$$

deux lacets consécutifs du réseau. Nos hypothèses, combinées avec les alinéas III et II, donnent successivement

$$\Psi[a_0 \alpha_1] = \Psi[a_0 a_1 \alpha_1];$$

puis

$$\Psi[a_0 \alpha_1 \alpha_2] = \Psi[a_0 a_1 \alpha_1 \alpha_2] = \Psi[a_0 a_1 \alpha_2] = \Psi[a_0 a_1 a_2 \alpha_2],$$

d'où

$$\Psi[a_0 \alpha_1 \alpha_2] = \Psi[a_0 a_1 a_2 \alpha_2];$$

puis encore

$$\Psi[a_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3] = \Psi[a_0 a_1 a_2 \alpha_2 \alpha_3] = \Psi[a_0 a_1 a_2 \alpha_3] = \Psi[a_0 a_1 a_2 a_3 \alpha_3],$$

d'où

$$\Psi[a_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3] = \Psi[a_0 a_1 a_2 a_3 \alpha_3];$$

etc. On arrivera ainsi, de proche en proche, à

$$\Psi[a_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i] = \Psi[a_0 a_1 a_2 \dots a_i \alpha_i],$$

et, finalement, à

$$\Psi[a_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i a_0] = \Psi[a_0 a_1 a_2 \dots a_i \alpha_i a_0]$$
$$= \Psi[a_0 a_1 a_2 \dots a_i a_0] \quad (^1).$$

---

(1) La même démonstration, légèrement modifiée, s'applique à la proposition suivante :

Soient s, t, ... des variables indépendantes (réelles ou imaginaires), en nombre quelconque g; $\mathfrak{R}_{s,t,\dots}$ une région de l'espace $[[s, t, \dots]]$ *continue, limitée, complète, et présentant le caractère spécifié au n° 71*;

$$\begin{cases} x = \varphi(s, t, \dots), \\ y = \psi(s, t, \dots), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

des formules, en nombre quelconque n, ayant pour seconds membres diverses fonctions de s, t, ..., toutes *continues* dans la région $\mathfrak{R}_{s,t,\dots}$; enfin $(s_0, t_0, \dots)$ un

73. Les régions qui présentent (outre la continuité) le caractère spécifié au n° 71 jouissent, comme on le voit, de cette propriété remarquable, que le seul fait, pour une pseudo-fonction, d'y être

---

certain point de cette dernière, et x_0, y_0, ... les valeurs numériques correspondantes de x, y, ...

Considérons, d'autre part, une pseudo-fonction de x, y, ... définie par le point fondamental (x_0, y_0, ...) et par un développement fondamental, et supposons que les divers points de l'espace $\left[[x, y, \ldots]\right]$ qui, en vertu des formules ci-dessus, correspondent (avec répétition possible) aux divers points de $\mathfrak{R}_{s,t,\ldots}$, appartiennent tous à une région où la pseudo-fonction dont il s'agit soit calculable par cheminement avec les rayons R_x, R_y, ...

Toutes ces choses étant posées, *si, parmi les chemins brisés de l'espace* $\left[[s, t, \ldots]\right]$ *ayant leur premier sommet en* (s_0, t_0, ...) *et leurs divers sommets dans la région* $\mathfrak{R}_{s,t,\ldots}$, *on se borne à considérer ceux dont les écarts maxima tombent au-dessous d'une constante positive convenablement choisie :* 1° *les chemins brisés qui leur correspondent dans l'espace* $\left[[x, y, \ldots]\right]$ *ont des écarts maxima respectivement moindres que les quantités* R_x, R_y, ..., *et, par suite, sont praticables pour la pseudo-fonction avec ces mêmes quantités comme rayons de convergence;* 2° *le développement final obtenu à l'extrémité d'un pareil chemin dépend uniquement des valeurs de* s, t, ... *qui en fournissent le dernier sommet.*

Des diverses hypothèses faites tant sur la région $\mathfrak{R}_{s,t,\ldots}$ que sur les seconds membres de nos n formules, il résulte en effet : 1° qu'en désignant par r le plus petit des rayons R_x, R_y, ..., et par γ une constante positive convenablement choisie, les relations simultanées

$$\operatorname{mod}(s' - s'') < \gamma, \qquad \operatorname{mod}(t' - t'') < \gamma, \qquad \ldots,$$

supposées vérifiées pour deux points quelconques de la région $\mathfrak{R}_{s,t,\ldots}$, entraînent comme conséquences nécessaires, pour les deux points correspondants de l'espace $\left[[x, y, \ldots]\right]$, les relations

$$\operatorname{mod}(x' - x'') < \frac{r}{2}, \qquad \operatorname{mod}(y' - y'') < \frac{r}{2}, \qquad \ldots;$$

2° qu'en désignant par δ une constante positive convenablement choisie, non supérieure à la précédente γ, tout lacet construit dans $\mathfrak{R}_{s,t,\ldots}$ avec des écarts maxima moindres que δ peut être considéré comme le lacet final de quelque réseau construit dans $\mathfrak{R}_{s,t,\ldots}$ avec des écarts maxima moindres que γ.

Cela étant, si, parmi les chemins brisés de l'espace $\left[[s, t, \ldots]\right]$ ayant leur premier sommet en (s_0, t_0, ...) et leurs divers sommets dans la région $\mathfrak{R}_{s,t,\ldots}$, on se borne à considérer ceux dont les écarts maxima tombent au-dessous de la constante δ, les divers chemins brisés qui leur correspondent dans l'espace $\left[[x, y, \ldots]\right]$ auront nécessairement des écarts maxima moindres que $\frac{r}{2}$, à plus forte raison moindres que les quantités R_x, R_y, ... respectivement, et, par suite, seront praticables pour la pseudo-fonction avec ces mêmes quantités comme rayons de convergence.

Cette première constatation étant faite, on désignera par (S, T, ...) un point arbitrairement choisi dans la région $\mathfrak{R}_{s,t,\ldots}$, on construira arbitrairement dans cette ré-

calculable par cheminement, entraîne de toute nécessité, moyennant un choix convenable des rayons, sa monodromie dans les mêmes limites : nous les nommerons, pour cette raison, régions *monodromiques*.

L'exemple suivant, qui est des plus simples, se présente très fréquemment.

---

gion, de $(s_0, t_0, \ldots)$ à $(S, T, \ldots)$, deux chemins brisés, C', C'', présentant des écarts maxima moindres que δ, et l'on prouvera que les deux chemins qui leur correspondent respectivement dans l'espace $\left[[x, y, \ldots]\right]$ conduisent au même développement final : nous n'insisterons pas sur les détails de ce raisonnement, qui ne ferait que reproduire, avec les modifications voulues, l'alinéa VI du n° 72.

Lorsque les diverses hypothèses énumérées au début de la présente note se trouvent vérifiées, il résulte évidemment de nos conclusions qu'à tout point $(S, T, \ldots)$ de la région $\mathfrak{R}_{s,t,\ldots}$ on peut faire correspondre un développement déterminé de la pseudo-fonction, en s'astreignant à ne considérer, parmi les chemins brisés ayant leur sommet initial en $(s_0, t_0, \ldots)$, leur sommet final en $(S, T, \ldots)$, et leurs sommets intermédiaires dans la région $\mathfrak{R}_{s,t,\ldots}$, que ceux dont les écarts maxima tombent au-dessous de δ; la considération des termes constants des divers développements définit alors, dans la région dont il s'agit, une fonction proprement dite de $s, t, \ldots$, évidemment continue.

Supposons, par exemple, qu'une pseudo-fonction de la variable imaginaire x soit calculable, avec un certain rayon r, dans une certaine région de l'espace $\left[[x]\right]$, et traçons dans cette dernière, à partir du point fondamental x_0, un arc continu,

$$x = f(s)$$

[s désigne ici une variable réelle assujettie à se mouvoir dans un certain intervalle, et $f(s)$ une fonction continue de cette variable prenant la valeur numérique x_0 pour celle des deux valeurs extrêmes, s_0, de s, que l'on considère comme initiale]. La région, $\mathfrak{R}_s$, de l'espace $\left[[s]\right]$, constituée par l'intervalle en question, est, comme nous l'avons établi (n° 9, II), limitée et complète, et remplit déjà, de ce fait, une partie des conditions requises par notre énoncé; elle satisfait d'ailleurs, comme on le voit immédiatement, à la définition donnée plus bas (n° 73) d'une région *convexe*, et, par suite (n° 73), aux conditions restantes. Cela étant, désignons par γ une constante positive choisie de telle façon que la relation

$$\operatorname{mod}(s' - s'') < \gamma,$$

supposée vérifiée pour deux points quelconques de l'intervalle $\mathfrak{R}_s$, entraîne comme conséquence nécessaire, pour les deux points correspondants de l'espace $\left[[x]\right]$, la relation

$$\operatorname{mod}(x' - x'') < \frac{r}{2}:$$

à cause de la forme convexe de la région $\mathfrak{R}_s$, la constante δ, dont il est question ci-dessus, pourra être choisie égale à γ (n° 73). En conséquence, à un point quelconque, S, de l'intervalle $\mathfrak{R}_s$, on pourra faire correspondre un développement déterminé de la pseudo-fonction en s'astreignant à ne considérer, parmi les chemins brisés ayant

Étant donnés, dans l'espace $\big[[x, y, \ldots]\big]$, deux points,

$$(x', y', \ldots), \quad (x'', y'', \ldots),$$

l'ensemble des points définis par le système des formules

$$\begin{cases} x = \lambda x' + \mu x'', \\ y = \lambda y' + \mu y'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

où les indéterminées réelles λ et μ doivent vérifier l'un ou l'autre des systèmes équivalents

$$\begin{cases} 0 \leqq \lambda \leqq 1, \\ \lambda + \mu = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \leqq \mu \leqq 1, \\ \lambda + \mu = 1, \end{cases}$$

sera, par définition, le *segment rectiligne* qui joint les deux points. Le segment ainsi défini peut donc être considéré comme un arc continu (n° 37), représenté, soit par les formules

$$\begin{cases} x = x' + \mu(x'' - x'), \\ y = y' + \mu(y'' - y'), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

auxquelles on adjoint la condition

$$0 \leqq \mu \leqq 1,$$

soit par les formules

$$\begin{cases} x = x'' + \lambda(x' - x''), \\ y = y'' + \lambda(y' - y''), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

auxquelles on adjoint la condition

$$0 \leqq \lambda \leqq 1.$$

Cela étant, nous dirons qu'une région de l'espace $\big[[x, y, \ldots]\big]$

---

leur sommet initial en s_0, leur sommet final en S, et tous leurs sommets intermédiaires dans $\mathfrak{R}_{\varepsilon}$, que ceux dont les écarts maxima tombent au-dessous de γ : le parcours d'un pareil chemin se nomme, pour abréger, le *parcours de l'arc*, effectué de s_0 à S, et sa considération intervient souvent dans l'étude des fonctions d'une variable imaginaire. Tout le long de l'arc $x = f(s)$, la pseudo-fonction est assimilable à une fonction continue de s.

est *convexe,* si, deux points y étant pris à volonté, le segment rectiligne qui les joint est entièrement situé dans la région ([1]).

Or, je dis qu'*une pareille région,* manifestement continue, remplit, en outre, la condition spécifiée au n° 71, et que, par suite, elle *est monodromique.* Il suffit évidemment, pour le prouver, de faire voir que :

Tout lacet construit dans une région convexe, $\mathfrak{C}$, *avec des écarts maxima moindres qu'une constante positive donnée* α, *peut être considéré comme le lacet final de quelque réseau construit dans cette région avec des écarts maxima également moindres que* α (la constante β du n° 71 peut ainsi, dans ce cas, être choisie égale à α).

Soit donc

$$(8)\qquad \left|\begin{array}{lll} (X, & Y, & \ldots), \\ (x_1, & y_1, & \ldots), \\ (x_2, & y_2, & \ldots), \\ \ldots & \ldots & \ldots, \\ (x_{p-1}, & y_{p-1}, & \ldots), \\ (x_p, & y_p, & \ldots); \\ (X, & Y, & \ldots) \end{array}\right.$$

un lacet construit dans la région avec des écarts maxima moindres que α. Désignant par s une indéterminée réelle assujettie à varier de 0 à 1 ($0 \leqq s \leqq 1$), je considère le lacet, variable avec s, qui a pour sommets successifs les points

$$(9)\qquad \left|\begin{array}{lll} [X, & Y, & \ldots], \\ {[X+s(x_1 - X)}, & Y+s(y_1 - Y), & \ldots], \\ {[X+s(x_2 - X)}, & Y+s(y_2 - Y), & \ldots], \\ \ldots & \ldots & \ldots, \\ {[X+s(x_{p-1} - X)}, & Y+s(y_{p-1} - Y), & \ldots], \\ {[X+s(x_p - X)}, & Y+s(y_p - Y), & \ldots], \\ {[X,} & Y, & \ldots]. \end{array}\right.$$

([1]) On voit immédiatement que, ici encore, la remarque du n° 4 est applicable, c'est-à-dire que, si des régions, respectivement extraites des espaces $\big[[x, \ldots]\big]$, $\big[[y, \ldots]\big]$, etc., sont toutes convexes, leur association forme, dans l'espace $\big[[x, \ldots, y, \ldots, \text{etc.}]\big]$, une région également convexe.

Ce lacet (9) a même origine et même nombre de sommets que le lacet (8), et nous constaterons tout d'abord que, pour toute valeur de s n'excédant pas l'intervalle de o à 1, il a ses divers sommets dans la région $\mathfrak{C}$ et présente des écarts maxima moindres que α.

Effectivement, si l'on désigne par k un entier quelconque de la suite 1, 2, ..., p, le sommet

$$[X + s(x_k - X), Y + s(y_k - Y), \dots]$$

fait évidemment partie du segment rectiligne qui joint les deux points

$$(X, Y, \dots), \quad (x_k, y_k, \dots);$$

or, ces deux points sont situés l'un et l'autre dans la région $\mathfrak{C}$, par suite aussi le segment rectiligne qui les joint, par suite enfin le sommet considéré du lacet (9).

Considérons maintenant deux sommets consécutifs quelconques du lacet (9), et formons les différences entre leurs coordonnées semblables ; nous obtiendrons ainsi successivement

$$\begin{array}{lll} s(x_1 - X), & s(y_1 - Y), & \dots, \\ s(x_2 - x_1), & s(y_2 - y_1), & \dots, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots, \\ s(x_p - x_{p-1}), & s(y_p - y_{p-1}), & \dots, \\ s(X - x_p), & s(Y - y_p), & \dots. \end{array}$$

Or, puisque s n'excède pas l'intervalle de o à 1, les modules de ces différences sont au plus égaux à ceux qu'on obtiendrait en faisant abstraction dans toutes du facteur s; les écarts maxima du lacet (9) sont, par suite, au plus égaux respectivement aux écarts maxima du lacet (8), et, dès lors, moindres que α.

Cette double constatation étant faite, désignons par ε une constante positive assez petite pour que les produits

$$\begin{array}{lll} \varepsilon \bmod(x_1 \quad - X), & \varepsilon \bmod(y_1 \quad - Y), & \dots, \\ \varepsilon \bmod(x_2 \quad - X), & \varepsilon \bmod(y_2 \quad - Y), & \dots, \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, & \dots, \\ \varepsilon \bmod(x_{p-1} - X), & \varepsilon \bmod(y_{p-1} - Y), & \dots, \\ \varepsilon \bmod(x_p \quad - X), & \varepsilon \bmod(y_p \quad - Y), & \dots \end{array}$$

soient tous inférieurs à α; puis, partageons l'intervalle de o à 1 en

intervalles partiels moindres que ε, et nommons

(10) $$s^{(0)} = 0, \quad s^{(1)}, \quad s^{(2)}, \quad \ldots, \quad s^{(g)}, \quad s^{(g+1)} = 1$$

les valeurs de s qui limitent les intervalles partiels successifs ; considérons enfin les lacets successivement déduits de (9) par l'attribution à s des valeurs successives de la suite (10) : nous obtiendrons ainsi un réseau ayant pour origine $(X, Y, \ldots)$, pour lacet final le lacet (8), et pour sommets des points tous situés dans la région $\mathfrak{C}$. Chacun des lacets successifs de ce réseau présente d'ailleurs, comme nous savons, des écarts maxima moindres que α, et il nous reste à faire voir que si l'on considère, sur deux lacets consécutifs, deux sommets de même rang, les différences formées avec leurs coordonnées semblables présentent des modules moindres que α.

Le point à établir est évident s'il s'agit, soit du premier, soit du dernier sommet de deux lacets consécutifs, puisque les différences à former sont alors toutes nulles. Soient donc k un entier quelconque de la suite $1, 2, \ldots, p$, et h, $h+1$ deux entiers consécutifs quelconques de la suite $0, 1, 2, \ldots, g, g+1$: nous avons, d'après ce qui vient d'être dit, à comparer les deux sommets

$$[X + s^{(h)}\ (x_k - X),\ Y + s^{(h)}\ (y_k - Y),\ \ldots],$$
$$[X + s^{(h+1)}(x_k - X),\ Y + s^{(h+1)}(y_k - Y),\ \ldots].$$

Or, les quantités

$$[s^{(h+1)} - s^{(h)}](x_k - X),\quad [s^{(h+1)} - s^{(h)}](y_k - Y),\quad \ldots,$$

obtenues en retranchant leurs coordonnées semblables, ont des modules au plus égaux respectivement à

$$\varepsilon \bmod(x_k - X),\qquad \varepsilon \bmod(y_k - Y),\qquad \ldots,$$

et, par suite, moindres que α [1].

74. Le simple rapprochement des nos 70 et 72 montre que *toute pseudo-fonction calculable par cheminement dans une région à*

---

[1] On a parfois, dans diverses questions, à *transformer* une région de l'espace en une autre : il est intéressant de noter à ce propos que certains types de transformation, appliqués à une région *monodromique,* donnent forcément comme résultat une autre région *monodromique;* nous en avons cité ailleurs un exemple (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 1907, p. 132 et suiv.).

la fois normale et monodromique y peut être assimilée à une fonction olotrope proprement dite.

C'est ce qui a lieu, notamment, dans la région normale que nous avons appelée *domaine* (nos 40 et 41) : car la démonstration du n° 40, qui en établit la continuité, consiste précisément à faire voir que cette région est convexe (n° 73).

Observation générale sur les problèmes traités dans les Chapitres suivants.

75. Le but principal du présent Ouvrage consiste, ainsi qu'il a été dit dans la Préface, à prouver que certains systèmes d'équations aux dérivées partielles admettent des intégrales répondant à des *conditions initiales* d'une certaine forme : à cet effet, nous supposerons données certaines valeurs numériques, $x_0, y_0, \ldots,$ des variables indépendantes $x, y, \ldots,$ que nous considérerons comme initiales ; puis, envisageant par la pensée les développements, construits à partir de $x_0, y_0, \ldots,$ des intégrales hypothétiques, nous supposerons données, outre les valeurs numériques $x_0, y_0, \ldots,$ celles des coefficients de certains termes, les termes dont il s'agit étant choisis de telle façon, que la seule considération du système proposé, jointe aux données que nous venons d'indiquer, suffise pour calculer les valeurs numériques des coefficients des termes restants. En supposant qu'un pareil calcul ne conduise à aucune incompatibilité, nous pourrons alors faire correspondre aux diverses inconnues du système des développements *fondamentaux* (n° 69), dont les sommes, ainsi que nous le prouverons, vérifient effectivement les équations proposées.

Mais, ces développements fondamentaux une fois obtenus, nous ne chercherons pas à en approfondir l'étude, ni, en particulier, à les prolonger analytiquement par voie de cheminement [1] : c'est pourquoi nous nous bornons, sur l'objet du présent Chapitre, aux généralités les plus essentielles.

---

[1] La question particulière traitée dans la deuxième Partie du Chapitre XI (déformations finies dans l'espace à n dimensions) est la seule où nous dirons quelques mots (n° 182) du calcul par cheminement des intégrales.

CHAPITRE V.

FONCTIONS SCHÉMATIQUES ET COUPURES [1].

Intégration de l'équation $\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y, \ldots)$.

76. Nous dirons souvent qu'une fonction de $x, y, \ldots$ est *développable* à partir de $x_0, y_0, \ldots$, valeurs particulières de ces variables, si, dans toute l'étendue de quelque domaine ayant pour centre $(x_0, y_0, \ldots)$ (n° 30), elle est représentable par la somme d'une série entière en $x - x_0, y - y_0, \ldots$, ou, ce qui revient au même, si elle est olotrope (n° 42) dans quelque région comprenant le point $(x_0, y_0, \ldots)$.

Nous nous proposerons actuellement le problème suivant :

Chercher toute fonction des variables $x, y, \ldots$ satisfaisant à la double condition : 1° d'être développable à partir de valeurs données, $x_0, y_0, \ldots$; 2° d'avoir pour dérivée première, relativement à une variable déterminée, x, une fonction donnée, $f(x, y, \ldots)$ (nécessairement développable, en vertu du n° 49, à partir des mêmes valeurs).

Ou, en d'autres termes :

Un point déterminé, $(x_0, y_0, \ldots)$, étant choisi comme fondamental (n° 69), *trouver tout développement fondamental (convergent) ayant pour dérivée première, relativement à x, un développement fondamental (convergent) donné.*

Désignant par u la fonction inconnue, et considérant, dans l'équa-

---

[1] Il va sans dire que la signification actuelle du mot *coupure* n'a rien de commun avec celle qu'on lui donne couramment dans la théorie des fonctions d'une variable imaginaire.

tion

(1) $$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y, \ldots),$$

qu'elle doit vérifier identiquement, une *intégrale* (¹) (hypothétique) quelconque développable à partir de $x_0, y_0, \ldots$, nous nommerons *dérivées principales* de cette intégrale toutes celles qui coïncident, soit avec le premier membre de (1), soit avec quelque dérivée de ce premier membre, et *dérivées paramétriques* toutes les dérivées restantes (²) : les dérivées paramétriques sont évidemment celles qui se rapportent aux seules variables $y, \ldots$, et les dérivées principales celles qui intéressent, avec ou sans $y, \ldots$, la variable x. Les coefficients du développement de l'intégrale sont d'ailleurs, aux facteurs numériques connus près (nº 54), les valeurs initiales de l'intégrale et de ses dérivées principales et paramétriques de tous ordres : l'ensemble des termes où figurent ainsi les valeurs initiales de l'intégrale et de ses dérivées paramétriques constitue ce que nous nommerons sa *détermination initiale;* la portion restante du développement, où figurent de même les valeurs initiales des dérivées principales, se nommera la *partie principale* du développement. Cette dernière se compose donc de l'ensemble des termes qui contiennent $x - x_0$ à une puissance au moins égale à 1, et il en résulte que, *dans l'hypothèse numérique $x = x_0$, l'intégrale se réduit à sa détermination initiale.*

Cela posé, nous établirons la proposition suivante :

La fonction $f(x, y, \ldots)$ étant supposée développable à partir de $x_0, y_0, \ldots$, il existe une infinité de fonctions satisfaisant à la double condition : 1° *d'être développables à partir des mêmes valeurs;* 2° *d'avoir $f(x, y, \ldots)$ pour dérivée première par rapport à x. L'une quelconque des intégrales dont il s'agit se trouve entièrement déterminée si l'on se donne sa détermination initiale $\delta(y, \ldots)$; et, cette dernière étant arbitrairement choisie sous la seule restriction d'être développable à partir des valeurs $y_0, \ldots$, l'intégrale correspondante ne peut manquer d'être développable*

(¹) Suivant la locution admise, nous nommons *intégrale* de l'équation (1) toute fonction de $x, y, \ldots$ la vérifiant identiquement (*voir* plus loin, nº 89).

(²) Le sens de ces locutions sera généralisé ultérieurement (*voir* plus loin, nº 90).

dans les limites où le sont à la fois : 1° la dérivée donnée $f(x, y, \ldots)$; *2° la détermination initiale choisie* $\mathcal{E}(y, \ldots)$.

Enfin, *l'ensemble des intégrales cherchées est donné par la formule*

$$u = \mathrm{U}(x, y, \ldots) + \lambda(y, \ldots),$$

où $\mathrm{U}(x, y, \ldots)$ *désigne l'une quelconque d'entre elles, et* $\lambda(y, \ldots)$ *une fonction arbitraire des seules variables* $y, \ldots$ *(développable à partir de* $y_0, \ldots$*).*

I. S'il existe quelque intégrale développable à partir de $x_0, y_0, \ldots,$ elle vérifie, en vertu du n° 56, non seulement l'équation proposée (1), mais encore toutes celles qui s'en déduisent par différentiation, et l'on peut, grâce à cette circonstance, calculer tous les coefficients de la partie principale de son développement. Cette dernière se compose en effet de l'ensemble des termes contenant $x - x_0$ à une puissance au moins égale à 1, et le coefficient du terme en

$$(x - x_0)^{a+1}(y - y_0)^b \ldots$$

n'est autre chose, au facteur numérique connu près, que la valeur initiale de

$$\frac{\partial^{(a+1)+b+\ldots} u}{\partial x^{a+1}\, \partial y^b \ldots}:$$

il suffit donc, pour obtenir cette valeur initiale, d'effectuer sur l'équation (1) la différentiation d'ordres partiels $a, b, \ldots,$ puis de faire, dans le second membre de la formule résultante, l'hypothèse numérique

$$x - x_0 = y - y_0 = \ldots = 0.$$

Cela étant, je dis que la partie principale ainsi calculée admet les mêmes rayons de convergence que le développement de $f(x, y, \ldots)$.

Effectivement, en vertu même du mécanisme à l'aide duquel nous avons construit cette partie principale, ses termes correspondent respectivement à ceux du développement de $f(x, y, \ldots)$, et, si l'on désigne par $\mathrm{A}_{a,b,\ldots}$ la valeur que prend, au point $(x_0, y_0, \ldots)$, la dérivée

$$\frac{\partial^{a+b+\ldots} f(x, y, \ldots)}{\partial x^a\, \partial y^b \ldots},$$

les deux séries dont il s'agit ont respectivement pour termes généraux, la dernière

$$A_{a,b,\ldots}\frac{(x-x_0)^a}{1.2\ldots a}\frac{(y-y_0)^b}{1.2\ldots b}\cdots,$$

la première

$$A_{a,b,\ldots}\frac{(x-x_0)^{a+1}}{1.2\ldots a(a+1)}\frac{(y-y_0)^b}{1.2\ldots b}\cdots;$$

le rapport de ceux-ci, $\frac{x-x_0}{a+1}$, ayant un numérateur indépendant de a, b, ... avec un dénominateur au moins égal à 1, la partie principale converge dans des limites aussi étendues que le développement de $f(x, y, \ldots)$ (n° 30) (n° 20, IV) (n° 21, II).

II. Si l'on désigne par $P(x, y, \ldots)$ la somme de la portion de développement dont nous venons de démontrer la convergence, et qu'on lui ajoute une détermination initiale $\delta(y, \ldots)$ arbitrairement choisie sous la seule restriction d'être développable à partir de y_0, ..., la somme

$$u = P(x, y, \ldots) + \delta(y, \ldots) \tag{2}$$

vérifie identiquement l'équation (1).

Effectivement, il résulte du calcul même des coefficients de $P(x, y, \ldots)$ que la fonction $\frac{\partial u}{\partial x}$ et ses dérivées de tous ordres prennent, en x_0, y_0, ..., les mêmes valeurs numériques que la fonction $f(x, y, \ldots)$ et ses dérivées semblables : les deux fonctions $\frac{\partial u}{\partial x}$, $f(x, y, \ldots)$ sont donc identiquement égales (n° 57).

La formule (2) donne d'ailleurs la solution générale du problème que nous nous sommes posé : car toute intégrale de (1) développable à partir de x_0, y_0, ... a nécessairement, comme nous l'avons vu (I), la fonction $P(x, y, \ldots)$ pour partie principale de son développement, et il suffit alors, pour faire coïncider le second membre de la formule (2) avec l'intégrale que l'on considère, de prendre pour $\delta(y, \ldots)$ la détermination initiale de cette intégrale.

Enfin, il résulte de la formule (2) et du point précédemment établi (I) sur les rayons de convergence de $P(x, y, \ldots)$ que le développement d'une intégrale particulière quelconque converge dans les limites indiquées par l'énoncé.

III. En désignant par $U(x, y, \ldots)$ une solution particulière quelconque du problème qui nous occupe actuellement, la solution générale, exprimée par la formule (2), sera tout aussi bien exprimée par la formule

$$(3) \qquad u = U(x, y, \ldots) + \lambda(y, \ldots),$$

où $\lambda(y, \ldots)$ désigne une fonction arbitraire développable à partir de $y_0, \ldots$.

Effectivement, $U(x, y, \ldots)$, étant une solution de (1), sera donné par la formule (2) pour un choix convenable de $\delta(y, \ldots)$, et l'on aura, par exemple,

$$U(x, y, \ldots) = P(x, y, \ldots) + g(y, \ldots):$$

la formule (3) peut donc s'écrire

$$(4) \qquad u = P(x, y, \ldots) + g(y, \ldots) + \lambda(y, \ldots),$$

et, sous cette forme, il est facile de voir qu'elle équivaut entièrement à la formule (2); car la relation

$$\delta(y, \ldots) = g(y, \ldots) + \lambda(y, \ldots),$$

obtenue en égalant les seconds membres de (2) et (4), permet de déterminer $\delta(y, \ldots)$ quand on se donne $\lambda(y, \ldots)$, et réciproquement.

77. La connaissance d'une intégrale particulière quelconque $U(x, y, \ldots)$ de l'équation (1), qui permet, comme nous venons de le voir, d'écrire la formule générale d'intégration, permet aussi de calculer l'intégrale particulière qui, par rapport aux valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots$ des variations indépendantes, admet une détermination initiale donnée $\delta(y, \ldots)$ [1].

Effectivement, la détermination initiale d'une intégrale de l'équation (1) n'étant autre chose que la fonction des variables $y, \ldots$ à laquelle elle se réduit pour $x = x_0$, la fonction $\lambda(y, \ldots)$ qui figure dans la formule (3) devra vérifier la relation

$$U(x_0, y, \ldots) + \lambda(y, \ldots) = \delta(y, \ldots),$$

[1] Il va sans dire que les fonctions $U(x, y, \ldots)$, $\delta(y, \ldots)$ sont supposées développables, l'une à partir de $x_0, y_0, \ldots$, l'autre à partir de $y_0, \ldots$.

d'où l'on tire

$$\lambda(y, \ldots) = \delta(y, \ldots) - U(x_0, y, \ldots).$$

Si l'on considère, notamment, l'intégrale particulière dont la détermination initiale est identiquement nulle, ou en d'autres termes celle qui s'annule identiquement pour la valeur initiale x_0 de x, elle sera donnée par la formule

$$U(x, y, \ldots) - U(x_0, y, \ldots).$$

Il ne faut pas perdre de vue (76, I) que le développement de cette dernière intégrale à partir de $x_0, y_0, \ldots$ peut se déduire du développement similaire du second membre de l'équation (1) en augmentant d'une unité, dans chaque terme, l'exposant de $x - x_0$, puis divisant le terme dont on s'occupe par cet exposant ainsi augmenté; il converge d'ailleurs dans les mêmes limites.

78. On nomme *quadrature* l'opération qui consiste à rechercher, soit la solution générale du problème posé au n° 76, soit la solution particulière qui admet une détermination initiale donnée; la quadrature est dite *relative à telle ou telle variable,* suivant que la dérivée première que l'on suppose donnée intéresse telle ou telle variable. En vertu des n°s 76 et 77, *toute quadrature se ramène à la recherche d'une solution particulière quelconque d'une équation de la forme* (1).

Étant donnée une fonction $f(x, y, \ldots)$, développable à partir des valeurs initiales $x_0, y_0, \ldots$, si l'on effectue successivement sur cette fonction diverses quadratures, en ayant soin que le résultat de chacune d'elles s'annule pour la valeur initiale de la variable qu'elle intéresse, le résultat final est indépendant de l'ordre dans lequel les quadratures ont pu être exécutées.

Si l'on désigne en effet par

$$(5) \qquad \sum_{a, b, \ldots} A_{a,b,\ldots} \frac{(x - x_0)^a}{1.2\ldots a} \frac{(y - y_0)^b}{1.2\ldots b} \cdots$$

le développement de $f(x, y, \ldots)$ à partir de $x_0, y_0, \ldots$, et si sur $f(x, y, \ldots)$ on effectue dans un ordre quelconque m quadratures relatives à x, n relatives à y, etc., en se conformant chaque fois à la

condition initiale imposée, on aura (n° 77) pour résultat final

$$(6) \qquad \sum_{a,b,\ldots} A_{a,b,\ldots} \frac{(x-x_0)^{a+m}}{1.2\ldots(a+m)} \frac{(y-y_0)^{b+n}}{1.2\ldots(b+n)} \cdots$$

Il va sans dire qu'en désignant par $F(x, y, \ldots)$ la somme de ce dernier développement, on a identiquement

$$\frac{\partial^{m+n+\ldots} F(x, y, \ldots)}{\partial x^m \, \partial y^n \ldots} = f(x, y, \ldots);$$

car la dérivation d'ordres partiels m, n, ..., exécutée sur (6), fait retomber sur (5).

Fonctions schématiques et coupures; propositions relatives aux coupures.

79. L'expression la plus générale d'une fonction de $x, y, \ldots$ développable à partir de $x_0, y_0, \ldots$, valeurs particulières quelconques de ces variables (n° 76), s'obtient évidemment par la considération d'une série entière en $x - x_0, y - y_0, \ldots$ dont *tous* les coefficients sont arbitraires, et soumis, dans leur ensemble, à la seule restriction de la convergence. Un pareil développement, à coefficients *tous* indéterminés, constitue ce que nous nommerons une *fonction* (*développable*) *schématique* de x, y, ..., ayant pour *termes élémentaires* les termes mêmes du développement; si, comme cas extrême, le nombre des variables indépendantes se réduit à zéro, le développement se réduit à une simple *constante schématique*, que nous assimilerons souvent, pour l'uniformité du langage, à une fonction schématique *dégénérée*.

Il importe d'observer que, si quelques-uns des coefficients (fût-ce même un seul) viennent à être remplacés par des valeurs numériques particulières au lieu de rester arbitraires, le développement considéré cesse par là même d'être une fonction schématique; c'est ce qui arrive, notamment, si l'on en supprime un ou plusieurs termes élémentaires.

Si, dans une question où les variables indépendantes sont x, y, ..., on est conduit à considérer une fonction schématique de quelques-unes de ces dernières, celles d'entre les différences $x - x_0$, $y - y_0$, ... dont la fonction schématique ne dépend pas lui seront dites *étran-*

gères : si, notamment, la fonction schématique est dégénérée, les différences $x - x_0$, $y - y_0$, ... lui sont toutes étrangères; si elle dépend de toutes les variables $x, y, \ldots$, aucune des différences dont il s'agit ne lui est étrangère.

Considérons actuellement g fonctions schématiques (dégénérées ou non) de telles ou telles des variables $x, y, \ldots$, et indiquons, suivant les conventions ordinaires de l'écriture algébrique, en premier lieu, que chacune d'elles doit être multipliée par tel ou tel monome, entier en $x - x_0$, $y - y_0$, ..., ayant pour coefficient l'unité (avec un degré positif ou nul); en second lieu, que ces g produits doivent être ajoutés les uns aux autres : nous aurons ainsi une expression de la forme

$$\sum_{n=1}^{n=g} (x - x_0)^{a_n} (y - y_0)^{b_n} \ldots \mathrm{F}_{\theta_n},$$

où a_n, b_n, ... désignent des entiers positifs ou nuls, θ_n un groupe de variables indépendantes extrait du groupe total $x, y, \ldots$, et F_{θ_n} une fonction schématique des seules variables θ_n. Une pareille expression portera le nom de *somme schématique,* et, parmi les divers facteurs qui concourent, comme il vient d'être dit, à sa formation, nous distinguerons, d'une part, les *g facteurs schématiques*

$$\mathrm{F}_{\theta_1}, \quad \mathrm{F}_{\theta_2}, \quad \ldots, \quad \mathrm{F}_{\theta_g},$$

d'autre part, les *g facteurs monomes* correspondants

$$\begin{array}{l}(x - x_0)^{a_1} (y - y_0)^{b_1} \ldots, \\ (x - x_0)^{a_2} (y - y_0)^{b_2} \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (x - x_0)^{a_g} (y - y_0)^{b_g} \ldots .\end{array}$$

Les *termes élémentaires* de la somme seront les produits partiels qu'on obtient, *sans réduction des termes semblables,* en multipliant les termes élémentaires de tout facteur schématique par le facteur monome qui lui correspond; dans le cas où les produits partiels dont il s'agit sont tous dissemblables, la somme schématique sera dite *irréductible*. Enfin, les *termes schématiques* de la somme seront les g produits

$$(x - x_0)^{a_n} (y - y_0)^{b_n} \ldots \mathrm{F}_{\theta_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots, g),$$

dont chacun fournit tout un groupe de termes élémentaires; un terme schématique sera dit *dégénéré,* si le facteur schématique qui y figure est lui-même dégénéré, et il ne fournira alors qu'un seul terme élémentaire de la somme.

Par exemple, dans la somme schématique (irréductible)

$$F(y, z) + (x - x_0) H(x),$$

où $F(y, z)$, $H(x)$ désignent deux fonctions schématiques, il y a deux termes schématiques qui sont

$$F(y, z), \qquad (x - x_0) H(x);$$

ces termes contiennent respectivement les deux facteurs schématiques

$$F(y, z), \quad H(x),$$

et les deux facteurs monomes

$$1, \quad x - x_0$$

(dont le premier est de degré zéro). Quant aux termes élémentaires, les uns proviennent du premier terme schématique $F(y, z)$, et sont de la forme

$$A_{m,n}(y - y_0)^m (z - z_0)^n \qquad (m \geqq 0, \; n \geqq 0),$$

où $A_{m,n}$ désigne une constante arbitraire (ou schématique); les autres proviennent du deuxième terme schématique $(x - x_0) H(x)$, et sont de la forme

$$B_p(x - x_0)^{p+1} \qquad (p \geqq 0),$$

où B_p désigne une constante arbitraire.

Dans la somme schématique (irréductible)

$$F_0(z) + (x - x_0) F_1(z) + (x - x_0)^2 H_0(x)$$
$$+ (x - x_0)^2 (z - z_0) H_1(x) + A_0(y - y_0) + A_1(x - x_0)(y - y_0),$$

où $F_0(z)$, $F_1(z)$, $H_0(x)$, $H_1(x)$ désignent des fonctions schématiques, et A_0, A_1 des constantes schématiques, il y a six termes schématiques qui sont

$$F_0(z), \quad (x - x_0) F_1(z), \quad (x - x_0)^2 H_0(x),$$
$$(x - x_0)^2 (z - z_0) H_1(x), \quad A_0(y - y_0), \quad A_1(x - x_0)(y - y_0);$$

ces termes contiennent respectivement les six facteurs schématiques

$$F_0(z),\quad F_1(z),\quad H_0(x),\quad H_1(x),\quad A_0,\quad A_1$$

(dont les deux derniers sont dégénérés), et les six facteurs monomes

$$1,\quad x-x_0,\quad (x-x_0)^2,\quad (x-x_0)^2(z-z_0),\quad y-y_0,\quad (x-x_0)(y-y_0)$$

(dont le premier est de degré zéro). En ce qui concerne les termes élémentaires, les quatre premiers termes schématiques de la somme nous fournissent respectivement les quatre groupes

$$\begin{array}{ll} B_m(z-z_0)^m & (m \geqq 0), \\ C_n(x-x_0)(z-z_0)^n & (n \geqq 0), \\ D_p(x-x_0)^{p+2} & (p \geqq 0), \\ L_q(x-x_0)^{q+2}(z-z_0) & (q \geqq 0), \end{array}$$

où B_m, C_n, D_p, L_q désignent des constantes arbitraires; quant aux deux derniers termes schématiques,

$$A_0(y-y_0),\quad A_1(x-x_0)(y-y_0),$$

qui sont dégénérés, ils sont en même temps des termes élémentaires de la somme.

80. On dit qu'un monome,

$$A(x-x_0)^\alpha(y-y_0)^\beta\ldots,$$

entier par rapport aux différences $x-x_0$, $y-y_0$, ..., est *divisible* par un monome de même espèce,

$$A'(x-x_0)^{\alpha'}(y-y_0)^{\beta'}\ldots,$$

si aucune des différences

$$\alpha-\alpha',\quad \beta-\beta',\quad \ldots$$

n'est négative. Il est clair que, si un premier monome est divisible par un deuxième, et celui-ci divisible par un troisième, le premier l'est forcément par le troisième : car, en désignant par

$$\alpha,\ \beta,\ \ldots,\qquad \alpha',\ \beta',\ \ldots,\qquad \alpha'',\ \beta'',\ \ldots$$

les exposants de $x-x_0$, $y-y_0$, ... dans les trois monomes res-

pectifs, les relations évidentes

$$\alpha - \alpha'' = (\alpha - \alpha') + (\alpha' - \alpha''),$$
$$\beta - \beta'' = (\beta - \beta') + (\beta' - \beta''),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

qui ne contiennent, par hypothèse, aucune différence négative dans leurs seconds membres, ne peuvent non plus en contenir aucune dans leurs premiers membres.

Cela posé, considérons, d'une part, une fonction schématique de x, y, ..., d'autre part, un ensemble E, formé avec des monomes entiers par rapport à $x - x_0$, $y - y_0$, ..., qui présentent tous un degré supérieur à zéro, aient pour coefficient l'unité, et soient en nombre essentiellement *limité :* si, dans le développement de la fonction schématique, on supprime tous les termes élémentaires qui admettent pour diviseur quelqu'un des monomes de l'ensemble, la portion restante du développement se nommera le *résidu* de la *coupure* E, pratiquée dans le développement total.

On peut évidemment, sans changer le résidu, supprimer de l'ensemble E tout monome qui admettrait pour diviseur quelque autre monome du même ensemble : en opérant les suppressions de ce genre jusqu'à ce qu'il n'y en ait plus de possible, on tombe finalement sur un ensemble que nous qualifierons d'*irréductible.* D'après cela, *si, dans une fonction schématique de x, y, ..., on se propose d'opérer une coupure à l'aide d'un ensemble donné, celui-ci, moyennant la suppression éventuelle de quelques-uns des monomes qui le constituent, peut toujours être supposé irréductible.*

Enfin, les monomes de l'ensemble donné étant tous, par hypothèse, de degré supérieur à zéro, si, comme nous allons en démontrer la possibilité, on met le résidu de la coupure sous la forme d'une somme schématique irréductible, l'expression ainsi obtenue, dont tous les facteurs monomes sont nécessairement distincts, en contiendra un, et un seul, de degré zéro.

81. *Si, dans une fonction schématique, on se propose d'opérer une coupure à l'aide d'un ensemble* E, *l'application d'un procédé tout élémentaire* (dont l'indication se trouve contenue dans la démonstration ci-après) *fournit pour le résidu une somme schématique irréductible* (n[os] 79 et 80).

1. Par rapport à un ensemble donné E, on peut partager les variations indépendantes en deux groupes, suivant qu'elles figurent *effectivement* ou non dans l'ensemble dont il s'agit. Supposons, pour fixer les idées, que le premier groupe comprenne trois variables x, y, z, et le second deux variables s, t.

Cela étant, *le monome*

$$(x - x_0)^\alpha (y - y_0)^\beta (z - z_0)^\gamma (s - s_0)^\mu (t - t_0)^\nu \tag{1}$$

est divisible par quelqu'un des monomes de l'ensemble E, *ou bien n'est divisible par aucun d'eux, suivant que le monome*

$$(x - x_0)^\alpha (y - y_0)^\beta (z - z_0)^\gamma \tag{2}$$

possède lui-même l'une ou l'autre propriété.

Soient en effet

$$\left\{\begin{array}{l} (x - x_0)^{\alpha_1} (y - y_0)^{\beta_1} (z - z_0)^{\gamma_1}, \\ (x - x_0)^{\alpha_2} (y - y_0)^{\beta_2} (z - z_0)^{\gamma_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{3}$$

les divers monomes de l'ensemble E. Pour que le monome (1) ne soit divisible par aucun des monomes (3), il faut et il suffit que chacune des lignes horizontales

$$\begin{array}{lllll} \alpha - \alpha_1, & \beta - \beta_1, & \gamma - \gamma_1, & \mu - 0, & \nu - 0, \\ \alpha - \alpha_2, & \beta - \beta_2, & \gamma - \gamma_2, & \mu - 0, & \nu - 0, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots \end{array}$$

contienne au moins une différence négative, c'est-à-dire, puisque les quantités $\mu - 0$, $\nu - 0$ sont positives ou nulles, que chacune des lignes horizontales

$$\begin{array}{lll} \alpha - \alpha_1, & \beta - \beta_1, & \gamma - \gamma_1, \\ \alpha - \alpha_2, & \beta - \beta_2, & \gamma - \gamma_2, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots \end{array}$$

contienne au moins une différence négative. Or, c'est précisément la condition nécessaire et suffisante pour que le monome (2) ne soit divisible par aucun des monomes (3).

D'après cela, si l'on pratique la coupure E, d'abord dans le développement d'une fonction schématique de x, y, z, puis dans le développement d'une fonction schématique de x, y, z, s, t, le second résidu pourra se déduire du premier en y remplaçant le coefficient de

chaque terme élémentaire par une fonction schématique de s, t. On pourra donc, pour mettre le résidu de la coupure sous la forme d'une somme schématique irréductible, procéder exactement *comme si les variables* s, t *n'existaient pas :* on aura soin seulement, le problème une fois résolu dans ces conditions, de *considérer chacun des facteurs schématiques de la somme comme dépendant non seulement de celles d'entre les variables* x, y, z *qui entrent visiblement dans son expression, mais encore de* s, t; les constantes schématiques, notamment, devront être considérées comme des fonctions schématiques de s, t.

II. *Notre proposition est exacte si l'ensemble* E *ne dépend effectivement que d'une seule des différences obtenues en retranchant de chaque variable sa valeur initiale.*

Si, désignant les variables indépendantes par x, y, ... et leurs valeurs initiales par x_0, y_0, ..., on suppose, pour fixer les idées, que $x - x_0$ soit la différence dont il s'agit, l'ensemble E, rendu irréductible (n° 80), se compose nécessairement d'un monome unique tel que $(x - x_0)^\alpha$, où α est > 0. En faisant provisoirement abstraction, comme il est dit dans l'alinéa I, des variables autres que x, le résidu a manifestement pour expression

$$A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \ldots + A_{\alpha-1}(x - x_0)^{\alpha-1},$$

où A_0, A_1, A_2, ..., $A_{\alpha-1}$ désignent des constantes schématiques : il ne reste plus alors qu'à remplacer ces constantes par autant de fonctions schématiques,

$$F_0(y, \ldots), \quad F_1(y, \ldots), \quad F_2(y, \ldots), \quad \ldots, \quad F_{\alpha-1}(y, \ldots),$$

des variables autres que x, et l'on tombe ainsi sur la somme irréductible

$$(4) \quad F_0(y, \ldots) + (x - x_0) F_1(y, \ldots) + (x - x_0)^2 F_2(y, \ldots) + \ldots + (x - x_0)^{\alpha-1} F_{\alpha-1}(y, \ldots).$$

III. *Si notre proposition est exacte dans le cas où l'ensemble donné ne dépend effectivement que de k différences,* $y - y_0$, ..., *elle l'est encore dans le cas où il dépend, en outre, d'une autre différence,* $x - x_0$.

Le point à établir est évident, si l'ensemble E, une fois rendu irréductible, ne contient plus la différence $x - x_0$.

Si, même après cette réduction, l'ensemble E dépend de la différence $x - x_0$, désignons par α l'exposant maximum (> 0) dont elle se trouve affectée dans l'ensemble, et partageons ce dernier en plusieurs autres,

$$E^0, \quad E^1, \quad E^2, \quad \ldots, \quad E^{\alpha-1}, \quad E^\alpha,$$

suivant que, dans les divers monomes de E, la différence $x - x_0$ figure avec l'un ou l'autre des exposants

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad \alpha - 1, \quad \alpha.$$

En supposant, comme nous le faisons, que l'ensemble E ait été rendu irréductible, les monomes

$$x - x_0, \quad (x - x_0)^2, \quad \ldots, \quad (x - x_0)^{\alpha-1}$$

sont absents des ensembles respectifs

$$(5) \qquad E^1, \quad E^2, \quad \ldots, \quad E^{\alpha-1},$$

sans quoi les termes de E^α admettraient comme diviseur quelque monome des ensembles (5); quant à l'ensemble E^α, il peut, suivant les cas, contenir ou non le monome $(x - x_0)^\alpha$. Cela étant, nous désignerons par

$$e^1, \quad e^2, \quad \ldots, \quad e^{\alpha-1}$$

les ensembles respectivement déduits de (5) en remplaçant par zéro, dans chacun de leurs monomes, l'exposant de $x - x_0$, sans changer les exposants des autres différences; et, dans l'hypothèse où E^α ne contiendrait pas le monome $(x - x_0)^\alpha$, nous nommerons e^α l'ensemble déduit de E^α par la même opération. En posant, pour raison de symétrie, $e^0 = E^0$, il est clair que dans l'ensemble

$$[e^0, e^1, e^2, \ldots, e^{\alpha-1}, e^\alpha]$$

figurent seulement k différences.

Supposons maintenant, comme nous y autorise la remarque de l'alinéa I, que la fonction schématique dans laquelle il s'agit de pratiquer la coupure E ne dépende que des $k + 1$ variables $x, y, \ldots$, et décomposons par la pensée le résidu de la coupure en divers tronçons comprenant : le premier, les termes élémentaires indépendants de

$x-x_0$; le second, les termes élémentaires du premier degré en $x-x_0$; le troisième, les termes élémentaires du second degré en $x-x_0$; etc.; l'avant-dernier, les termes élémentaires de degré $\alpha-1$ en $x-x_0$; et le dernier, tous les termes élémentaires restants, c'est-à-dire ceux qui sont d'un degré *au moins égal à* α par rapport à $x-x_0$. Le résidu pourra alors s'écrire

$$(6)\quad \begin{aligned} &T_0(y,\ldots)+(x-x_0)T_1(y,\ldots)+(x-x_0)^2T_2(y,\ldots)+\ldots \\ &\quad +(x-x_0)^{\alpha-1}T_{\alpha-1}(y,\ldots)+(x-x_0)^\alpha T(x,y,\ldots); \end{aligned}$$

et si, dans cette expression, chacun des multiplicateurs

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{c} T_0(y,\ldots),\quad T_1(y,\ldots),\quad T_2(y,\ldots),\quad \ldots,\quad T_{\alpha-1}(y,\ldots), \\ T(x,y,\ldots) \end{array} \right.$$

est mis sous forme d'une somme schématique irréductible, il en sera évidemment de même pour l'expression (6).

D'autre part, le développement total de la fonction schématique, partagé en tronçons comme le résidu, peut évidemment s'écrire

$$\begin{aligned} &F_0(y,\ldots)+(x-x_0)F_1(y,\ldots)+(x-x_0)^2F_2(y,\ldots)+\ldots \\ &\quad +(x-x_0)^{\alpha-1}F_{\alpha-1}(y,\ldots)+(x-x_0)^\alpha F(x,y,\ldots), \end{aligned}$$

où

$$\begin{array}{c} F_0(y,\ldots),\quad F_1(y,\ldots),\quad F_2(y,\ldots),\quad \ldots,\quad F_{\alpha-1}(y,\ldots), \\ F(x,y,\ldots) \end{array}$$

désignent des fonctions schématiques.

Or, considérons les deux monomes

$$(8)\qquad (x-x_0)^a(y-y_0)^b\ldots,$$

$$(9)\qquad (y-y_0)^b\ldots,$$

dont le second se déduit du premier en y remplaçant l'exposant a par zéro. Pour que le monome (8) n'admette comme diviseur aucun des monomes de l'ensemble E, il faut et il suffit :

Si $a=0$, que le monome (9) ne soit divisible par aucun des monomes de e^0;

Si $a=1$, que le monome (9) ne soit divisible par aucun des monomes de $[e^0, e^1]$;

Si $a=2$, que le monome (9) ne soit divisible par aucun des monomes de $[e^0, e^1, e^2]$;

Etc.;

Si $a = \alpha - 1$, que le monome (9) ne soit divisible par aucun des monomes de $[e^0, e^1, e^2, \ldots, e^{\alpha-1}]$.

Il suffira donc, pour connaître successivement

$$T_0(y, \ldots), \quad T_1(y, \ldots), \quad T_2(y, \ldots), \quad \ldots, \quad T_{\alpha-1}(y, \ldots),$$

de pratiquer, dans le développement d'une fonction schématique des seules variables $y, \ldots$, les coupures respectives

$$[e^0], \quad [e^0, e^1], \quad [e^0, e^1, e^2], \quad \ldots, \quad [e^0, e^1, e^2, \ldots, e^{\alpha-1}].$$

Reste à calculer $T(x, y, \ldots)$. Si l'ensemble E^α contient le monome $(x - x_0)^\alpha$, $T(x, y, \ldots)$ est identiquement nul. Dans le cas contraire, on observera qu'en donnant à a une valeur quelconque supérieure ou égale à α et posant $a - \alpha = a'$, la condition nécessaire et suffisante pour que le monome (8) ne soit divisible par aucun monome de E est que le monome

$$(x - x_0)^{a'} (y - y_0)^b \ldots$$

ne le soit par aucun monome de

(10) $$[e^0, e^1, e^2, \ldots, e^{\alpha-1}, e^\alpha];$$

en conséquence, il suffira, pour connaître $T(x, y, \ldots)$, de pratiquer la coupure (10) dans le développement d'une fonction schématique de toutes les variables $x, y, \ldots$.

Ainsi, les expressions (7) proviennent toutes de coupures opérées à l'aide d'ensembles où figurent au plus k différences; elles peuvent donc, en vertu de ce qui est admis, se mettre sous forme de sommes schématiques irréductibles, et il en est de même, par suite, pour l'expression (6).

IV. Le simple rapprochement des alinéas II et III suffit à établir l'exactitude de notre énoncé général.

82. Supposons que le résidu d'une coupure E, pratiquée dans le développement d'une fonction schématique de $x, y, \ldots$, ait été mis, d'une manière quelconque, sous la forme d'une *somme schématique irréductible*,

(11) $$\sum_{n=1}^{n=\mu} (x - x_0)^{a_n} (y - y_0)^{b_n} \ldots F_{\theta_n}$$

(où a_n, b_n, ... désignent des entiers positifs ou nuls, θ_n un groupe de variables extrait du groupe total x, y, ..., et F_{θ_n} une fonction schématique des seules variables θ_n); puis, désignons par ω_n le groupe de variables complémentaire du groupe θ_n, c'est-à-dire tel que l'ensemble de ces deux groupes reproduise une fois et une seule chacune des variables indépendantes x, y, ...

Cela posé, *si, considérant le développement schématique total de notre fonction, on en prend* (conformément à la règle du n° 53) *la dérivée d'ordres partiels a_n, b_n, ..., et qu'on attribue ensuite aux variables du groupe ω_n leurs valeurs initiales, on tombe sur un développement, Φ_{θ_n}, ne dépendant* évidemment, *comme F_{θ_n}, que des seules variables du groupe θ_n*. Je dis que *ces deux développements, F_{θ_n}, Φ_{θ_n}, peuvent se déduire l'un de l'autre par des dérivations ou des quadratures* (n° 78) (exécutées conformément aux règles des n°s 53 et 77), *et que la convergence du premier dans certaines limites entraîne celle du second dans les mêmes limites, et réciproquement.*

I. *Si une série, ayant pour termes certains monomes entiers et dissemblables en $x - x_0$, $y - y_0$, ... à coefficients arbitraires, contient en facteur dans tous ses termes le monome*

$$(x - x_0)^{a_n}(y - y_0)^{b_n}\ldots,$$

et si l'on effectue sur elle (conformément à la règle du n° 53) *la dérivation d'ordres partiels a_n, b_n, ..., il suffit, pour remonter du développement ainsi obtenu au premier, d'effectuer sur lui* (conformément à la règle du n° 77) *a_n quadratures relatives à x, b_n relatives à y, etc., en ayant soin que le résultat de chaque quadrature s'annule pour la valeur initiale de la variable qu'elle intéresse* (n° 78).

Cette remarque, qu'on vérifie sans peine pour un terme quelconque du développement donné, s'applique par là même au développement tout entier.

II. Revenons à notre énoncé général.

Si un terme élémentaire du développement de notre fonction schématique ne contient pas en facteur

$$(x - x_0)^{a_n}(y - y_0)^{b_n}\ldots, \tag{12}$$

la dérivation d'ordres partiels a_n, b_n, ..., exécutée sur le terme dont il s'agit, donnera pour résultat zéro. Si un terme élémentaire du même développement contient en facteur le monome (12), et si, abstraction faite de ce facteur, il dépend de quelqu'une des variables du groupe ω_n, la dérivation d'ordres partiels a_n, b_n, ..., puis l'attribution dans le résultat aux variables ω_n de leurs valeurs initiales, donneront encore un résultat nul. Il suffit donc, pour effectuer l'opération indiquée par l'énoncé, de considérer, dans le développement de notre fonction schématique, l'ensemble des termes élémentaires qui contiennent en facteur le monome (12), et qui, abstraction faite de ce facteur, dépendent des seules variables θ_n. Or, les termes dont il s'agit sont précisément ceux que contient l'expression

$$(x-x_0)^{a_n}(y-y_0)^{b_n}\ldots \mathrm{F}_{\theta_n}:$$

car, s'il en existait d'autres dans la portion de développement que représente l'expression (11), cette dernière, contrairement à notre hypothèse, ne serait pas irréductible; et, s'il en existait d'autres dans la portion restante, les deux portions contiendraient des termes élémentaires respectivement semblables, ce qui est absurde.

Il suffit donc, pour passer de F_{θ_n} à Φ_{θ_n}, de multiplier F_{θ_n} par le monome (12) et d'exécuter sur le produit la dérivation d'ordres partiels a_n, b_n, ... Inversement (I), pour passer de Φ_{θ_n} à F_{θ_n}, on exécutera, sur Φ_{θ_n}, a_n quadratures relatives à x, b_n relatives à y, etc., en ayant soin que le résultat de chaque quadrature s'annule pour la valeur initiale de la variable qu'elle intéresse; puis on supprimera, dans la série ainsi obtenue, le facteur commun (12).

Dans le cas où le monome (12) ne contient *effectivement* aucune des variables θ_n, il est clair que les deux développements F_{θ_n}, Φ_{θ_n} ne diffèrent l'un de l'autre que par un simple facteur numérique, et qu'on a

$$\Phi_{\theta_n} = 1.2\ldots a_n \times 1.2\ldots b_n \times \ldots \times \mathrm{F}_{\theta_n}.$$

83. Supposons que, dans une question quelconque, u désigne une fonction inconnue des variables x, y, ..., assujettie, entre autres conditions, à être développable à partir des valeurs particulières x_0, y_0, ...; tous les coefficients du développement étant, jusqu'à nouvel ordre, indéterminés, ou, en d'autres termes, le développement étant, jusqu'à nouvel ordre, schématique, désignons par E un ensemble

donné, et considérons le résidu de la coupure pratiquée dans le développement à l'aide de E (n° 80); supposons enfin que, parmi les coefficients, jusqu'ici tous indéterminés, du développement de u, ceux du résidu soient assujettis à avoir des valeurs numériques assignées d'avance (et choisies de telle façon que le résidu soit convergent). Cela étant, si le résidu, considéré d'abord schématiquement, a été mis sous la forme d'une somme schématique irréductible telle que (11), la donnée dont il s'agit pourra se formuler des deux manières suivantes :

Ou bien on se donnera (numériquement, comme il vient d'être dit) les g fonctions

$$F_{\theta_1}, \quad F_{\theta_2}, \quad \ldots, \quad F_{\theta_g},$$

qui figurent (schématiquement) dans l'expression (11);

Ou bien, faisant successivement

$$n = 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad g,$$

on se donnera (numériquement) la fonction des variables θ_n à laquelle se réduit

$$\frac{\partial^{a_n+b_n+\ldots} u}{\partial x^{a_n} \partial y^{b_n} \ldots}$$

par l'attribution aux variables ω_n de leurs valeurs initiales.

Moyennant le recours éventuel à des quadratures, *cette seconde donnée est,* comme nous venons de le voir (n° 82), *entièrement équivalente à la première, et se compose de développements convergeant respectivement dans les mêmes limites.*

Par exemple, si l'ensemble E se réduit au monome unique $(x - x_0)^\alpha$ (où α est > 0), la donnée, dans une question quelconque, de la portion du développement de u qui résulte de la coupure E, pourra se formuler : soit par celle des α fonctions

$$F_0(y, \ldots), \quad F_1(y, \ldots), \quad F_2(y, \ldots), \quad \ldots, \quad F_{\alpha-1}(y, \ldots),$$

qui figurent dans la formule (4); soit par celle des α fonctions de $y, \ldots$ auxquelles se réduisent respectivement

$$u, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{\alpha-1} u}{\partial x^{\alpha-1}}$$

pour $x = x_0$.

84. Appliquons cette méthode à quelques exemples.

I. Considérons une fonction, provisoirement schématique, u, des variables $x, y, z, \ldots$, et un ensemble E composé du seul monome

$$(x-x_0)^\alpha (y-y_0)^\beta,$$

où α et β sont l'un et l'autre supérieurs à zéro.

En adoptant les mêmes notations qu'à l'alinéa III du n° 81, on voit que les ensembles $E^0, E^1, \ldots, E^{\alpha-1}$ n'existent pas, et que l'ensemble E^α se réduit à $(x-x_0)^\alpha(y-y_0)^\beta$; que, par suite, les ensembles e^0, $e^1, \ldots, e^{\alpha-1}$ n'existent pas, et que l'ensemble e^α se réduit à $(y-y_0)^\beta$. Si donc, dans l'expression (6), on fait abstraction du dernier terme, les coefficients des puissances successives de $x-x_0$ dans les α termes qui précèdent se réduisent à de simples fonctions schématiques des seules variables $y, z, \ldots$. Quant au coefficient de $(x-x_0)^\alpha$ dans le dernier terme, il s'obtiendra en pratiquant la coupure $(y-y_0)^\beta$ dans le développement d'une fonction schématique de toutes les variables $x, y, z, \ldots$. Il vient ainsi (n° 81, II), pour l'expression (6),

$$\begin{aligned}&F_0(y, z, \ldots) + (x-x_0)\,F_1(y, z, \ldots) + \ldots + (x-x_0)^{\alpha-1}\,F_{\alpha-1}(y, z, \ldots)\\ &\quad + (x-x_0)^\alpha[H_0(x, z, \ldots) + (y-y_0)\,H_1(x, z, \ldots) + \ldots\\ &\qquad\qquad + (y-y_0)^{\beta-1}\,H_{\beta-1}(x, z, \ldots)],\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}&F_0(y, z, \ldots) + (x-x_0)\,F_1(y, z, \ldots) + \ldots + (x-x_0)^{\alpha-1}\,F_{\alpha-1}(y, z, \ldots)\\ &\quad + (x-x_0)^\alpha\,H_0(x, z, \ldots) + (x-x_0)^\alpha(y-y_0)\,H_1(x, z, \ldots) + \ldots\\ &\quad + (x-x_0)^\alpha(y-y_0)^{\beta-1}\,H_{\beta-1}(x, z, \ldots),\end{aligned}\right.$$

où $F_0, F_1, \ldots, F_{\alpha-1}$ désignent des fonctions schématiques de y, $z, \ldots$, et $H_0, H_1, \ldots, H_{\beta-1}$ des fonctions schématiques de $x, z, \ldots$.

Cela étant, la donnée (numérique), dans une question quelconque, de la portion du développement de u qui résulte de la coupure E, pourra se formuler :

Soit par celle des $\alpha+\beta$ fonctions

$$\begin{aligned}&F_0(y, z, \ldots),\quad F_1(y, z, \ldots),\quad \ldots,\quad F_{\alpha-1}(y, z, \ldots),\\ &H_0(x, z, \ldots),\quad H_1(x, z, \ldots),\quad \ldots,\quad H_{\beta-1}(x, z, \ldots),\end{aligned}$$

qui figurent (schématiquement) dans l'expression (13);

Soit par celle : 1° des α fonctions de $y, z, \ldots$ auxquelles se

réduisent respectivement

$$u, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{\alpha-1} u}{\partial x^{\alpha-1}}$$

pour $x = x_0$; 2° des β fonctions de x, z, ... auxquelles se réduisent respectivement

$$\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial x^{\alpha}}, \quad \frac{\partial^{\alpha+1} u}{\partial x^{\alpha}\,\partial y}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{\alpha+\beta-1} u}{\partial x^{\alpha}\,\partial y^{\beta-1}}$$

pour $y = y_0$.

Il est clair qu'en permutant, dans l'opération précédente, les rôles respectifs des variables x et y, on arrivera, pour la portion considérée du développement de u, à la forme schématique

$$(14)\quad \begin{aligned} &P_0(x, z, \ldots) + (y - y_0)\,P_1(x, z, \ldots) + \ldots + (y - y_0)^{\beta-1}\,P_{\beta-1}(x, z, \ldots) \\ &+ (y - y_0)^{\beta}\,Q_0(y, z, \ldots) + (y - y_0)^{\beta}(x - x_0)\,Q_1(y, z, \ldots) + \ldots \\ &+ (y - y_0)^{\beta}(x - x_0)^{\alpha-1}\,Q_{\alpha-1}(y, z, \ldots). \end{aligned}$$

Dans une question quelconque, la donnée (numérique) de cette portion de développement pourra donc encore se formuler :

Soit par celle des $\alpha + \beta$ fonctions

$$\begin{matrix} P_0(x, z, \ldots), & P_1(x, z, \ldots), & \ldots, & P_{\beta-1}(x, z, \ldots), \\ Q_0(y, z, \ldots), & Q_1(y, z, \ldots), & \ldots, & Q_{\alpha-1}(y, z, \ldots), \end{matrix}$$

qui figurent (schématiquement) dans l'expression (14);

Soit par celle : 1° des β fonctions de x, z, ... auxquelles se réduisent respectivement

$$u, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{\beta-1} u}{\partial y^{\beta-1}}$$

pour $y = y_0$; 2° des α fonctions de y, z, ... auxquelles se réduisent respectivement

$$\frac{\partial^{\beta} u}{\partial y^{\beta}}, \quad \frac{\partial^{\beta+1} u}{\partial y^{\beta}\,\partial x}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{\beta+\alpha-1} u}{\partial y^{\beta}\,\partial x^{\alpha-1}}$$

pour $x = x_0$.

II. Considérons une fonction, provisoirement schématique, u, des trois variables x, y, z, et un ensemble E composé du seul monome

$$(15)\qquad (x - x_0)(y - y_0)(z - z_0).$$

En adoptant les mêmes notations qu'à l'alinéa III du n° **81**, on voit que $\alpha = 1$, que l'ensemble E^0 n'existe pas, et que l'ensemble E^{α}

où E' se réduit au monome (15); que, par suite, l'ensemble e^{α} ou e' se réduit au monome $(y-y_0)(z-z_0)$. Dans la formule

$$T_0(y, z)+(x-x_0)T(x, y, z), \tag{16}$$

l'expression $T_0(y, z)$ se réduit donc à une fonction schématique des seules variables y et z, et l'expression $T(x, y, z)$ s'obtiendra en pratiquant la coupure $(y-y_0)(z-z_0)$ dans le développement d'une fonction schématique des trois variables x, y, z : on a ainsi, conformément à l'exemple I,

$$T(x, y, z)=H(x, z)+(y-y_0)K(x, y),$$

et la formule (16) devient alors

$$F(y, z)+(x-x_0)H(x, z)+(x-x_0)(y-y_0)K(x, y), \tag{17}$$

où $F(y, z)$, $H(x, z)$, $K(x, y)$ désignent trois fonctions schématiques.

Cela étant, la donnée (numérique), dans une question quelconque, de la portion du développement de u qui provient de la coupure E, pourra se formuler :

Soit par celle des trois fonctions $F(y, z)$, $H(x, z)$, $K(x, y)$, qui figurent (schématiquement) dans l'expression (17);

Soit par celle : 1° de la fonction de y et z à laquelle se réduit u pour $x=x_0$; 2° de la fonction de x et z à laquelle se réduit $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour $y=y_0$; 3° de la fonction de x et y à laquelle se réduit $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ pour $z=z_0$.

En permutant d'une façon quelconque, dans l'opération précédente, les rôles respectifs des trois variables x, y, z, on arrivera, pour la portion considérée du développement schématique de u, à une forme se déduisant de (17) par la permutation dont il s'agit. Comme il existe six permutations de trois objets, on obtiendra en tout six formes, de chacune desquelles on déduira, comme ci-dessus, deux manières de formuler la donnée de cette portion de développement.

III. Si l'ensemble E se compose exclusivement de monomes du premier degré, par exemple

$$x-x_0, \quad y-y_0,$$

il est clair que la portion du développement schématique de u qui résulte de la coupure E se réduit à une fonction schématique des variables autres que x et y; la donnée (numérique), dans une question quelconque, du résidu de cette coupure, se formulera donc par celle de la fonction à laquelle se réduit u pour

$$x-x_0=y-y_0=0.$$

IV. Supposons que la fonction, provisoirement schématique, u dépende des trois variables x, y, z, et que l'ensemble E se compose des deux monomes

$$(x-x_0)(y-y_0), \quad (x-x_0)(z-z_0).$$

En adoptant les mêmes notations qu'à l'alinéa III du n° **81**, on voit que $\alpha=1$, que l'ensemble E^0 n'existe pas, et que l'ensemble E^α ou E^1 se compose des deux monomes ci-dessus; que, par suite, l'ensemble e^α ou e^1 se compose des deux monomes

$$y-y_0, \quad z-z_0. \tag{18}$$

Dans la formule (16), l'expression $T_0(y,z)$ se réduit donc à une fonction schématique des seules variables y et z, et l'expression $T(x,y,z)$ s'obtient en pratiquant la coupure (18) dans le développement d'une fonction schématique de x, y, z; conformément à l'exemple III, $T(x, y, z)$ est alors une fonction schématique de la variable x, et l'expression (16) prend la forme

$$F(y, z)+(x-x_0)H(x). \tag{19}$$

Cela étant, la donnée (numérique), dans une question quelconque, de la portion du développement de u qui résulte de la coupure E, pourra se formuler :

Soit par celle des deux fonctions $F(y,z)$, $H(x)$, qui figurent (schématiquement) dans l'expression (19);

Soit par celle : 1° de la fonction de y et z à laquelle se réduit u pour $x=x_0$; 2° de la fonction de x à laquelle se réduit $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour

$$y-y_0=z-z_0=0.$$

V. Supposons que la fonction, provisoirement schématique, u dépende des trois variables x, y, z, et que l'ensemble E se compose

des trois monomes

$$x - x_0, \quad (y - y_0)(z - z_0), \quad (y - y_0)^3.$$

Dans le cas actuel, α est égal à 1, l'ensemble E^0 se compose des deux monomes

$$(20) \qquad (y - y_0)(z - z_0), \quad (y - y_0)^3,$$

et l'ensemble E^α ou E^1 du monome unique $x - x_0$; l'expression $T(x, y, z)$ qui figure dans la formule (16) est donc identiquement nulle, et l'expression $T_0(y, z)$ s'obtient en pratiquant la coupure (20) dans le développement d'une fonction schématique des seules variables y et z. En ordonnant l'ensemble (20) d'après les degrés croissants de ses monomes relativement à $y - y_0$, et appliquant la méthode exposée au n° 81, on voit immédiatement : 1° que l'expression $T_0(y, z)$ est de la forme

$$S_0(z) + (y - y_0) S_1(z) + (y - y_0)^2 S_2(z) + (y - y_0)^3 S(y, z);$$

2° que $S(y, z)$ est identiquement nul; 3° que $S_0(z)$ est une fonction schématique de z; 4° que $S_1(z)$ et $S_2(z)$ s'obtiennent en pratiquant la coupure $(z - z_0)$ dans le développement d'une fonction schématique de z, et se réduisent par conséquent à des constantes schématiques.

En définitive, on obtient, pour le résidu de la coupure E, l'expression

$$(21) \qquad F(z) + A(y - y_0) + B(y - y_0)^2,$$

où A, B désignent deux constantes schématiques, et $F(z)$ une fonction schématique.

Cela étant, la donnée (numérique), dans une question quelconque, du résidu de cette coupure, pourra se formuler :

Soit par celle de la fonction $F(z)$ et des deux constantes A, B, qui figurent (schématiquement) dans l'expression (21);

Soit par celle : 1° de la fonction de z à laquelle se réduit u pour

$$x - x_0 = y - y_0 = 0;$$

2° des valeurs numériques auxquelles se réduisent respectivement $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ lorsqu'on attribue simultanément à toutes les variables leurs valeurs initiales x_0, y_0, z_0.

VI. Supposons que la fonction, provisoirement schématique, u dépende des trois variables x, y, z, et que l'ensemble E se compose des quatre monomes

$$(x-x_0)^2(z-z_0)^2, \quad (x-x_0)^2(y-y_0), \quad (y-y_0)(z-z_0), \quad (y-y_0)^2.$$

En ordonnant l'ensemble E d'après les degrés croissants de ses monomes relativement à $y-y_0$, on obtient les trois ensembles

$$\begin{gathered}(x-x_0)^2(z-z_0)^2,\\ (x-x_0)^2(y-y_0), \quad (z-z_0)(y-y_0),\\ (y-y_0)^2.\end{gathered}$$

Le résidu de la coupure E est donc de la forme

$$T_0(x, z)+(y-y_0)\,T_1(x, z)+(y-y_0)^2\,T(x, y, z),$$

et l'on voit, par l'application de notre méthode : 1° que $T(x, y, z)$ est identiquement nul; 2° que $T_0(x, z)$ s'obtient en pratiquant la coupure $(x-x_0)^2(z-z_0)^2$ dans le développement d'une fonction schématique des seules variables x et z; 3° que $T_1(x, z)$ s'obtient en pratiquant la coupure

$$(x-x_0)^2(z-z_0)^2, \quad (x-x_0)^2, \quad z-z_0,$$

ou, ce qui revient au même (n° 80), la coupure

$$(x-x_0)^2, \quad z-z_0$$

dans le développement d'une fonction schématique des seules variables x et z.

En calculant, d'après cela, les expressions

$$T_0(x, z), \quad T_1(x, z),$$

on trouvera : 1° qu'elles ont respectivement les formes

$$\begin{aligned}T_0(x, z)&=S_0(z)+(x-x_0)\,S_1(z)+(x-x_0)^2\,S(x, z),\\ T_1(x, z)&=U_0(x)+(z-z_0)\,U(x, z);\end{aligned}$$

2° que $U(x, z)$ est identiquement nul, que $S(x, z)$ s'obtient en pratiquant la coupure $(z-z_0)^2$ dans le développement d'une fonction schématique de x et z, que $S_0(z)$ et $S_1(z)$ sont des fonctions schématiques de z, et que $U_0(x)$ s'obtient en pratiquant la coupure $(x-x_0)^2$ dans le développement d'une fonction schématique de x.

Il vient ainsi

$$(22)\quad \begin{aligned} T_0(x, z) &= F_0(z) + (x - x_0) F_1(z) \\ &\quad + (x - x_0)^2 H_0(x) + (x - x_0)^2 (z - z_0) H_1(x), \\ T_1(x, z) &= A_0 + A_1(x - x_0), \end{aligned}$$

où A_0, A_1 désignent des constantes schématiques, et $F_0(z)$, $F_1(z)$, $H_0(x)$, $H_1(x)$ des fonctions schématiques; on en déduit, pour le résidu de la coupure E, l'expression

$$(23)\quad \begin{aligned} &F_0(z) + (x - x_0) F_1(z) + (x - x_0)^2 H_0(x) \\ &\quad + (x - x_0)^2 (z - z_0) H_1(x) + A_0(y - y_0) + A_1(x - x_0)(y - y_0). \end{aligned}$$

En conséquence, la donnée (numérique), dans une question quelconque, du résidu de cette coupure, pourra se formuler :

Soit par celle des quatre fonctions $F_0(z)$, $F_1(z)$, $H_0(x)$, $H_1(x)$ et des deux constantes A_0, A_1, qui figurent (schématiquement) dans l'expression (23);

Soit par celle : 1° des deux fonctions de z auxquelles se réduisent respectivement u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour

$$x - x_0 = y - y_0 = 0;$$

2° des deux fonctions de x auxquelles se réduisent respectivement $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial z}$ pour

$$y - y_0 = z = z_0 = 0;$$

3° des deux valeurs numériques auxquelles se réduisent respectivement $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$ lorsqu'on attribue simultanément à toutes les variables leurs valeurs initiales x_0, y_0, z_0.

Le calcul de l'expression $T_0(x, z)$ s'effectue, comme nous venons de le voir, en pratiquant la coupure $(x - x_0)^2 (z - z_0)^2$ dans le développement d'une fonction schématique de x et z, et l'on tombe ainsi sur l'expression (22). Or, il est clair qu'en permutant, dans cette opération, les rôles respectifs des variables x et z, on obtiendra

$$\begin{aligned} T_0(x, z) &= P_0(x) + (z - z_0) P_1(x) \\ &\quad + (z - z_0)^2 Q_0(z) + (z - z_0)^2 (x - x_0) Q_1(z). \end{aligned}$$

Le résidu de la coupure E peut donc aussi se mettre sous la forme

$$(24)\quad P_0(x) + (z - z_0) P_1(x) + (z - z_0)^2 Q_0(z) + (z - z_0)^2 (x - x_0) Q_1(z) + A_0(y - y_0) + A_1(x - x_0)(y - y_0),$$

où A_0, A_1 désignent deux constantes schématiques, et $P_0(x)$, $P_1(x)$, $Q_0(z)$, $Q_1(z)$ quatre fonctions schématiques; et, en conséquence, la donnée (numérique), dans une question quelconque, du résidu de cette coupure, pourra encore se formuler :

Soit par celle des quatre fonctions $P_0(x)$, $P_1(x)$, $Q_0(z)$, $Q_1(z)$ et des deux constantes A_0, A_1, qui figurent (schématiquement) dans l'expression (24);

Soit par celle : 1° des deux fonctions de x auxquelles se réduisent respectivement u et $\frac{\partial u}{\partial z}$ pour

$$y - y_0 = z - z_0 = 0;$$

2° des deux fonctions de z auxquelles se réduisent respectivement $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ et $\frac{\partial^3 u}{\partial z^2\, \partial x}$ pour

$$x - x_0 = y - y_0 = 0;$$

3° des deux valeurs numériques auxquelles se réduisent respectivement $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$ lorsqu'on attribue simultanément à toutes les variables leurs valeurs initiales x_0, y_0, z_0.

85. Un ordre déterminé quelconque, par exemple l'ordre x, y, z, ..., ayant été adopté pour les variables indépendantes, il résulte de notre démonstration du n° 81 que, pour effectuer une coupure à l'aide d'un ensemble de monomes entiers par rapport aux différences

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad z - z_0, \quad \dots,$$

on se trouve ramené à en opérer un certain nombre d'autres à l'aide d'ensembles indépendants de $x - x_0$; que, pour effectuer chacune de celles-ci, on se trouve ramené à en opérer un certain nombre d'autres à l'aide d'ensembles indépendants de $x - x_0$, $y - y_0$; et ainsi de suite; et que, finalement, on se trouve conduit à effectuer des coupures à l'aide d'ensembles indépendants de toutes les différences qui précèdent la dernière. Lorsque l'opération suit la marche

régulière que nous venons de décrire, nous dirons, pour abréger, qu'elle est *ordonnée par rapport aux variables, considérées dans l'ordre* $x, y, z, \ldots$.

Cela étant, *toute somme schématique provenant de l'opération ordonnée que nous venons de décrire satisfait nécessairement à la condition suivante :*

Si l'on considère les divers produits obtenus en multipliant l'un quelconque des facteurs monomes de la somme schématique par l'une quelconque des différences étrangères au facteur schématique (dégénéré ou non) qui lui correspond (n° 79), *et si l'on partage ces produits en deux groupes suivant qu'ils sont, ou non, semblables à des termes élémentaires du résidu, le premier groupe reproduit, sans omission ni addition, les divers facteurs monomes qui, dans la somme schématique, ont un degré supérieur à zéro, et le second contient, entre autres monomes, tous ceux dont se compose l'ensemble* E *quand on l'a rendu irréductible.*

I. Si, désignant par E et L deux ensembles quelconques (dont l'un ou l'autre peut faire défaut, ou qui peuvent même faire défaut tous deux), on opère sur une fonction schématique, par une méthode quelconque, d'abord la coupure E, puis la coupure (E, L), il est clair, à ne considérer que les termes *élémentaires* (n° 79) des deux résidus, qu'on passe du premier au second par la suppression de certains d'entre eux.

Cela étant, *si les deux coupures* E *et* (E, L) *ont été successivement exécutées en adoptant pour les variables un même ordre quelconque* (*voir* le début du présent n° 85), *ceux des facteurs monomes de la première somme schématique qui sont semblables à des termes élémentaires de la seconde ne peuvent manquer d'être des facteurs monomes de la seconde.*

A. Le point à établir est exact si l'ensemble E fait défaut, ce qui se produit, notamment, si l'ensemble (E, L) fait défaut.

Car notre méthode nous donne alors, pour le résidu correspondant à E, la fonction schématique même dans laquelle il s'agissait de pratiquer une coupure, c'est-à-dire une somme schématique composée d'un terme unique où le facteur monome est de degré zéro; et nous savons d'ailleurs, en vertu d'une remarque faite plus haut (n° 80),

que ce même facteur monome figurera nécessairement dans la somme schématique obtenue par la coupure (E, L).

B. Le point à établir est exact si l'ensemble (E, L) ne dépend que d'une seule différence, $x - x_0$.

Si l'ensemble E fait défaut, cela résulte de *A*.

Dans le cas contraire, l'ensemble E, rendu irréductible, se compose d'un monome unique tel que $(x - x_0)^\alpha$, où α est > 0, et l'on a, pour le résidu correspondant, l'expression

$$F_0 + (x - x_0) F_1 + \ldots + (x - x_0)^{\alpha - 1} F_{\alpha - 1},$$

où $F_0, F_1, \ldots, F_{\alpha-1}$ désignent des fonctions schématiques dont chacune dépend de toutes les variables autres que x. — Si l'on passe maintenant à l'ensemble (E, L), ce dernier, rendu irréductible, se compose d'un monome unique, $(x - x_0)^\beta$, où β désigne un entier supérieur à zéro et au plus égal à α, et l'on aura, pour le résidu correspondant, l'expression

$$H_0 + (x - x_0) H_1 + \ldots + (x - x_0)^{\beta - 1} H_{\beta - 1},$$

où $H_0, H_1, \ldots, H_{\beta-1}$ désignent des fonctions schématiques dont chacune dépend de toutes les variables autres que x. — On voit donc que les facteurs monomes

$$(x - x_0)^0, \quad (x - x_0)^1, \quad \ldots, \quad (x - x_0)^{\beta - 1}$$

du premier résidu figurent comme tels dans le second; quant aux facteurs monomes restants (s'il y en a) du premier résidu, ils ne sont semblables à aucun des termes élémentaires du second.

C. Si le point à établir est exact dans le cas où l'ensemble (E, L) dépend des k dernières différences, il l'est aussi dans le cas où cet ensemble dépend des $k + 1$ dernières.

Soient $x, y, \ldots$ les $k + 1$ dernières variables : les facteurs monomes des résidus considérés ne peuvent alors dépendre que des différences $x - x_0, y - y_0, \ldots$.

1° Si l'ensemble E, rendu irréductible, ne dépend pas de la différence $x - x_0$, les facteurs monomes du résidu correspondant ne dépendront que des k différences postérieures, $y - y_0, \ldots$, et, dès lors, le résidu de la coupure (E, L) ne pourra offrir de termes élémentaires semblables aux facteurs monomes dont il s'agit que dans

la portion où ses propres facteurs monomes sont indépendants de $x - x_0$. Or, il suffit, pour obtenir cette dernière portion, d'extraire de L l'ensemble partiel, L_0, qui n'en dépend pas, et de pratiquer la coupure (E, L_0) dans une fonction schématique, soit des diverses variables autres que x (les postérieures à x et les antérieures), soit de toutes les variables, y compris x. Il est d'ailleurs permis de supposer, en vue du point qui nous occupe, que les deux coupures E et (E, L_0) ont été pratiquées dans une fonction schématique dépendant d'un seul et même groupe de variables, qui est le groupe $y, \ldots$: car cette nouvelle hypothèse laisse identiques à eux-mêmes, dans l'un et l'autre résidu, tant les facteurs monomes, que les termes élémentaires dépendant des seules variables $y, \ldots$. Cela étant, l'exactitude du point à établir résulte immédiatement de ce qui est admis.

2° Supposons maintenant que l'ensemble E, rendu irréductible, dépende de la différence $x - x_0$, et désignons par α l'exposant maximum (> 0) dont elle s'y trouve affectée après cette réduction. En adoptant, relativement à l'ensemble E, les mêmes notations qu'à l'alinéa III du n° 81, le résidu de la coupure E pourra s'écrire, soit sous la forme

$$(25) \qquad T_0 + (x - x_0)T_1 + \ldots + (x - x_0)^{\alpha-1} T_{\alpha-1},$$

soit sous la forme

$$(26) \qquad T_0 + (x - x_0)T_1 + \ldots + (x - x_0)^{\alpha-1} T_{\alpha-1} + (x - x_0)^{\alpha} T :$$

dans ces deux formules, les sommes schématiques $T_0, T_1, \ldots, T_{\alpha-1}$ proviennent des coupures

$$[e^0], \quad [e^0, e^1], \quad \ldots, \quad [e^0, e^1, \ldots, e^{\alpha-1}],$$

pratiquées sur une fonction schématique des diverses variables autres que x, et, dans la formule (26), la somme schématique T provient de la coupure

$$[e^0, e^1, \ldots, e^{\alpha-1}, e^{\alpha}],$$

pratiquée sur une fonction schématique de toutes les variables, y compris x.

De l'ensemble E, passons maintenant à l'ensemble (E, L), et adoptons, relativement à l'ensemble L, des notations analogues à celles qui concernent l'ensemble E.

S'il arrive, comme nous le supposerons d'abord, qu'en désignant par β quelque entier satisfaisant à la double relation

$$0 < \beta \leqq \alpha,$$

l'ensemble (E, L), rendu irréductible, contienne le monome $(x - x_0)^\beta$, le résidu de la coupure (E, L) pourra s'écrire sous la forme

$$(27) \qquad S_0 + (x - x_0) S_1 + \ldots + (x - x_0)^{\beta-1} S_{\beta-1},$$

où les sommes schématiques S_0, S_1, ..., $S_{\beta-1}$ proviennent respectivement des coupures

$$[(e^0), (l^0)], \quad [(e^0, e^1), (l^0, l^1)], \quad \ldots, \quad [(e^0, e^1, \ldots, e^{\beta-1}), (l^0, l^1, \ldots, l^{\beta-1})],$$

pratiquées sur une fonction schématique des diverses variables autres que x.

On voit tout d'abord que l'expression (25) ou (26) ne peut offrir de facteurs monomes semblables à des termes élémentaires de (27) que dans la portion

$$(28) \qquad T_0 + (x - x_0) T_1 + \ldots + (x - x_0)^{\beta-1} T_{\beta-1}.$$

D'un autre côté, il est permis de supposer, en vue du point qui nous occupe, que les coupures à l'aide desquelles on obtient les sommes schématiques

$$(29) \qquad T_0, \quad T_1, \quad \ldots, \quad T_{\beta-1},$$

$$(30) \qquad S_0, \quad S_1, \quad \ldots, \quad S_{\beta-1},$$

et qui proviennent d'ensembles dépendant des seules différences $y - y_0$, ..., ont été pratiquées sur une fonction schématique dépendant d'un seul et même groupe de variables, qui est le groupe y, ... : car cette nouvelle hypothèse laisse identique à eux-mêmes, dans les résidus correspondants, tant les facteurs monomes, que les termes élémentaires dépendant des seules variables y, ...; elle laissera donc identiques à eux-mêmes, dans les expressions (28) et (27), tant les facteurs monomes, que les termes élémentaires (seuls utiles à considérer) qui ne dépendent que de x, y, ...

Cela étant, si, dans les suites (29) et (30), on considère deux sommes de même rang, il résulte de ce qui est admis que ceux d'entre les facteurs monomes de la première qui sont semblables à des termes

élémentaires de la seconde sont également des facteurs monomes de la seconde : dès lors, ceux d'entre les facteurs monomes de (28) qui sont semblables à des termes élémentaires de (27) sont également des facteurs monomes de (27), ce que nous voulions établir.

3° Les mêmes choses étant posées que dans 2° relativement à l'ensemble E, supposons, contrairement à ce qui a lieu dans 2°, que l'ensemble (E, L), rendu irréductible, ne contienne aucun monome tel que $(x-x_0)^\beta$, où β désigne quelque entier supérieur à zéro et au plus égal à α : de là résulte tout d'abord que l'ensemble E, rendu irréductible, ne peut contenir le monome $(x-x_0)^\alpha$, et que, dès lors, le résidu de la coupure E est de la forme (26). Quant au résidu de la coupure (E, L), il pourra s'écrire, soit sous la forme

$$(31) \qquad S_0+(x-x_0)S_1+\ldots+(x-x_0)^{\alpha-1}S_{\alpha-1}+(x-x_0)^\alpha S,$$

soit sous la forme

$$(32) \qquad S_0+(x-x_0)S_1+\ldots+(x-x_0)^{\alpha-1}S_{\alpha-1}+(x-x_0)^\alpha S_\alpha+\ldots :$$

dans ces formules, les sommes schématiques $S_0, S_1, \ldots, S_{\alpha-1}, S_\alpha$ proviennent des coupures

$$[(e^0),(l^0)], \quad [(e^0,e^1),(l^0,l^1)], \quad \ldots,$$
$$[(e^0,e^1,\ldots,e^{\alpha-1}),(l^0,l^1,\ldots,l^{\alpha-1})], \quad [e^0,e^1,\ldots,e^{\alpha-1},e^\alpha),(l^0,l^1,\ldots,l^{\alpha-1},l^\alpha)],$$

pratiquées sur une fonction schématique des diverses variables autres que x, et la somme schématique S, qui figure dans la formule (31), provient de la dernière coupure, pratiquée sur une fonction schématique de toutes les variables, y compris x.

Il est d'ailleurs permis de supposer, en vue du point qui nous occupe, que les coupures à l'aide desquelles on obtient, dans les formules (26), (31) et (32), les multiplicateurs des puissances, $0, 1, \ldots, \alpha-1, \alpha$ de $x-x_0$, et qui proviennent d'ensembles dépendant des seules différences $y-y_0, \ldots$, ont été pratiquées sur une fonction schématique dépendant d'un seul et même groupe de variables, qui est le groupe $y, \ldots$; car cette nouvelle hypothèse laisse identiques à eux-mêmes, dans les résidus correspondants, tant les facteurs monomes, que les termes élémentaires dépendant des seules variables $y, \ldots$; elle laissera donc aussi identiques à eux-mêmes, dans les expressions (26), (31) et (32), tant les facteurs monomes, que les termes élémentaires (seuls utiles à considérer) qui satisfont à la double condition

d'être, par rapport à $x - x_0$, d'un degré au plus égal à α, et de ne dépendre que de $x, y, \ldots$.

Cela étant, si l'on compare une somme quelconque de la suite

$$T_0, \quad T_1, \quad \ldots, \quad T_{\alpha-1}, \quad T$$

à la somme de même rang de l'une ou l'autre des deux suites

$$S_0, \quad S_1, \quad \ldots, \quad S_{\alpha-1}, \quad S,$$
$$S_0, \quad S_1, \quad \ldots, \quad S_{\alpha-1}, \quad S_\alpha,$$

il résulte de ce qui est admis que ceux d'entre les facteurs monomes de la première qui sont semblables à des termes élémentaires de la seconde sont également des facteurs monomes de la seconde; dès lors, ceux d'entre les facteurs monomes de (26) qui sont semblables à des termes élémentaires de la somme schématique (31) ou (32) sont également des facteurs monomes de cette dernière, ce que nous voulions établir.

D. Le simple rapprochement de *A*, *B* et *C* prouve l'exactitude générale du point formulé au début du présent alinéa I.

II. *La proposition formulée par notre énoncé général est exacte, si l'ensemble* E *ne dépend que d'une seule différence.*

Car en supposant, pour fixer les idées, que $x - x_0$ soit la différence dont il s'agit, l'ensemble E, rendu irréductible, se compose d'un monome unique tel que $(x - x_0)^\alpha$, où α est > 0, et notre méthode nous donne, pour le résidu correspondant, l'expression

$$F_0 + (x - x_0) F_1 + \ldots + (x - x_0)^{\alpha-1} F_{\alpha-1},$$

où $F_0, F_1, \ldots, F_{\alpha-1}$ désignent des fonctions schématiques dont chacune dépend des diverses variables autres que x.

III. *Si la proposition formulée par notre énoncé général est exacte dans le cas où l'ensemble* E *dépend des k dernières différences, elle l'est encore dans le cas où il dépend des $k+1$ dernières.*

Soient $x, y, \ldots$ les $k+1$ dernières variables.

Si l'ensemble E, rendu irréductible, ne dépend pas de $x - x_0$, le point à établir résulte immédiatement de ce qui est admis.

Supposons maintenant que l'ensemble E, rendu irréductible, dépende de $x - x_0$. Les mêmes notations étant adoptées qu'à l'alinéa III du n° 81, le résidu de la coupure peut s'écrire sous la forme

$$(33) \qquad T_0 + (x - x_0)T_1 + \ldots + (x - x_0)^{\alpha-1}T_{\alpha-1} + (x - x_0)^{\alpha}T:$$

dans cette formule, α désigne un entier > 0, et

$$T_0, \quad T_1, \quad \ldots, \quad T_{\alpha-1}$$

sont les résidus des coupures

$$(34) \qquad [e^0], \quad [e^0, e^1], \quad \ldots, \quad [e^0, e^1, \ldots, e^{\alpha-1}],$$

pratiquées sur une fonction schématique des diverses variables autres que x; quant à T, deux cas sont à distinguer suivant que E^{α} contient ou non le monome $(x - x_0)^{\alpha}$: dans le premier cas, T est identiquement nul, et, dans le second, il est le résidu de la coupure

$$(35) \qquad [e^0, e^1, \ldots, e^{\alpha-1}, e^{\alpha}],$$

pratiquée sur une fonction schématique de toutes les variables, y compris x. Cela étant, puisque les ensembles (34) et (35) sont indépendants de $x - x_0$, il résulte de ce qui est admis que les résidus correspondants,

$$(36) \qquad T_0, \quad T_1, \quad \ldots, \quad T_{\alpha-1}, \quad T,$$

possèdent la propriété spécifiée par notre énoncé général. Supposant en outre, comme il a été dit plus haut, l'ensemble E irréductible, nous établirons que l'expression fournie par la formule (33) pour le résidu de la coupure E la possède également. Dans cette démonstration, il nous sera évidemment permis de faire *abstraction totale des diverses variables antérieures à x* : car cela ne changera rien, ni aux ensembles d'où proviennent les coupures, ni aux facteurs monomes des expressions (36) et (33), ni aux multiplications à effectuer sur ces facteurs conformément à notre énoncé, ni enfin aux termes élémentaires (seuls utiles à considérer) qui, dans les résidus, ne dépendent que de $x, y, \ldots$. En conséquence, nous écrirons l'expression (33) sous la forme

$$(37) \qquad \begin{aligned} &T_0(y, \ldots) + (x - x_0)T_1(y, \ldots) + \ldots \\ &+ (x - x_0)^{\alpha-1}T_{\alpha-1}(y, \ldots) + (x - x_0)^{\alpha}T(x, y, \ldots). \end{aligned}$$

Observons, avant d'aller plus loin, que la propriété spécifiée par notre énoncé général peut se décomposer comme il suit :

A. Si, en multipliant un facteur monome de la somme schématique par une des différences étrangères au facteur schématique (dégénéré ou non) qui lui correspond, on obtient un produit semblable à quelque terme élémentaire du résidu, le produit en question est identique à quelque autre facteur monome de cette même somme schématique.

B. Inversement, *tout facteur monome de la somme schématique (sauf celui de degré zéro) s'obtient en multipliant quelque autre facteur monome de cette même somme par quelqu'une des différences étrangères au facteur schématique (dégénéré ou non) qui correspond à ce dernier.*

C. Si l'ensemble donné E *a été rendu irréductible, chacun de ses monomes s'obtient en multipliant quelque facteur monome de la somme schématique par quelqu'une des différences étrangères au facteur schématique (dégénéré ou non) qui correspond à ce dernier.*

Cela étant, nous allons, dans notre démonstration, nous occuper successivement de ces trois propriétés.

A. 1° Considérons, dans la somme schématique (37), qui exprime le résidu de la coupure E, un facteur monome figurant dans la portion

$$(x-x_0)^{\alpha'}\,\mathrm{T}_{\alpha'}(y, \ldots), \tag{38}$$

où α' est supposé $< \alpha$, et soient

$$(x-x_0)^{\alpha'}(y-y_0)^{\beta}\ldots \tag{39}$$

le facteur monome dont il s'agit, t le terme schématique du résidu (37) où il figure : ce terme t est le produit de $(x-x_0)^{\alpha'}$ par quelque terme schématique, τ, du résidu $\mathrm{T}_{\alpha'}(y, \ldots)$, et le terme τ est, à son tour, le produit de

$$(y-y_0)^{\beta}\ldots \tag{40}$$

par quelque facteur schématique indépendant de x.

Cela étant, si, en multipliant le facteur monome (39) par $x-x_0$,

le produit obtenu,

$$(41) \qquad (x - x_0)^{\alpha'+1}(y - y_0)^{\beta}\ldots,$$

est semblable à quelque terme élémentaire du résidu (37), ce terme élémentaire ne peut provenir que de la portion $(x - x_0)^{\alpha'+1}\mathrm{T}_{\alpha'+1}$ du résidu (37); il existe donc quelque terme élémentaire semblable à (40) dans le multiplicateur $\mathrm{T}_{\alpha'+1}$, ou plutôt, puisque (40) est indépendant de $x - x_0$, dans l'expression déduite de ce multiplicateur quand on y fait abstraction de la variable x dont il peut éventuellement dépendre [au cas où $\alpha' + 1 = \alpha$, et où, par suite, $\mathrm{T}_{\alpha'+1}$ est identique à $\mathrm{T}(x, y, \ldots)$]; et, comme $\mathrm{T}_{\alpha'}$, d'une part, l'expression considérée, d'autre part, sont respectivement obtenus à l'aide des coupures

$$[e^0, e^1, \ldots, e^{\alpha'}], \quad [e^0, e^1, \ldots, e^{\alpha'}, e^{\alpha'+1}],$$

pratiquées dans une fonction schématique des seules variables $y, \ldots$, il résulte de I que (40) figure, à titre de facteur monome, dans $\mathrm{T}_{\alpha'+1}$; donc, enfin, le produit (41) figure, à titre de facteur monome, dans la portion $(x - x_0)^{\alpha'+1}\mathrm{T}_{\alpha'+1}$ du résidu (37).

Si, en multipliant le facteur monome (39) par une des différences, autres que $x - x_0$, étrangères au facteur schématique qui figure dans t (et τ), on obtient un produit semblable à quelque terme élémentaire du résidu (37), ce terme élémentaire est fourni par la portion (38); il en résulte qu'en multipliant le facteur monome (40), qui figure dans le terme schématique τ du résidu $\mathrm{T}_{\alpha'}$, par la différence dont il s'agit (étrangère, comme nous venons de le dire, au facteur schématique qui figure dans τ), on obtient un produit semblable à quelque terme élémentaire de $\mathrm{T}_{\alpha'}$: en vertu de ce qui est admis, ce produit figure, à titre de facteur monome, dans le résidu $\mathrm{T}_{\alpha'}$, et, dès lors, le produit de (39) par la même différence figure, à titre de facteur monome, dans la portion (38) du résidu (37).

2° Considérons maintenant un facteur monome provenant de la portion

$$(x - x_0)^{\alpha}\mathrm{T}(x, y, \ldots)$$

du résidu (37) : si un pareil facteur monome existe, c'est évidemment que l'expression schématique $\mathrm{T}(x, y, \ldots)$ n'est pas identiquement nulle, et, dès lors, elle s'obtient à l'aide de la coupure

$$[e^0, e^1, \ldots, e^{\alpha}],$$

pratiquée dans une fonction schématique des variables x, y, ...; au facteur monome considéré correspond donc un facteur schématique dépendant de x, d'où résulte que ce facteur monome ne doit pas être multiplié par $x - x_0$. Cela étant, il suffira, pour établir le point que nous avons actuellement en vue, de répéter, avec les modifications voulues, la dernière partie du raisonnement fait dans 1°.

La propriété A se trouve ainsi étendue au cas où l'ensemble donné E dépend des $k+1$ dernières différences.

B. De la deuxième propriété, B, admise pour les résidus

$$T_0(y, \ldots),\quad T_1(y, \ldots),\quad \ldots,\quad T_{\alpha-1}(y, \ldots),\quad T(x, y, \ldots),$$

il résulte tout d'abord que si, dans chacun de ces résidus, on partage les facteurs monomes en groupes successifs d'après leurs degrés croissants, ces degrés forment une progression arithmétique de raison 1 commençant par zéro. Les diverses expressions

$$T_0(y, \ldots),\quad T_1(y, \ldots),\quad \ldots,\quad T_{\alpha-1}(y, \ldots),$$

et éventuellement l'expression $T(x, y, \ldots)$, fournissent ainsi, par la considération des degrés de leurs facteurs monomes, les progressions arithmétiques respectives

$$\begin{array}{l} 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m_0, \\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m_{\alpha-1}, \\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m_\alpha, \end{array}$$

et les produits respectifs de ces mêmes expressions par les monomes

$$1,\quad x - x_0,\quad \ldots,\quad (x - x_0)^{\alpha-1},\quad (x - x_0)^\alpha$$

fourniront semblablement les progressions arithmétiques

$$\begin{array}{c} 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m_0, \\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m_1 + 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha - 1,\ \alpha,\ \alpha + 1,\ \ldots,\ m_{\alpha-1} + \alpha - 1, \\ \alpha,\ \alpha + 1,\ \alpha + 2,\ \ldots,\ m_\alpha + \alpha. \end{array}$$

Si donc on désigne par M le plus grand des entiers

$$m_0,\quad m_1 + 1,\quad \ldots,\quad m_{\alpha-1} + \alpha - 1,\quad m_\alpha + \alpha,$$

l'expression (37) fournira la progression arithmétique

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad M.$$

Cela étant, construisons un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux diverses expressions schématiques

$$\begin{array}{r} T_0(y, \ldots), \\ (x - x_0) T_1(y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (x - x_0)^{\alpha-1} T_{\alpha-1}(y, \ldots), \\ (x - x_0)^{\alpha} \quad T(x, y, \ldots), \end{array}$$

et les colonnes aux degrés croissants $0, 1, 2, \ldots, M$ des facteurs monomes que nous allons y inscrire : ce Tableau comprendra ainsi $\alpha + 1$ lignes affectées des indices $0, 1, 2, \ldots, \alpha$, et $M + 1$ colonnes affectées des indices $0, 1, 2, \ldots, M$, en sorte que chaque ligne horizontale comprendra $M + 1$ cases. Dans les cases

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad m_0$$

de la première ligne horizontale, inscrivons les facteurs monomes de l'expression $T_0(y, \ldots)$, chacun à la case voulue suivant le degré qu'il présente (et une même case pouvant, bien entendu, contenir plusieurs monomes). Dans les cases

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad m_1 + 1$$

de la deuxième ligne horizontale, inscrivons de même les facteurs monomes de l'expression $(x - x_0) T_1(y, \ldots)$; dans les cases

$$2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots, \quad m_2 + 2$$

de la troisième, les facteurs monomes de l'expression $(x - x_0)^2 T_2(y, \ldots)$; et ainsi de suite. Il pourra arriver que la dernière ligne horizontale se compose entièrement de cases vides [au cas où l'ensemble partiel E^{α} se composerait du monome unique $(x - x_0)^{\alpha}$] ; mais chacune des lignes précédentes contiendra certainement quelque case non vide.

Cela étant, considérons un facteur monome situé dans une colonne dont l'indice i soit supérieur à zéro, et désignons par h l'indice de la ligne où il se trouve.

Si ce monome est situé dans la première case non vide de sa ligne, ce qui entraîne $h = i$, il n'est autre que $(x - x_0)^h$ (où $h > 0$) ; d'ail-

leurs le monome situé dans la première case non vide de la ligne précédente est $(x-x_0)^{h-1}$, et le facteur schématique qui lui correspond ne dépend certainement pas de la variable x, parce que $h-1$ est au plus égal à $\alpha-1$. On voit donc que le monome $(x-x_0)^h$ peut s'obtenir en multipliant l'un des monomes de la colonne précédente par l'une des différences étrangères au facteur schématique qui correspond à ce dernier monome.

Si le monome considéré ne se trouve pas dans la première case non vide de sa ligne, supprimons le facteur $(x-x_0)^h$, commun à tous les monomes de cette ligne; après cette suppression, les groupes inscrits dans les cases successives ne sont autres que les groupes de facteurs monomes fournis par la considération de quelqu'un des résidus

$$T_0(y, \ldots), \quad T_1(y, \ldots), \quad \ldots, \quad T_{\alpha-1}(y, \ldots), \quad T(x, y, \ldots),$$

et, si on les partage en groupes successifs d'après leurs degrés croissants, tout monome contenu dans un groupe autre que le premier est, en vertu de ce que nous admettons, le produit d'un monome du groupe précédent par l'une des différences étrangères au facteur schématique qui correspond à ce dernier monome : la même propriété subsistera donc après le rétablissement du facteur commun $(x-x_0)^h$.

La deuxième propriété, B, se trouve ainsi étendue au cas où l'ensemble donné dépend des $k+1$ dernières différences.

C. En ce qui concerne la troisième propriété, C, nous observerons tout d'abord que, si l'ensemble partiel E^α contient le monome $(x-x_0)^\alpha$, ce monome, nécessairement unique dans E^α, s'obtient en multipliant le facteur monome $(x-x_0)^{\alpha-1}$, qui figure dans l'un des termes schématiques de la portion de résidu

$$(x-x_0)^{\alpha-1}T_{\alpha-1}(y, \ldots),$$

par la différence $x-x_0$, nécessairement étrangère au facteur schématique correspondant. Il nous reste donc à nous occuper : 1° des monomes contenus dans les ensembles partiels $E^0, E^1, \ldots, E^{\alpha-1}$; 2° des monomes contenus dans l'ensemble partiel E^α, au cas éventuel où ce dernier ne contiendrait pas le monome $(x-x_0)^\alpha$.

Observons à cet effet qu'en supposant

$$h=0, \quad 1, \quad \ldots, \quad \alpha-1, \quad \text{et éventuellement } \alpha,$$

un monome de l'ensemble e^h n'est certainement divisible par aucun autre monome de e^h, et qu'il ne l'est non plus par aucun monome provenant des ensembles $e^0, e^1, \ldots, e^{h-1}$: car autrement, ou bien l'ensemble E^h contiendrait deux monomes divisibles l'un par l'autre, ou bien il en contiendrait un divisible par quelqu'un des monomes provenant des ensembles $E^0, E^1, \ldots, E^{h-1}$, et, dès lors, l'ensemble E, contrairement à ce que nous avons supposé, ne serait pas irréductible. Si donc on considère les ensembles

$$[e^0], \quad [e^0, e^1], \quad \ldots, \quad [e^0, e^1, \ldots, e^{\alpha-1}],$$

et éventuellement

$$[e^0, e^1, \ldots, e^{\alpha-1}, e^\alpha],$$

et qu'on rende chacun d'eux irréductible, le premier, $[e^0]$, restera tel qu'il est, le second, $[e^0, e^1]$, contiendra certainement tous les monomes de e^1, le troisième, $[e^0, e^1, e^2]$, tous les monomes de e^2, et ainsi de suite.

Or, si l'on considère, d'une part, l'ensemble $[e^0, e^1, \ldots, e^h]$ rendu irréductible, d'autre part, le résidu de la coupure pratiquée à l'aide de cet ensemble (soit sur une fonction schématique de $y, \ldots$ si h est $< \alpha$, soit sur une fonction schématique de $x, y, \ldots$ si $h = \alpha$), il résulte de ce qui est admis que chaque monome de l'ensemble s'obtient en multipliant quelqu'un des facteurs monomes du résidu par quelqu'une des différences étrangères au facteur schématique correspondant : en vertu de la remarque qui précède, chaque monome de e^h jouit donc forcément de cette propriété. Cela étant, si l'on multiplie par $(x - x_0)^h$, d'une part le résidu de la coupure $[e^0, e^1, \ldots, e^h]$, ce qui redonne une portion du résidu de la coupure E, d'autre part les divers monomes de e^h, ce qui redonne l'ensemble partiel E^h, il est clair que chaque monome de E^h s'obtient en multipliant quelqu'un des facteurs monomes du résidu de la coupure E par quelqu'une des différences étrangères au facteur schématique correspondant.

La troisième propriété, *C*, se trouve ainsi étendue au cas où l'ensemble donné dépend des $k + 1$ dernières différences.

IV. Le simple rapprochement des alinéas II et III suffit à établir l'exactitude de notre énoncé général.

86. Ainsi, lorsqu'on a à effectuer une coupure E, l'opération peut

toujours être conduite de telle sorte que la somme schématique obtenue pour le résidu remplisse à la fois les diverses conditions suivantes :

Si l'on partage les facteurs monomes en groupes successifs d'après leurs degrés croissants, ces degrés forment une progression arithmétique de raison 1 *commençant par zéro.*

Si, considérant l'un quelconque des groupes ainsi formés, on multiplie l'un des facteurs monomes qui y figurent successivement par chacune des différences étrangères au facteur schématique correspondant, et qu'on répète cette opération pour tous les facteurs monomes du groupe, on ne reproduit (*aux coefficients schématiques près*) *d'autres termes élémentaires du résidu que les facteurs monomes du groupe suivant, et on les reproduit tous.* (En particulier, les multiplications opérées sur le dernier groupe ne reproduisent aucun terme élémentaire du résidu.)

Enfin, si, dans l'ensemble des produits que fournissent les multiplications effectuées sur les divers groupes, on considère ceux qui ne sont semblables à aucun terme élémentaire du résidu, on y retrouve, entre autres monomes, ceux dont se compose l'ensemble E *quand on l'a rendu irréductible.*

Dans le cas où le résidu de la coupure ne contient qu'un nombre limité de termes élémentaires, il est clair que toute somme schématique irréductible exprimant ce résidu ne contient que des termes schématiques dégénérés, qui sont ces termes élémentaires eux-mêmes, et que, par suite, une pareille somme est unique : elle possède donc nécessairement les propriétés ci-dessus spécifiées. On observera seulement que, chacun des facteurs schématiques étant alors dégénéré toutes les différences obtenues en retranchant de chaque variable sa valeur initiale lui sont nécessairement étrangères.

87. Supposons actuellement que le résidu d'une coupure E, pratiquée sur une fonction schématique des variables x, y, ..., contienne *un nombre illimité de termes élémentaires*. Supposons en outre que ce résidu ait été mis sous la forme d'*une somme schématique irréductible satisfaisant à la condition suivante :*

Si l'on considère les divers produits obtenus en multipliant l'un quelconque des facteurs monomes de la somme schématique

par l'une quelconque des différences étrangères au facteur schématique (dégénéré ou non) qui lui correspond, on y retrouve, entre autres résultats, d'une part les divers facteurs monomes qui, dans la somme schématique, ont un degré supérieur à zéro, d'autre part les divers monomes dont se compose l'ensemble E *quand on l'a rendu irréductible.* (C'est ce qui arrive, notamment, quand la somme schématique possède la propriété que nous avons spécifiée au nº 85 ou 86, et dont la précédente n'est qu'une partie.)

Cela étant, si l'on désigne par N *le degré maximum des facteurs monomes de cette somme, et par* P *un entier supérieur ou égal à* N, *arbitraire d'ailleurs, l'application d'un procédé tout élémentaire fournit pour le résidu une nouvelle somme schématique irréductible remplissant les deux conditions formulées ci-après :*

1º *Le degré maximum des facteurs monomes y est exactement égal à* P; *à l'un au moins des facteurs monomes de degré* P *correspond un facteur schématique non dégénéré, et à tous ceux de degré inférieur à* P *des facteurs schématiques dégénérés.*

2º *La nouvelle somme schématique possède la propriété dont jouit, par hypothèse, la proposée.*

I. *En désignant par* K *un entier positif donné, toute fonction schématique des variables* x, y, ... *peut être mise sous la forme d'une somme schématique irréductible, dont les termes schématiques s'obtiennent :*

Les uns en multipliant respectivement par des constantes schématiques les divers monomes (à coefficient 1) *de degrés* 0, 1, 2, ..., $K-1$ *par rapport à l'ensemble des différences* $x-x_0$, $y-y_0$, ...;

Les autres en multipliant respectivement les divers monomes de degré K *(à coefficient* 1) *par diverses fonctions schématiques (non dégénérées) de quelques-unes des variables.*

A. La propriété est exacte si le nombre des variables est égal à 1.

Car, en désignant par x la variable unique, par A_0, A_1, ..., A_{K-1} des constantes schématiques, et par $H(x)$ une fonction schématique de x, la proposée peut s'écrire sous la forme

$$A_0 + A_1(x-x_0) + \ldots + A_{K-1}(x-x_0)^{K-1} + (x-x_0)^K H(x).$$

B. Si la propriété est vraie pour n variables, elle l'est aussi pour $n+1$.

Désignons par $x, y, \ldots$ les $n+1$ variables dont il s'agit, et distinguons dans le développement diverses portions comprenant : la première, les termes de degré zéro en $x - x_0$; la seconde, les termes de degré 1 en $x - x_0$; etc. ; l'avant-dernière, les termes de degré $K - 1$ en $x - x_0$; la dernière, les termes de degré *au moins* égal à K en $x - x_0$. Nous aurons ainsi l'expression

$$(42)\quad \begin{aligned} &F_0(y, \ldots) + (x - x_0)F_1(y, \ldots) + \ldots \\ &\quad + (x - x_0)^{K-1}F_{K-1}(y, \ldots) + (x - x_0)^K F(x, y, \ldots), \end{aligned}$$

où $F_0, F_1, \ldots, F_{K-1}$ désignent des fonctions schématiques de $y, \ldots$, et F une fonction schématique de $x, y, \ldots$.

Or, en vertu de ce qui est admis :

La fonction schématique $F_0(y, \ldots)$ peut s'obtenir en multipliant les divers monomes de degré K en $y - y_0, \ldots$ par diverses fonctions schématiques de quelques-unes des n variables $y, \ldots$, et ajoutant à cette somme de produits un polynome entier de degré $K - 1$ en $y - y_0, \ldots$, à coefficients indéterminés ;

La fonction schématique $F_1(y, \ldots)$ peut s'obtenir de même en multipliant les divers monomes de degré $K - 1$ en $y - y_0, \ldots$ par diverses fonctions schématiques de quelques-unes des n variables $y, \ldots$, et ajoutant à cette somme de produits un polynome entier de degré $K - 2$ en $y - y_0, \ldots$, à coefficients indéterminés ;

Etc. ;

Enfin, la fonction schématique $F_{K-1}(y, \ldots)$ peut s'obtenir en multipliant les divers monomes du premier degré $y - y_0, \ldots$ par diverses fonctions schématiques de quelques-unes des n variables $y, \ldots$, et ajoutant à cette somme de produits une constante schématique.

Un simple coup d'œil jeté sur la formule (42) suffit alors à faire voir que la propriété, supposée vraie pour n variables, ne peut manquer de l'être pour $n+1$.

C. Le simple rapprochement de *A* et *B* suffit à établir le point que nous avons actuellement en vue.

Nous l'énoncerons d'une manière un peu plus brève en disant que *toute fonction schématique de* $x, y, \ldots$ *peut être considérée comme*

une sorte de polynome (complet) de degré K, *entier par rapport aux différences* $x - x_0$, $y - y_0$, ..., *et où les termes de degré inférieur à* K *ont pour coefficients des constantes schématiques, tandis que les termes de degré* K *ont pour coefficients des fonctions schématiques non dégénérées.*

Il est clair, d'ailleurs, que si, dans la somme schématique irréductible ainsi obtenue, on partage en groupes successifs, d'après leurs degrés croissants, les divers facteurs monomes, le premier groupe est constitué par le monome unique de degré zéro, et que chacun des autres monomes s'obtient en multipliant quelqu'un des monomes du groupe précédent par quelqu'une des différences $x - x_0$, $y - y_0$, ...

II. Revenant à notre énoncé général, observons que la propriété dont jouit, par hypothèse, la forme schématique primitive, et qui, d'après la conclusion 2°, doit appartenir aussi à la nouvelle, peut se décomposer en deux, et que, dès lors, l'ensemble des conclusions 1° et 2° peut se formuler en trois parties successives, comme il suit :

A. Dans la nouvelle forme schématique du résidu, le degré maximum des facteurs monomes est exactement égal à P; *à l'un au moins des facteurs monomes de degré* P *correspond un facteur schématique non dégénéré, et à tous ceux de degré inférieur à* P *des facteurs schématiques dégénérés.*

B. Tout facteur monome de la nouvelle somme (sauf celui de degré zéro) s'obtient en multipliant quelque autre facteur monome (de degré nécessairement inférieur à P) *de cette même somme par quelqu'une des différences* $x - x_0$, $y - y_0$, ...

C. Dans l'ensemble E, *rendu irréductible, chaque monome s'obtient en multipliant quelque facteur monome de la nouvelle somme par quelqu'une des différences* $x - x_0$, $y - y_0$, ..., *et cela de telle façon que, si à ce facteur monome correspond un facteur schématique non dégénéré, la différence par laquelle on doit le multiplier pour reproduire le monome considéré de l'ensemble* E *soit étrangère au facteur schématique dont il s'agit.*

Pour l'établir, désignons par Φ la forme schématique primitive du résidu spécifiée dans notre hypothèse, et, considérant un terme schématique quelconque de Φ, désignons par *n* le degré du facteur

monome qui y figure

$$(n \leqq \mathrm{N} \leqq \mathrm{P}),$$

et par K_n la différence (positive ou nulle) $\mathrm{P} - n$. Si le terme considéré ne contient qu'une fonction schématique dégénérée, nous le laisserons tel qu'il est; dans le cas contraire, nous remplacerons, conformément à l'alinéa I, la fonction schématique (non dégénérée) par un polynome de degré K_n, entier par rapport aux différences dont elle dépend, et où les termes de degré intérieur à K_n aient pour coefficients des constantes arbitraires, tandis que les termes de degré K_n auront pour coefficients des fonctions schématiques non dégénérées. En opérant ainsi sur tous les termes schématiques de Φ, il est facile de voir que les conditions A, B, C, formulées au début du présent alinéa II, se trouveront satisfaites dans la nouvelle forme. Effectivement :

1° Puisque le résidu de la coupure contient, d'après notre hypothèse, un nombre illimité de termes élémentaires, à l'un au moins des facteurs monomes de la forme primitive Φ correspond un facteur schématique non dégénéré, et la condition A se trouve dès lors évidemment satisfaite dans la nouvelle.

2° Tout facteur monome figurant dans la forme primitive Φ se trouve remplacé, dans la nouvelle, par un groupe de facteurs monomes : pour obtenir le groupe en question (abstraction faite des facteurs schématiques qui correspondent respectivement à ses divers monomes), il suffit de multiplier par le facteur monome primitif les divers termes d'un certain polynome, entier par rapport à quelques-unes des différences $x - x_0$, $y - y_0$, ..., et ayant, avec un degré positif ou nul, tous ses coefficients égaux à 1. Cela étant, si nous considérons, dans la nouvelle forme du résidu, l'ensemble des facteurs monomes qui figuraient primitivement dans Φ, il résulte de notre hypothèse que chacun d'entre eux (sauf celui de degré zéro) peut s'obtenir en multipliant quelqu'un des autres par quelqu'une des différences

$$x - x_0,\quad y - y_0,\quad \ldots.$$

Si nous considérons d'autre part le groupe par lequel se trouve actuellement remplacé l'un quelconque des facteurs monomes primitifs (groupe en tête duquel figure le facteur monome primitif dont il s'agit), il résulte de la manière même dont on a obtenu le groupe

en question que l'un quelconque de ses monomes (sauf le facteur monome primitif) s'obtient en multipliant quelqu'un des autres par quelqu'une des différences

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad \ldots .$$

On voit donc bien que, dans la nouvelle forme, tout facteur monome (sauf celui de degré zéro) s'obtient, comme l'indique l'énoncé de la condition B, en multipliant quelque autre facteur monome par quelqu'une des différences

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad \ldots .$$

3° Il résulte de notre hypothèse que, dans l'ensemble E, rendu irréductible, tout monome s'obtient en multipliant quelque facteur monome de Φ par quelqu'une des différences

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad \ldots .$$

Or, ce facteur monome figure aussi dans la nouvelle forme du résidu. D'ailleurs, pour que le facteur schématique qui lui correspond dans la nouvelle forme ne soit pas dégénéré, il est nécessaire que le facteur monome soit de degré P, et, par suite, que la différence ci-dessus désignée par K_n se réduise pour lui à zéro : le terme schématique de Φ où il figure est donc resté tel qu'il est dans le passage à la nouvelle forme, et, dès lors, en vertu de notre hypothèse, la différence par laquelle on doit le multiplier pour reproduire le monome considéré de E est étrangère au facteur schématique dont il s'agit. La condition C se trouve donc, elle aussi, satisfaite.

88. Puisque l'hypothèse faite au numéro précédent sur la forme primitive Φ du résidu fait partie (comme nous l'avons indiqué au début du numéro cité) de l'ensemble des propriétés énumérées au n° 86, l'existence de ces dernières entraînera, à plus forte raison, les mêmes conséquences, et nous pouvons, dès lors, énoncer ce qui suit.

Lorsque le résidu d'une coupure E contient un nombre *illimité* de termes élémentaires, et qu'on l'a mis sous forme d'une somme schématique irréductible remplissant les diverses conditions énumérées au n° 86, on peut, à l'aide d'un procédé tout élémentaire, en déduire,

pour l'expression du même résidu, une deuxième somme schématique irréductible remplissant les diverses conditions ci-après :

Si l'on désigne par N *le degré maximum des facteurs monomes de la première somme, par* P *un entier supérieur ou égal à* N, *arbitraire d'ailleurs, et que l'on partage les facteurs monomes de la nouvelle somme en groupes successifs d'après leurs degrés croissants, ces degrés forment une progression arithmétique de raison* 1, *commençant par zéro et finissant par* P. *A l'un au moins des facteurs monomes de degré* P *correspond un facteur schématique non dégénéré, et à tous ceux de degré inférieur à* P *des facteurs schématiques dégénérés.*

Si, considérant, dans la nouvelle somme, l'un quelconque des groupes de degré inférieur à P, *on multiplie l'un des facteurs monomes qui y figurent successivement par chacune des différences* $x - x_0$, $y - y_0$, …, *et que l'on répète cette opération sur tous les facteurs monomes du groupe, on obtient, entre autres produits, tous les facteurs monomes du groupe suivant.*

Enfin, si, dans la nouvelle somme, on effectue sur les divers groupes de degré inférieur à P *les multiplications dont il s'agit, si, de plus, on multiplie chaque facteur monome de degré* P *par chacune des différences étrangères au facteur schématique correspondant, on obtient, entre autres produits, tous les monomes dont se compose l'ensemble* E *quand on l'a rendu irréductible.*

Par exemple, si, dans une fonction schématique de x, y, z, il s'agit de pratiquer la coupure

$$(x-x_0)^2(z-z_0)^2, \quad (x-x_0)^2(y-y_0), \quad (y-y_0)(z-z_0), \quad (y-y_0)^2,$$

on commencera, comme à l'alinéa VI du n° 84, par mettre le résidu sous la forme

$$(43) \quad F_0(z)+(x-x_0)F_1(z)+(x-x_0)^2H_0(x) \\ +(x-x_0)^2(z-z_0)H_1(x)+A_0(y-y_0)+A_1(x-x_0)(y-y_0),$$

où A_0, A_1 désignent des constantes schématiques, et $F_0(z)$, $F_1(z)$, $H_0(x)$, $H_1(x)$ des fonctions schématiques. Dans cette expression, qui remplit les diverses conditions énumérées au n° 86, le degré maximum des facteurs monomes est égal à 3, et, cela étant, l'entier P dont il est question ci-dessus pourra être arbitrairement choisi sous la

seule condition d'être au moins égal à 3. En supposant, pour fixer les idées, $P = 4$, on remplacera les fonctions schématiques $F_0(z)$, $F_1(z)$, $H_0(x)$, $H_1(x)$ respectivement par les sommes schématiques suivantes :

$$\begin{aligned}
F_0(z) &= B_0 + B_1(z-z_0) + B_2(z-z_0)^2 + B_3(z-z_0)^3 + (z-z_0)^4 K_0(z),\\
F_1(z) &= C_0 + C_1(z-z_0) + C_2(z-z_0)^2 + (z-z_0)^3 K_1(z),\\
H_0(x) &= D_0 + D_1(x-x_0) + (x-x_0)^2 L_0(x),\\
H_1(x) &= G + (x-x_0) L_1(x),
\end{aligned}$$

où B_0, B_1, B_2, B_3, C_0, C_1, C_2, D_0, D_1, G désignent des constantes schématiques, et $K_0(z)$, $K_1(z)$, $L_0(x)$, $L_1(x)$ des fonctions schématiques. On aura ainsi, au lieu de l'expression (43), l'expression

$$\begin{aligned}
&B_0 + B_1(z-z_0) + B_2(z-z_0)^2 + B_3(z-z_0)^3 + (z-z_0)^4 K_0(z)\\
&\quad + C_0(x-x_0) + C_1(x-x_0)(z-z_0) + C_2(x-x_0)(z-z_0)^2\\
&\quad + (x-x_0)(z-z_0)^3 K_1(z) + D_0(x-x_0)^2 + D_1(x-x_0)^3\\
&\quad + (x-x_0)^4 L_0(x) + G(x-x_0)^2(z-z_0)\\
&\quad + (x-x_0)^3(z-z_0) L_1(x) + A_0(y-y_0) + A_1(x-x_0)(y-y_0),
\end{aligned}$$

qui remplit les diverses conditions énumérées au début du présent numéro.

Si, dans une fonction schématique de x, y, z, il s'agit de pratiquer la coupure

$$(x-x_0)(y-y_0)(z-z_0),$$

on commencera, comme à l'alinéa II du n° 84, par mettre le résidu sous la forme

$$F(y,z) + (x-x_0) H(x,z) + (x-x_0)(y-y_0) K(x,y), \tag{44}$$

où $F(y,z)$, $H(x,z)$, $K(x,y)$ désignent trois fonctions schématiques. Dans cette expression, qui remplit les diverses conditions énumérées au n° 86, le degré maximum des facteurs monomes est égal à 2, et, cela étant, l'entier P pourra être arbitrairement choisi sous la seule condition d'être au moins égal à 2. En supposant, par exemple, $P = 2$, on remplacera les fonctions schématiques $F(y,z)$, $H(x,z)$ respectivement par les sommes schématiques suivantes :

$$\begin{aligned}
F(y,z) &= A + B(z-z_0) + (z-z_0)^2 L(z)\\
&\quad + C(y-y_0) + (y-y_0)(z-z_0) M(z)\\
&\quad + (y-y_0)^2 Q(y,z),\\
H(x,z) &= D + (z-z_0) R(z) + (x-x_0) S(x,z),
\end{aligned}$$

où A, B, C, D désignent des constantes schématiques, et $L(z)$, $M(z)$, $Q(y, z)$, $R(z)$, $S(x, z)$ des fonctions schématiques; quant à la fonction $K(x, y)$, qui se trouve multipliée, dans l'expression (44), par un facteur monome de degré 2, on la laissera telle qu'elle est. On obtiendra ainsi, au lieu de (44), l'expression

$$\begin{aligned} &A + B(z - z_0) + (z - z_0)^2 L(z) + C(y - y_0) \\ &\quad + (y - y_0)(z - z_0) M(z) + (y - y_0)^2 Q(y, z) \\ &\quad + D(x - x_0) + (x - x_0)(z - z_0) R(z) + (x - x_0)^2 S(x, z) \\ &\quad + (x - x_0)(y - y_0) K(x, y), \end{aligned}$$

qui remplit les diverses conditions énumérées au début du présent numéro.

CHAPITRE VI.

CALCUL INVERSE DE LA DÉRIVATION.

Économie des conditions initiales dans les systèmes différentiels résolus par rapport à diverses dérivées des inconnues.

89. On nomme *système différentiel* tout système d'équations posées entre certaines variables indépendantes, x, y, ..., certaines fonctions inconnues, u, v, ..., de ces variables, et certaines dérivées des fonctions u, v, ... : les fonctions inconnues doivent être déterminées de manière que les équations du système soient identiquement vérifiées en x, y, ...

On nomme *groupe d'intégrales* du système tout groupe de fonctions,

$$U(x, y. \ldots), \quad V(x, y, \ldots), \quad \ldots,$$

qui, substituées à u, v, ..., transforment en identités les diverses équations proposées : nos définitions des n[os] 50 et 52 n'attribuant de dérivées qu'aux fonctions olotropes, il est clair que les diverses fonctions du groupe doivent, dans certaines limites, jouir de cette propriété, et qu'il doit exister, dans l'espace $\big[[x, y, \ldots]\big]$, quelque point à partir duquel elles soient toutes développables (n° 76).

90. Étant donné un système différentiel, S, *résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues,* u, v, ..., qui s'y trouvent engagées, nous conviendrons de dire qu'une dérivée de ces fonctions est *principale* relativement au système, lorsqu'elle coïncide, soit avec quelqu'un des premiers membres, soit avec quelqu'une de leurs dérivées; nous conviendrons de dire, dans le cas contraire, qu'elle est *paramétrique*.

Considérant, dans un pareil système S, un groupe d'intégrales que

nous supposerons développables à partir des valeurs initiales, x_0, y_0, ..., choisies pour les variables indépendantes x, y, ..., nous nommerons *détermination initiale* de l'une d'entre elles la portion de son développement formée par l'ensemble des termes qui, aux facteurs numériques connus près (n° 54), ont pour coefficients les valeurs initiales de la fonction et de ses dérivées paramétriques de tous ordres; la portion restante, où figurent de même les valeurs initiales des dérivées principales, se nommera la *partie principale* du développement.

On peut, à l'aide des notions exposées dans le Chapitre précédent, obtenir d'une manière fort simple la forme schématique des déterminations initiales d'un groupe quelconque d'intégrales, u, v, ... : il est clair, en effet, que, si les dérivées de u qui figurent dans les premiers membres du système S ont pour ordres partiels res pectifs, relativement à x, y, ...,

$$\begin{matrix} \alpha', & \beta', & \ldots \\ \alpha'', & \beta'', & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots, \end{matrix}$$

il suffit, pour avoir la forme schématique de la détermination initiale de u, de pratiquer dans le développement schématique de cette fonction la coupure

$$\left\{ \begin{array}{l} (x-x_0)^{\alpha'}(y-y_0)^{\beta'}\ldots, \\ (x-x_0)^{\alpha''}(y-y_0)^{\beta''}\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

En conséquence (n°s 81, 82 et 83), la donnée des déterminations initiales d'un groupe d'intégrales (hypothétiques) équivaut à celle de fonctions (ou constantes) en nombre essentiellement fini, et, pour se donner arbitrairement les déterminations dont il s'agit, il suffit d'imposer aux intégrales et à telles ou telles de leurs dérivées, en nombre essentiellement limité, la condition de se réduire respectivement, pour les valeurs initiales de tels ou tels groupes de variables, à des fonctions arbitraires des groupes de variables restants (chacune de ces fonctions doit, naturellement, être supposée développable à partir des valeurs initiales des variables dont elle dépend). Ainsi se trouve fixé ce que l'on peut appeler l'*économie des conditions initiales* du système.

Si l'on considère, par exemple, un système différentiel impliquant deux fonctions inconnues, u, v, des trois variables x, y, z, et résolu par rapport aux quatre dérivées

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial y^3},$$

l'application de notre méthode donnera (n° 84, II et V), pour les déterminations initiales schématiques de u, v,

$$\begin{gathered} F(y, z) + (x - x_0)\,H(x, z) + (x - x_0)(y - y_0)K(x, y), \\ L(z) + A(y - y_0) + B(y - y_0)^2, \end{gathered}$$

où A, B désignent deux constantes schématiques, et $F(y, z)$, $H(x, z)$, $K(x, y)$, $L(z)$ quatre fonctions schématiques. On en déduit, pour l'économie des conditions initiales du système, les formules suivantes :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{lll} u = \varphi(y, z) & \text{pour} & x - x_0 = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \psi(x, z) & \text{pour} & y - y_0 = 0, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \omega(x, y) & \text{pour} & z - z_0 = 0; \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{lll} v = \mu(z) & \text{pour} & x - x_0 = y - y_0 = 0, \\ \left. \begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial y} = \alpha \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \beta \end{array} \right\} & \text{pour} & x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Pour se représenter commodément l'économie des conditions initiales, on peut procéder comme il suit : construire un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux diverses variables indépendantes $x, y, \ldots$, et les colonnes aux diverses quantités (inconnues et dérivées) qui figurent dans les premiers membres des conditions initiales; puis, dans l'une quelconque de ces colonnes, noircir à l'aide de hachures les cases des diverses variables dont ne dépend pas la fonction schématique (dégénérée ou non) qui figure dans le second membre de la condition correspondante; en répétant cette opération successivement pour toutes les colonnes, on obtient

une sorte de damier où les cases blanches et noires peuvent offrir des dispositions relatives variées. Par exemple, à des conditions initiales de la forme (1) correspondra le damier ci-dessous :

	u	$\frac{\partial u}{\partial x}$	$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$	v	$\frac{\partial v}{\partial y}$	$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$
x						
y						
z						

Cette figuration nous sera parfois utile.

Si le système se trouve résolu par rapport à diverses dérivées *premières* des inconnues, si, par exemple, il implique trois fonctions inconnues, u, v, w, des quatre variables indépendantes x, y, z, s, et qu'il se trouve résolu par rapport à

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial s}, \quad \frac{\partial w}{\partial z},$$

notre méthode nous donne (nº 84, III), pour les conditions initiales, la forme extrêmement simple

$$\begin{array}{lll} u = \varphi(s) & \text{pour} & x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0, \\ v = \psi(x, z) & \text{pour} & y - y_0 = s - s_0 = 0, \\ w = \omega(x, y, s) & \text{pour} & z - z_0 = 0. \end{array}$$

Dans le damier, construit d'après elles, où les lignes correspondent, comme nous l'avons dit, aux diverses variables indépendantes, les colonnes correspondent alors aux diverses fonctions inconnues, et, par suite, les diverses cases aux diverses dérivées premières des inconnues : à la dérivée première $\frac{\partial u}{\partial x}$, par exemple, correspond la case qui se trouve à la fois dans la colonne (u) et dans la ligne (x). Les cases *noires*, notamment, correspondent aux divers premiers membres du système, et l'on pourra, en pareil cas, remplacer avantageusement les hachures de chaque case noire par l'équation même qui lui cor-

respond ; on obtiendra ainsi le Tableau :

	u	v	w
x	$\frac{\partial u}{\partial x} = \ldots$		
y	$\frac{\partial u}{\partial y} = \ldots$	$\frac{\partial v}{\partial y} = \ldots$	
z	$\frac{\partial u}{\partial z} = \ldots$		$\frac{\partial w}{\partial z} = \ldots$
s		$\frac{\partial v}{\partial s} = \ldots$	

91. Étant donné un système différentiel résolu par rapport à diverses dérivées (d'ordres quelconques) des inconnues qui s'y trouvent engagées, on peut, en s'appuyant sur les propositions des nos 86 et 88 relatives aux coupures, donner aux conditions initiales certaines formes dont la considération nous sera fort utile dans la suite : nous nous bornerons pour le moment, en vue du présent Chapitre, à une observation très simple, qui se déduit immédiatement de la proposition du no 86.

Dans un système différentiel impliquant une seule fonction inconnue, et résolu par rapport à diverses dérivées de cette inconnue, les conditions initiales peuvent toujours être mises sous une forme telle que les circonstances suivantes s'y trouvent réalisées :

Si on les partage en groupes d'après les ordres croissants de leurs premiers membres, ces ordres forment une progression arithmétique de raison 1 *commençant par zéro.*

Si, dans l'un quelconque des groupes ainsi formés, on considère l'une des conditions initiales, et que l'on exécute sur son premier membre une différentiation première n'intéressant aucune des variables dont dépend (schématiquement) le second membre correspondant, la dérivée ainsi obtenue est nécessairement identique, soit à une dérivée principale du système, soit

au premier membre de quelqu'une des conditions initiales figurant dans le groupe suivant.

En particulier, la dérivation dont il s'agit, exécutée sur un premier membre du dernier groupe, ne peut donner comme résultat qu'une dérivée principale du système.

92. Nous poserons enfin les définitions suivantes :

Si l'on considère deux dérivées (distinctes) d'une fonction quelconque, $F(x, y, \ldots)$, et que l'on adjoigne mentalement à chacune d'elles la suite indéfinie de ses propres dérivées, tout terme commun aux deux groupes illimités ainsi obtenus se nommera une *résultante* des deux dérivées en question. Pour passer de la fonction $F(x, y, \ldots)$ à l'une ou à l'autre de ces dernières, il faut exécuter sur elle certaines différentiations, dont quelques-unes peuvent être les mêmes de part et d'autre : en désignant par le symbole D. l'ensemble des différentiations communes, et par les symboles D'., D''. l'ensemble des différentiations restantes pour la première et la seconde dérivée respectivement, les deux dérivées considérées peuvent évidemment s'écrire

$$D.D'.F(x, y, \ldots), \qquad D.D''.F(x, y, \ldots),$$

et l'on voit sans peine : 1° qu'elles admettent

$$D.D'.D''.F(x, y, \ldots)$$

comme *résultante unique d'ordre minimum;* 2° que le groupe complet de leurs résultantes s'obtient en adjoignant à celle d'ordre minimum la suite indéfinie de ses propres dérivées.

Considérons maintenant un système différentiel résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et, dans ce système, deux équations ayant pour premiers membres respectifs deux dérivées d'une même inconnue; puis, prenons la résultante d'ordre minimum de ces dérivées, et répétons l'opération en faisant varier de toutes les manières possibles le choix de la fonction inconnue et celui des deux équations sur les premiers membres desquelles on doit opérer : les résultantes, en nombre essentiellement limité, que nous obtiendrons ainsi, se nommeront, par rapport au système donné, les dérivées *cardinales* de ses diverses fonctions inconnues. Il va sans dire que toute fonction incon-

nue dont une seule dérivée figure dans les premiers membres du système n'admet aucune dérivée cardinale, et que, dans le cas où ces premiers membres appartiennent à des inconnues toutes différentes, il n'y a de dérivée cardinale pour aucune fonction inconnue.

Calcul inverse de la dérivation; théorème d'existence.

93. Le problème général du Calcul inverse de la dérivation, dont nous avons déjà traité au n° 76 un cas particulier, peut se formuler comme il suit :

Chercher toute fonction des variables x, y, ..., développable à partir de valeurs données, x_0, y_0, ..., et dont on suppose données telles ou telles dérivées [ces dernières nécessairement développables, comme la fonction cherchée (n° 49), à partir de $x_0, y_0, \ldots$].

Considérons donc un système différentiel ayant pour premiers membres (tous distincts) diverses dérivées de la fonction inconnue u, et pour seconds membres diverses fonctions données de x, y, ..., toutes développables à partir de x_0, y_0, ...

Pour que le système dont il s'agit admette quelque intégrale u développable à partir de x_0, y_0, ..., il est nécessaire que les diverses expressions déduites du système pour une même dérivée cardinale quelconque de u soient identiquement égales entre elles.

Ces identités étant supposées satisfaites, il existe une infinité d'intégrales développables à partir de x_0, y_0, ..., et l'une quelconque d'entre elles se trouve entièrement déterminée, si l'on se donne les fonctions (ou constantes), en nombre fini, dont la connaissance équivaut à celle de sa détermination initiale (n°s 83 et 90); *ces fonctions peuvent être arbitrairement choisies, sous la seule restriction d'être développables à partir des valeurs initiales de leurs variables respectives, et toute solution particulière du système ne peut manquer d'être développable dans les limites où le sont à la fois : 1° les seconds membres du système ; 2° les fonctions dont la connaissance équivaut à celle de sa détermination initiale.*

Enfin, la solution générale du problème que nous avons en vue

est donnée par la formule

$$u = \mathrm{U}(x, y, \ldots) + \Lambda,$$

où $\mathrm{U}(x, y, \ldots)$ *désigne une solution particulière quelconque, et* Λ *une expression toute semblable à la détermination initiale schématique.*

I. S'il existe quelque intégrale u, il est clair qu'elle vérifie, non seulement les équations du système donné, mais encore toutes celles qui s'en déduisent par différentiations (nº 58), et cette circonstance permet de calculer tous les coefficients de la partie principale de son développement. Effectivement, un terme quelconque de la partie principale a pour coefficient, au facteur numérique connu près (nº 54), la valeur initiale d'une certaine dérivée principale de u, c'est-à-dire d'une dérivée qui coïncide, soit avec quelqu'un des premiers membres du système donné, soit avec quelqu'une de leurs dérivées : il suffit donc, pour obtenir cette valeur initiale, de considérer le groupe illimité que forment les équations du système donné et toutes leurs équations dérivées, de choisir dans ce groupe une relation convenable, et de calculer la valeur numérique acquise par le second membre en $x_0, y_0, \ldots$.

Il arrive d'ailleurs fréquemment que la valeur initiale d'une même dérivée principale puisse ainsi se calculer de plusieurs façons : pour qu'il en soit ainsi, il est évidemment nécessaire et suffisant que la dérivée principale dont il s'agit coïncide, soit avec quelqu'une des dérivées cardinales de u, soit avec quelque dérivée de ces dernières. Or, l'existence supposée de l'intégrale u entraîne l'égalité numérique des divers résultats fournis pour la valeur initiale d'une semblable dérivée ; si donc on considère les diverses expressions, fonctions de $x, y, \ldots$, déduites du système donné pour l'une quelconque des dérivées cardinales de u, les expressions dont il s'agit doivent, ainsi que leurs dérivées semblables de tous ordres, prendre la même valeur numérique en $x_0, y_0, \ldots$, c'est-à-dire que les diverses expressions d'une même dérivée cardinale quelconque doivent être *identiquement* égales entre elles (nº 58). L'ensemble de ces identités constitue ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour que le calcul des coefficients de la partie principale du développement d'une intégrale hypothétique, effectué de toutes les manières possibles, conduise pour chacun d'eux, comme cela doit être, à une valeur unique.

II. Les identités dont il s'agit étant supposées satisfaites, la partie principale du développement, calculée comme nous venons de l'indiquer, admet les rayons de convergence communs à tous les seconds membres des équations proposées.

Pour l'établir, je démontrerai tout d'abord que, si l'on construit une portion de développement avec les coefficients déduits d'une même équation du système, cette portion de développement admet les rayons de convergence du second membre de l'équation considérée. Soit, en effet,

$$(1) \qquad \frac{\partial^{p+q+\dots} u}{\partial x^p\, \partial y^q \dots} = f(x, y, \dots)$$

l'une des équations du système. En désignant par $A_{a,\,b,\,\dots}$ la valeur initiale de la dérivée

$$\frac{\partial^{a+b+\dots} f(x.\ y, \dots)}{\partial x^a\, \partial y^b \dots},$$

le développement du second membre $f(x, y, \dots)$ et celui que nous faisons correspondre à l'équation (1) se correspondent terme à terme, et ont respectivement pour termes généraux

$$A_{a,b,\dots} \frac{(x-x_0)^a}{1.2\dots a} \frac{(y-y_0)^b}{1.2\dots b} \dots,$$

$$A_{a,b,\dots} \frac{(x-x_0)^{a+p}}{1.2\dots(a+p)} \frac{(y-y_0)^{b+q}}{1.2\dots\ b+q)} \dots;$$

le rapport de ceux-ci,

$$\frac{(x-x_0)^p}{(a+1)\dots(a+p)} \frac{(y-y_0)^q}{(b+1)\dots(b+q)} \dots,$$

ayant un numérateur indépendant de a, b, ..., avec un dénominateur au moins égal à 1, le second développement converge certainement dans les mêmes limites que le premier (n° 29).

Cela posé, si l'on ajoute les divers développements qui correspondent ainsi aux diverses équations du système donné, le développement résultant admettra évidemment les rayons de convergence communs à tous les seconds membres du système : or, la valeur initiale de telle ou telle dérivée principale pouvant se déduire par différentiations de plusieurs équations du système donné, les coefficients du développement que nous venons d'obtenir par addition

sont les produits, par certains entiers positifs, des coefficients semblables de la partie principale du développement d'une intégrale hypothétique; cette partie principale admettra donc, elle aussi, les rayons de convergence dont il s'agit (nº 29).

III. Si l'on désigne par $P(x, y, \ldots)$ la somme de la portion de développement dont nous venons de démontrer la convergence, et qu'on lui ajoute une détermination initiale, Δ, arbitrairement choisie sous la seule restriction que les fonctions, en nombre essentiellement fini, qui entrent dans son expression, soient toutes développables à partir des valeurs initiales des variables dont elles dépendent, la somme

$$u = P(x, y, \ldots) + \Delta \tag{2}$$

vérifie identiquement les équations proposées.

Effectivement, il résulte du calcul même des coefficients de $P(x, y, \ldots)$ que les premiers membres des équations proposées et leurs dérivées de tous ordres prennent, en $x_0, y_0, \ldots$, les mêmes valeurs numériques que les seconds membres correspondants et leurs dérivées semblables : les premiers membres sont donc identiquement égaux aux seconds (nº 58).

La formule (2) donne d'ailleurs la solution générale du problème posé; car toute intégrale du système donné développable à partir de $x_0, y_0, \ldots$ a nécessairement pour partie principale de son développement la fonction $P(x, y, \ldots)$, et il suffit alors, pour faire coïncider le second membre de la formule (2) avec l'intégrale que l'on considère, de prendre pour Δ la détermination initiale de cette intégrale.

Si l'on rapproche maintenant de la formule (2) et des nºs 83 et 90 le point que nous avons établi plus haut (II) sur les rayons de convergence de $P(x, y, \ldots)$, il est clair que le développement d'une intégrale particulière quelconque converge dans les limites indiquées par l'énoncé.

IV. En attribuant aux notations $U(x, y, \ldots)$ et Λ le sens indiqué par notre énoncé, la solution générale du problème qui nous occupe est également donnée par la formule

$$u = U(x, y, \ldots) + \Lambda. \tag{3}$$

Il résulte, en effet, de l'alinéa III qu'en désignant par Δ une expression schématique exactement semblable à Λ, la solution générale est donnée par la formule

$$u = \mathrm{P}(x, y, \ldots) + \Delta. \tag{4}$$

Si donc on désigne par G certaine fonction *calquée* sur Δ, c'est-à-dire pouvant se déduire de Δ par la substitution aux fonctions schématiques qui y figurent de certaines fonctions déterminées, on aura

$$\mathrm{U}(x, y, \ldots) = \mathrm{P}(x, y, \ldots) + \mathrm{G},$$

et la formule (3) pourra s'écrire

$$u = \mathrm{P}(x, y, \ldots) + \mathrm{G} + \Lambda; \tag{5}$$

il est facile de voir, dès lors, qu'elle équivaut entièrement à la formule (4) : car les expressions schématiques Δ, Λ étant semblables l'une à l'autre, et la fonction G étant calquée sur elles, la relation

$$\Delta = \mathrm{G} + \Lambda,$$

obtenue en égalant les seconds membres de (4) et (5), permet de déterminer les fonctions qui figurent dans Λ quand on connaît celles qui figurent dans Δ, et réciproquement.

94. Les relations obtenues en égalant entre elles, dans le système étudié au numéro précédent, les diverses expressions d'une même dérivée cardinale quelconque, se nomment les *conditions d'intégrabilité* du système ; lorsqu'elles sont satisfaites, le système est dit *intégrable*. On peut d'ailleurs, comme nous le verrons plus tard (n° 165), les simplifier dans bien des cas.

Dans le cas très particulier où les seconds membres du système se réduisent tous à zéro, le système est évidemment intégrable, et sa solution générale se réduit à la détermination initiale schématique de u.

Considérons, notamment, un système ayant pour premiers membres diverses dérivées *premières* de la fonction inconnue u, avec des seconds membres tous nuls ; en supposant, pour fixer les idées, qu'il y ait cinq variables indépendantes, x, y, z, s, t, et qu'on assujettisse les trois dérivées premières relatives à x, y, z à être identiquement

nulles, la solution générale du système résultant,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

sera une fonction arbitraire de s, t.

On en déduit immédiatement la conséquence suivante :

Pour que la somme d'un développement fondamental ne dépende effectivement que de certaines des variables, il faut et il suffit que ses dérivées premières relatives aux variables restantes soient identiquement nulles (¹).

En particulier, *pour que la somme d'un développement fondamental se réduise à une constante, il faut et il suffit que ses dérivées premières soient toutes identiquement nulles.*

Calcul inverse de la dérivation; réduction à des quadratures.

95. *Dans un système* (*intégrable*) *ayant pour premiers membres diverses dérivées premières de la fonction inconnue* u, *et pour seconds membres diverses fonctions données de* x, y, ... (*développables à partir des valeurs initiales* x_0, y_0, ...), *la recherche de l'intégrale particulière répondant à une condition initiale donnée se ramène à des quadratures* (nº 78) *en nombre égal à celui des équations du système.*

Supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait cinq variables indépendantes, x, y, z, s, t, et que le système comprenne trois équations,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= F_1(x, y, z, s, t), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= F_2(x, y, z, s, t), \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= F_3(x, y, z, s, t): \end{aligned} \right.$$

(¹) Il est clair d'ailleurs que, si cette condition se trouve remplie pour un développement fondamental, elle le sera pour les développements successifs auxquels conduit un chemin praticable quelconque : car toute dérivée première du développement sera, elle aussi, calculable suivant le même chemin, et la nullité identique de son développement initial, si elle a lieu, entraînera de proche en proche celle de tous les développements subséquents (nº 69).

les conditions d'intégrabilité sont, ici,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y},$$

et on les suppose, comme de raison, identiquement satisfaites. Désignant alors par x_0, y_0, z_0, s_0, t_0 les valeurs initiales choisies pour les variables, nous établirons que la recherche de l'intégrale particulière répondant à la condition initiale (donnée)

$$u = \upsilon(s, t) \qquad \text{pour} \qquad x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0$$

se ramène à trois quadratures, savoir :

1° A la recherche d'une solution (quelconque) de l'équation

$$(2) \qquad \frac{\partial u_{0,0}}{\partial z} = F_3(x_0, y_0, z, s, t),$$

où $u_{0,0}$ désigne une fonction inconnue des seules variables z, s, t, et qui se déduit, par un mécanisme évident, de la troisième équation (1) ;

2° A la recherche d'une solution (quelconque) de l'équation

$$(3) \qquad \frac{\partial u_0}{\partial y} = F_2(x_0, y, z, s, t),$$

où u_0 désigne une fonction inconnue des seules variables y, z, s, t, et qui se déduit, par un mécanisme évident, de la deuxième équation (1) ;

3° A la recherche d'une solution (quelconque) de la première équation (1),

$$(4) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = F_1(x, y, z, s, t).$$

Supposons, en effet, que l'on connaisse une solution de (2), une solution de (3), et une solution de (4). Connaissant une solution de (2), on connaîtra par là même (n° 77) celle qui répond à la condition initiale

$$u_{0,0} = \upsilon(s, t) \qquad \text{pour} \qquad z - z_0 = 0;$$

nous la désignerons par $U_{0,0}(z, s, t)$. Puis, connaissant une solution de (3), on connaîtra par là même celle qui répond à la condition initiale

$$u_0 = U_{0,0}(z, s, t) \qquad \text{pour} \qquad y - y_0 = 0;$$

nous la désignerons par $U_0(y, z, s, t)$. Connaissant enfin une solution de (4), on connaîtra par là même celle qui répond à la condition initiale

$$(5) \qquad u = U_0(y, z, s, t) \quad \text{pour} \quad x - x_0 = 0.$$

Je dis que c'est là précisément l'intégrale cherchée du système (1).

Effectivement, cette dernière peut, par un groupement convenable des termes de son développement, s'écrire sous la forme

$$(6) \qquad \begin{aligned} u = {} & (x - x_0) A(x, y, z, s, t) + (y - y_0) B(y, z, s, t) \\ & + (z - z_0) C(z, s, t) + \upsilon(s, t), \end{aligned}$$

où $A(x, y, z, s, t)$, $B(y, z, s, t)$, $C(z, s, t)$ désignent certaines fonctions développables à partir des valeurs initiales des variables dont elles dépendent. En posant

$$(7) \qquad (z - z_0) C(z, s, t) + \upsilon(s, t) = \Upsilon_{0,0}(z, s, t),$$

la formule (6) devient

$$(8) \quad u = (x - x_0) A(x, y, z, s, t) + (y - y_0) B(y, z, s, t) + \Upsilon_{0,0}(z, s, t),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x - x_0) \frac{\partial A}{\partial z} + (y - y_0) \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\partial \Upsilon_{0,0}}{\partial z};$$

il résulte de là que, dans l'hypothèse numérique

$$x - x_0 = y - y_0 = 0,$$

la dérivée première relative à z de l'intégrale particulière (6) du système (1) se réduit à $\frac{\partial \Upsilon_{0,0}}{\partial z}$: si donc on introduit dans la troisième équation (1), après substitution à u de cette intégrale, l'hypothèse numérique dont il s'agit, elle devient

$$\frac{\partial \Upsilon_{0,0}}{\partial z} = F_3(x_0, y_0, z, s, t).$$

Ainsi, la fonction $\Upsilon_{0,0}(z, s, t)$ vérifie l'équation (2) ; d'autre part, à cause de (7), elle remplit, vis-à-vis de cette équation, la condition initiale

$$\Upsilon_{0,0} = \upsilon(s, t) \quad \text{pour} \quad z - z_0 = 0;$$

elle est donc forcément identique à la solution particulière $U_{0,0}(z, s, t$ de cette même équation, et la formule (8) devient

$$(9)\quad u = (x - x_0)\,A(x, y, z, s, t) + (y - y_0)\,B(y, z, s, t) + U_{0,0}(z, s, t)$$

Posons maintenant

$$(10)\qquad (y - y_0)\,B(y, z, s, t) + U_{0,0}(z, s, t) = \Upsilon_0(y, z, s, t);$$

la formule (9) devient

$$(11)\qquad u = (x - x_0)\,A(x, y, z, s, t) + \Upsilon_0(y, z, s, t),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (x - x_0)\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial \Upsilon_0}{\partial y};$$

il résulte de là que, dans l'hypothèse numérique $x - x_0 = 0$, la dérivée première relative à y de l'intégrale particulière (6) du système (1) se réduit à $\frac{\partial \Upsilon_0}{\partial y}$: si donc on introduit dans la deuxième équation (1), après substitution à u de cette intégrale, l'hypothèse numérique $x - x_0 = 0$, elle devient

$$\frac{\partial \Upsilon_0}{\partial y} = F_2(x_0, y, z, s, t).$$

Ainsi, la fonction $\Upsilon_0\,(y, z, s, t)$ vérifie l'équation (3); d'autre part, à cause de (10), elle remplit, vis-à-vis de cette équation, la condition initiale

$$\Upsilon_0 = U_{0,0}(z, s, t) \qquad \text{pour} \qquad y - y_0 = 0;$$

elle est donc forcément identique à la solution particulière $U_0(y, z, s, t)$ de cette même équation, et la formule (11) devient

$$(12)\qquad u = (x - x_0)\,A(x, y, z, s, t) + U_0(y, z, s, t).$$

Considérant enfin la formule (12), on voit que l'intégrale particulière (6) du système (1) remplit, vis-à-vis de l'équation (4), la condition initiale (5).

Ainsi se trouve achevée notre démonstration.

Dans le cas particulier où le système (1) est de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1(x, s, t),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_2(y, s, t),$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = f_3(z, s, t),$$

les conditions d'intégrabilité sont évidemment satisfaites, car les deux expressions de chaque dérivée cardinale sont identiquement nulles (n° 94); en désignant alors par

$$U_1(x, s, t), \quad U_2(y, s, t), \quad U_3(z, s, t)$$

trois solutions particulières de ces équations respectives, leur somme

$$U_1(x, s, t) + U_2(y, s, t) + U_3(z, s, t)$$

est évidemment une solution particulière du système donné (dont la connaissance permettra d'obtenir celle qui répond à une condition initiale arbitrairement choisie).

96. *Pour obtenir, dans le cas le plus général du Calcul inverse de la dérivation, l'intégrale particulière répondant à des conditions initiales données, il suffit d'exécuter un certain nombre de fois cette même recherche dans le cas du premier ordre, ce qui, d'après le numéro précédent, ramène toujours à des quadratures.*

I. Étant donné un système (intégrable) S, ayant pour premiers membres diverses dérivées de l'inconnue u, et pour seconds membres des fonctions données de $x, y, \ldots$, nous en déduirons, conformément aux indications ci-après, un système du premier ordre, Σ, impliquant, avec l'inconnue u, quelques-unes de ses dérivées à titre d'inconnues adjointes, et résolu par rapport à diverses dérivées (premières) des inconnues qui s'y trouvent engagées. Comme il a été dit au n° 90, nous écrirons les diverses équations de Σ dans les cases d'un quadrillage rectangulaire, en ne nous occupant tout d'abord que des premiers membres.

Les conditions initiales du système S ayant été mises sous la forme

(schématique) spécifiée au n° 91, désignons par $\frac{\partial^{\alpha+\beta+\dots} u}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta \dots}$ l'un de leurs premiers membres, et par $F_{\alpha,\beta,\dots}$ le second membre correspondant. Cela étant, nous prendrons dans Σ, pour l'une de nos inconnues, la quantité $\frac{\partial^{\alpha+\beta+\dots} u}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta \dots}$, que nous désignerons par $u_{\alpha,\beta,\dots}$; puis, en supposant, pour fixer les idées, qu'il y ait cinq variables indépendantes, x, y, z, s, t, et que la fonction schématique $F_{\alpha,\beta,\dots}$ dépende de s, t, nous écrirons dans les cases (x), (y), (z) de la colonne $(u_{\alpha,\beta,\dots})$ les premiers membres

$$\frac{\partial u_{\alpha,\beta,\dots}}{\partial x} = \dots, \qquad \frac{\partial u_{\alpha,\beta,\dots}}{\partial y} = \dots, \qquad \frac{\partial u_{\alpha,\beta,\dots}}{\partial z} = \dots,$$

et nous laisserons vides les cases (s) et (t) de cette même colonne; au cas où $F_{\alpha,\beta,\dots}$ se réduirait à une simple constante schématique, les cases de la colonne considérée seraient ainsi toutes pleines. Ce que nous venons de faire pour l'une des conditions initiales, nous le ferons successivement pour toutes, et nous aurons ainsi, dans notre quadrillage rectangulaire, des cases pleines et des cases vides; d'ailleurs, quelques seconds membres que nous écrivions ultérieurement dans les cases pleines, on voit, dès maintenant, que si l'on forme successivement, dans l'ancien système, puis dans le nouveau, un ensemble composé des inconnues et de leurs dérivées paramétriques, les deux ensembles ainsi obtenus se correspondent terme à terme, et que le second se déduira du premier par de simples changements de notations; de même, et toujours aux notations près, l'économie des conditions initiales sera identique dans les deux systèmes. Quant aux dérivées principales du nouveau système, elles coïncideront, aux notations près, les unes avec des dérivées principales, les autres avec des dérivées paramétriques de l'ancien.

Occupons-nous maintenant des seconds membres du système Σ, et considérons, pour fixer les idées, l'équation qui, dans Σ, a pour premier membre $\frac{\partial u_{\alpha,\beta,\dots}}{\partial x}$. A la notation près, ce premier membre coïncide avec une dérivée ancienne,

$$\frac{\partial^{(\alpha+1)+\beta+\dots} u}{\partial x^{\alpha+1} \, \partial y^\beta \dots}, \tag{13}$$

qui, d'après la forme donnée aux conditions initiales de S (n° 91),

est nécessairement identique, soit au premier membre de quelqu'une de ces conditions initiales, soit à quelque dérivée principale de S : dans le premier cas, elle coïncide, à la notation près, avec quelque inconnue adjointe de Σ, et nous égalerons alors $\frac{\partial u_{\alpha, \beta, \ldots}}{\partial x}$ à cette inconnue adjointe ; dans le second cas, quelqu'une des équations de S ou de celles qui s'en déduisent par différentiations nous fournira, pour la dérivée (13), une expression en $x, y, \ldots$, et nous égalerons alors $\frac{\partial u_{\alpha, \beta, \ldots}}{\partial x}$ à cette expression.

II. D'après les relations qui existent entre les deux systèmes S et Σ, il est manifeste que si l'on considère, dans S, la solution particulière satisfaisant à des conditions initiales données, il y correspond, dans Σ, une solution satisfaisant à des conditions initiales identiques (aux notations près), et se déduisant de celle de S par la simple adjonction des dérivées qui servent d'inconnues adjointes. Pour obtenir la solution considérée de Σ, on partagera les colonnes du Tableau, c'est-à-dire les inconnues de Σ, en groupes successifs d'après l'ordre (total) croissant des notations anciennes de ces inconnues. Le dernier groupe, qui correspond à l'ordre le plus élevé, ne contiendra dans ses seconds membres que des fonctions connues de $x, y, \ldots$ (n° 91) : on l'intégrera avec les conditions initiales voulues, ce qui conduira à résoudre un certain nombre de fois le problème traité au n° 95. Cela fait, on passera au groupe précédent, et l'on observera que ses diverses équations ont pour seconds membres, les unes des fonctions connues de $x, y, \ldots$, les autres des inconnues adjointes du dernier groupe ; en remplaçant celles-ci par les fonctions qui viennent d'être calculées, les seconds membres de l'avant-dernier groupe seront tous des fonctions connues de $x, y, \ldots$: on l'intégrera avec les conditions initiales voulues, ce qui conduira de nouveau à résoudre un certain nombre de fois le problème traité au n° 95. De l'avant-dernier groupe on passera de même à celui qui précède, et ainsi jusqu'à épuisement des groupes.

97. Éclaircissons ces indications par quelques exemples.

I. Étant donnée l'équation

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \, \partial y \, \partial z} = A(x, y, z),$$

où u désigne une fonction inconnue, et A une fonction connue des trois variables indépendantes x, y, z, proposons-nous de l'intégrer avec les conditions initiales (n° 84, II)

$$\begin{aligned} u &= \varpi(y, z) \quad \text{pour} \quad x = x_0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \varphi(x, z) \quad \text{pour} \quad y = y_0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} &= \psi(x, y) \quad \text{pour} \quad z = z_0. \end{aligned}$$

On prendra comme inconnues les premiers membres des conditions initiales, que l'on nommera u, u'_x, u''_{xy}, et l'on formera le système du premier ordre

	u	u'_x	u''_{xy}
x	$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x$		
y		$\frac{\partial u'_x}{\partial y} = u''_{xy}$	
z			$\frac{\partial u''_{xy}}{\partial z} = \mathrm{A}$

On intégrera la dernière colonne avec la condition initiale

$$u''_{xy} = \psi(x, y) \quad \text{pour} \quad z = z_0;$$

puis, u''_{xy} étant connu, la deuxième colonne avec la condition initiale

$$u'_x = \varphi(x, z) \quad \text{pour} \quad y = y_0;$$

enfin, u'_x étant connu, la première colonne avec la condition initiale

$$u = \varpi(y, z) \quad \text{pour} \quad x = x_0.$$

II. Considérons le système

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \mathrm{A}(x, y, z), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} = \mathrm{B}(x, y, z),$$

où u désigne une fonction inconnue, et A, B deux fonctions connues des trois variables indépendantes x, y, z; et supposant, comme de

raison, la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial y}$$

identiquement satisfaite, proposons-nous d'intégrer le système avec les conditions initiales (n° 84, IV)

$$u = \upsilon(y, z) \quad \text{pour} \quad x - x_0 = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(x) \quad \text{pour} \quad y - y_0 = z - z_0 = 0.$$

A cet effet, on prendra comme inconnues les premiers membres des conditions initiales, que l'on nommera u, u'_x, et l'on formera le système du premier ordre

	u	u'_x
x	$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x$	
y		$\frac{\partial u'_x}{\partial y} = A$
z		$\frac{\partial u'_x}{\partial z} = B$

On intégrera la seconde colonne avec la condition initiale

$$u'_x = \varphi(x) \quad \text{pour} \quad y - y_0 = z - z_0 = 0;$$

puis, u'_x étant connu, la première colonne avec la condition initiale

$$u = \upsilon(y, z) \quad \text{pour} \quad x - x_0 = 0.$$

III. Dans le système

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = A(x, y, z), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} = B(x, y, z), \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial y} = C(x, y, z),$$

où u désigne une fonction inconnue, et A, B, C trois fonctions connues des variables indépendantes x, y, z, supposons identiquement satisfaites les conditions d'intégrabilité

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial^3 B}{\partial y^3}, \qquad \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^2 B}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial C}{\partial z};$$

et, cela étant, proposons-nous d'intégrer le système avec des conditions initiales données ; ces dernières, comme on le verra par l'application de notre méthode, sont de la forme

$$\left.\begin{aligned} u &= \varphi_0(z) \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \varphi_1(z) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \varphi_2(z) \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad x - x_0 = y - y_0 = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \alpha_0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} &= \alpha_1 \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2} &= \alpha_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \psi(x) \quad \text{pour} \quad y - y_0 = z - z_0 = 0.$$

A cet effet, on prendra comme inconnues les premiers membres des conditions initiales, que l'on nommera u, u'_x, u'_y, u''_{x^2}, u''_{xy}, u''_{y^2}, u'''_{xy^2}, et l'on formera le système du premier ordre

	u	u'_x	u'_y	u''_{x^2}	u''_{xy}	u''_{y^2}	u'''_{xy^2}
x	$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x$	$\frac{\partial u'_x}{\partial x} = u''_{x^2}$	$\frac{\partial u'_y}{\partial x} = u''_{xy}$		$\frac{\partial u''_{xy}}{\partial x} = C$	$\frac{\partial u''_{y^2}}{\partial x} = u'''_{xy^2}$	$\frac{\partial u'''_{xy^2}}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial y}$
y	$\frac{\partial u}{\partial y} = u'_y$	$\frac{\partial u'_x}{\partial y} = u''_{xy}$	$\frac{\partial u'_y}{\partial y} = u''_{y^2}$	$\frac{\partial u''_{x^2}}{\partial y} = C$	$\frac{\partial u''_{xy}}{\partial y} = u'''_{xy^2}$	$\frac{\partial u''_{y^2}}{\partial y} = A$	$\frac{\partial u'''_{xy^2}}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial x}$
z		$\frac{\partial u'_x}{\partial z} = B$		$\frac{\partial u''_{x^2}}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial x}$	$\frac{\partial u''_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial y}$		$\frac{\partial u'''_{xy^2}}{\partial z} = \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}$

On en intégrera les colonnes successives de droite à gauche, chaque fois avec la condition initiale voulue.

CHAPITRE VII.

SYSTÈMES ORTHONOMES.

Systèmes passifs; systèmes complètement intégrables.

98. Nous dirons qu'un système différentiel est *limité* ou *illimité,* suivant qu'il se compose d'un nombre limité ou illimité d'équations, et nous supposerons expressément *que tout système différentiel directement donné est limité :* c'est toujours, en effet, à de pareils systèmes que conduit la mise en équations des problèmes de Mathématiques appliquées.

Des intégrales particulières d'un système (limité) donné seront dites *ordinaires,* si, les seconds membres du système ayant été réduits à zéro par la simple transposition de leurs termes dans les premiers membres, on peut assigner quelque domaine tel, que non seulement les intégrales dont il s'agit y soient exprimables par des développements de Taylor (n° 55) construits à partir du centre, mais que, de plus, leurs valeurs, prises conjointement avec celles de leurs dérivées et des variables indépendantes, restent toujours intérieures à quelque domaine où les premiers membres du système soient exprimables de la même manière [1].

La substitution d'intégrales ordinaires connues dans les équations de ce système en transforme les divers premiers membres en diverses fonctions composées des variables, des intégrales, et de quelques-unes de leurs dérivées. D'après la définition même des intégrales ordinaires,

---

[1] Il va sans dire que les deux domaines dont l'existence est imposée par la définition ci-dessus font respectivement partie de deux espaces essentiellement différents : si l'on désigne par x, y, ... les variables indépendantes, et par δ, ... les diverses inconnues et dérivées figurant effectivement dans les premiers membres du système, le premier de ces deux domaines fait partie de l'espace $\big[[x, y, \ldots]\big]$, et le second de l'espace $\big[[x, y, \ldots, \delta, \ldots]\big]$.

et entre les limites assignées par cette définition, les règles établies pour les fonctions composées sont applicables aux premiers membres dont il s'agit; d'ailleurs, chacun d'eux étant identiquement nul après la substitution indiquée, toutes ses dérivées le sont aussi (n° 56), et l'*on peut,* en conséquence, *différentier indéfiniment les relations du système.* Les relations ainsi obtenues peuvent ensuite être combinées de mille manières entre elles et avec les proposées sans que l'algorithme des fonctions composées cesse d'être applicable, puis les résultats de ces combinaisons être différentiés à leur tour, et fournir les éléments de combinaisons nouvelles qui seront elles-mêmes différentiées; et ainsi de suite indéfiniment. On peut, en un mot, déduire du système donné une foule de relations dont chacune est identiquement satisfaite par la substitution aux inconnues d'un groupe quelconque d'intégrales ordinaires.

99. Si aux équations qui composent un système (limité) donné S on adjoint toutes celles qui s'en déduisent par de simples différentiations, le groupe illimité résultant de cette adjonction s'appellera le *système* S *prolongé.*

D'après ce qui vient d'être dit (n° 98), un groupe quelconque d'intégrales ordinaires du système S satisfait identiquement à toutes les relations du système S prolongé : dès lors, si l'on convient de considérer pour un instant les variables $x, y, \ldots$, les fonctions inconnues $u, v, \ldots$ et leurs dérivées de tous ordres comme autant de variables indépendantes distinctes, le système S prolongé ne peut manquer d'être *numériquement* vérifié par des valeurs particulières quelconques, x_0, y_0, ..., de x, y, ..., prises conjointement avec les valeurs correspondantes des intégrales considérées et de leurs dérivées de tous ordres (cela, bien entendu, dans les limites assignées par la définition même des intégrales ordinaires).

Inversement, supposons que, dans un domaine où les premiers membres de S soient exprimables par des développements de Taylor construits à partir du centre (les seconds membres étant supposés nuls), le système S prolongé admette quelque solution *numérique;* supposons en outre que, en désignant par x_0, y_0, ... les valeurs numériques de x, y, ..., les développements, entiers en $x-x_0$, $y-y_0$, ..., qui ont pour coefficients, aux facteurs numériques connus près (n° 54), les valeurs numériques (figurant dans la solu-

tion considérée) de u, v, ... et de leurs dérivées de tous ordres, soient *convergents*. Cela étant, *les sommes des développements dont il s'agit constituent un groupe d'intégrales* (*évidemment ordinaires*) *du système* S.

Désignons en effet par U, V, ... les sommes de ces développements, et considérons, autour du point $(x_0, y_0, \ldots)$ pris comme centre, un domaine, $\mathfrak{D}$, dont les rayons soient suffisamment petits pour que les fonctions de x, y, ..., en lesquelles se transforment, par la substitution de U, V, ... à u, v, ..., les divers premiers membres de S, y soient toutes exprimables par des développements de Taylor construits à partir du centre (n° 59). Par la manière même dont les développements U, V, ... ont été construits, les valeurs initiales de x, y, ... de U, V, ... et de leurs dérivées de tous ordres constituent la solution numérique dont l'existence a été supposée dans le système S prolongé. Donc les fonctions de x, y, ..., qui, après la substitution, constituent les divers premiers membres de S, sont nulles, ainsi que leurs dérivées de tous ordres, pour

$$x - x_0 = y - y_0 = \ldots = 0,$$

et, par suite, sont identiquement nulles dans toute l'étendue du domaine $\mathfrak{D}$ (n° 57).

100. Le théorème précédent, que nous avons déjà eu l'occasion d'appliquer dans le cas très particulier du Calcul inverse de la dérivation (n°s 76 et 93), montre quel intérêt il peut y avoir, étant donné un système différentiel limité, à considérer, au point de vue des solutions numériques, tels ou tels des systèmes illimités qui s'en déduisent. Il convient de poser à cet égard la définition suivante :

Considérons deux systèmes différentiels, limités ou illimités, composés de relations qui aient toutes la forme entière par rapport aux dérivées d'ordre suffisamment grand des inconnues ([1]), et (dans certaines limites) la forme olotrope par rapport aux variables x, y, ..., aux inconnues u, v, ... et aux dérivées restantes; puis, assimilons pour un instant les quantités x, y, ..., u, v, ... et les dérivées de tous ordres de u, v, ... à autant de variables indépendantes distinctes. Cela étant, si (dans une certaine région d'olotropie) toute solution numérique du premier est en même temps une solution numérique

([1]) Cette condition se trouve remplie d'elle-même dans un système limité.

du second, nous dirons que le second est (dans la même région) une *conséquence numérique* du premier; et, si chacun d'eux est une conséquence numérique de l'autre, nous dirons que les systèmes sont *numériquement équivalents*.

101. Dans un système différentiel résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, les intégrales doivent, conformément à notre définition du nº 98, être qualifiées d'*ordinaires,* s'il existe quelque domaine tel, que non seulement les intégrales dont il s'agit y soient exprimables par des développements de Taylor construits à partir du centre, mais que, de plus, leurs valeurs, prises conjointement avec celles de leurs dérivées et des variables indépendantes, restent toujours intérieures à quelque domaine où les seconds membres du système soient exprimables de la même manière. Les théorèmes d'existence ultérieurement exposés se rapportent tous aux intégrales *ordinaires* de certains systèmes différentiels possédant la double propriété *d'être résolus par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues* qui s'y trouvent engagées, et *de ne contenir dans leurs seconds membres aucune dérivée principale* (nº 90).

Considérons donc un système différentiel, S, qui jouisse de cette double propriété; nous dirons qu'il est *passif,* si, assimilant pour un instant les variables x, y, ..., les inconnues u, v, ... et leurs dérivées de tous ordres à autant de variables indépendantes distinctes, on peut, par voie d'éliminations, déduire du système S prolongé (nº 99) un système numériquement équivalent (nº 100) résolu par rapport aux dérivées principales : chacune de ces dernières se trouve ainsi exprimée à l'aide des variables indépendantes, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques, et il va sans dire qu'à chacune d'elles est supposée correspondre, dans le système numériquement équivalent à S prolongé, une formule *unique* de résolution. La solution *numérique* générale de S prolongé est alors fournie par un groupe illimité de formules où les variables, les inconnues et leurs dérivées paramétriques de tous ordres reçoivent des valeurs arbitraires (tout au moins dans les limites où certaines *restrictions d'inégalité* se trouvent vérifiées pour elles), tandis que les dérivées principales se trouvent entièrement déterminées en fonctions de ces diverses quantités.

Parmi les restrictions d'inégalité auxquelles il vient d'être fait allusion, il en est une évidente, qu'il faut sous-entendre dans tous les cas : c'est que, le système S prolongé se déduisant de S par la considération des intégrales ordinaires et l'application indéfinie de la règle des fonctions composées (n°s 62 et 64), les valeurs numériques des diverses quantités qui figurent dans les seconds membres de S ne doivent pas excéder les limites d'olotropie communes aux seconds membres dont il s'agit.

Un système passif, S, *n'admet au plus qu'un seul groupe d'intégrales répondant à des conditions initiales données* (n° 90), *et les développements de ces intégrales hypothétiques à partir des valeurs initiales des variables peuvent être facilement reconstruits.* (On suppose expressément les conditions initiales choisies de telle façon, que toutes les restrictions d'inégalité voulues, et en particulier celle que nous venons de mentionner, se trouvent vérifiées; les intégrales hypothétiques sont alors nécessairement *ordinaires.*)

Effectivement, si les intégrales cherchées existent, leurs valeurs initiales, prises conjointement avec celles des variables indépendantes et de leurs dérivées principales et paramétriques de tous ordres, vérifient *numériquement* le système S prolongé (n° 99) : or, le système S étant passif, aux valeurs initiales données des variables indépendantes, des intégrales et de leurs dérivées paramétriques, correspond pour chaque dérivée principale, en vertu de S prolongé, une valeur numérique et une seule. On connaît donc à la fois les valeurs initiales des variables indépendantes, celles des intégrales, et celles de leurs dérivées, principales et paramétriques, de tous ordres, c'est-à-dire (n° 54) tout ce qui est nécessaire pour construire les développements cherchés; cette construction n'est d'ailleurs possible que d'une seule manière.

Dans un système passif, la question de savoir si le groupe (forcément unique) d'intégrales hypothétiques répondant à des conditions initiales données existe effectivement, se résout par l'affirmative dans le cas où leurs développements construits a priori *sont tous convergents, par la négative dans le cas contraire.* Car la convergence de ces développements, évidemment nécessaire pour l'existence effective des intégrales cherchées, est, de plus, suffisante, en vertu du n° 99.

Enfin, un système différentiel, S, jouissant de la double propriété

spécifiée au début du présent numéro, sera dit *complètement intégrable,* s'il admet un groupe d'intégrales, et un seul, répondant à des conditions initiales *arbitrairement* choisies, tout au moins dans les limites où certaines *restrictions d'inégalité* se trouvent vérifiées pour ces dernières : on sous-entend toujours, notamment, puisqu'il s'agit d'intégrales *ordinaires,* que les valeurs initiales des diverses quantités figurant dans les seconds membres de S ne doivent pas excéder les limites d'olotropie communes aux seconds membres dont il s'agit.

102. Soient

$$x,\ y,\ \ldots,$$
$$u,\ v,\ \ldots$$

des notations (en nombre limité) désignant, les premières diverses variables indépendantes, les dernières diverses fonctions inconnues de ces variables. A chacune des quantités $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ faisons correspondre un entier (positif, nul ou négatif), que nous nommerons la *cote* de cette quantité; puis, considérant une dérivée d'ordre quelconque r de l'une des fonctions $u, v, \ldots,$ nommons *cote* de la dérivée en question l'entier obtenu en ajoutant à la cote de la fonction celles des r variables de différentiation.

Supposons maintenant que *les cotes respectives des diverses variables indépendantes* soient toutes *égales à* 1, celles des fonctions inconnues étant quelconques; puis, considérant, soit une fonction composée différentielle de $u, v, \ldots$ (nº 65), soit une relation différentielle entre $u, v, \ldots,$ nommons *cote* de l'expression ou de la relation dont il s'agit la cote maxima des *inconnues et dérivées* qui y figurent *effectivement* (nº 94) (abstraction totale étant faite, dans cette évaluation, des variables indépendantes elles-mêmes). Cela étant, il est clair que toute différentiation première exécutée, suivant l'algorithme des fonctions composées, sur l'expression ou la relation considérée augmente d'une unité la cote de cette dernière. En particulier, si l'on considère une relation différentielle ayant pour premier membre quelque dérivée d'inconnue et pour second membre quelque expression de cote au plus égale à celle du premier membre, et si sur cette relation on exécute des différentiations en nombre quelconque, en remplaçant, avant ou après quelques-unes de ces différentiations, telles ou telles des dérivées qui figurent dans le second membre par des expressions de cotes respectivement inférieures ou

égales à celles des dérivées remplacées, le second membre de la relation résultante est, lui aussi, de cote au plus égale à celle du premier membre.

Observons encore qu'en désignant par φ la cote minima des diverses fonctions inconnues, toute dérivée d'ordre n de ces dernières aura une cote au moins égale à $n + \varphi$, puisque la cote de toute variable indépendante est égale à 1. Il résulte de là que la cote d'une dérivée d'ordre quelconque ne tombe jamais au-dessous de $1 + \varphi$, et que, si l'on désigne par c un entier déterminé quelconque (n'excédant pas cette limite), le nombre des dérivées possédant une cote égale à c est essentiellement limité.

103. Considérons un système différentiel, S, impliquant les fonctions inconnues u, v, ... des variables indépendantes x, y, ..., et satisfaisant aux diverses conditions A, B, C, formulées ci-après :

A. Le système S *est résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et les seconds membres sont indépendants de toute dérivée principale.*

B. En attribuant, dans toutes les équations du système, aux variables indépendantes des cotes respectives toutes égales à 1, *et aux inconnues des cotes respectives convenablement choisies, chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées) dont la cote ne surpasse pas celle du premier membre correspondant.*

Désignant alors par δ la cote minima et par Δ la cote maxima des premiers membres de S, partageons les équations proposées en groupes successifs d'après les cotes croissantes,

$$\delta,\quad \delta + 1,\quad \ldots,\quad \Delta,$$

de leurs premiers membres, et soient

$$(1)\qquad s_\delta,\quad s_{\delta+1},\quad \ldots,\quad s_\Delta$$

les groupes successifs dont il s'agit. Considérant ensuite le système S prolongé (n° 99), partageons-en de même les relations en groupes (limités) successifs,

$$(2)\qquad S_\delta,\quad S_{\delta+1},\quad \ldots,\quad S_\Delta,\quad S_{\Delta+1},\quad \ldots,$$

d'après les cotes croissantes de leurs premiers membres (n° 102). Relativement à ces groupes, nous noterons les observations suivantes :

1° Les groupes (1) se trouvent respectivement compris dans

$$S_\delta, \quad S_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad S_\Delta,$$

et le premier d'entre eux, s_δ, est identique à S_δ.

2° Si l'on désigne par C un entier (algébrique) quelconque au moins égal à δ, le groupe général, S_C, de la suite (2) a pour premiers membres (avec répétitions possibles, mais sans omission) les diverses dérivées principales de cote C; chaque second membre est indépendant de la dérivée principale qui constitue le premier membre correspondant, mais peut contenir, outre les variables $x, y, \ldots$, diverses autres quantités (inconnues ou dérivées) de cote inférieure ou égale à C.

3° Le premier des groupes (2), S_δ, identique, comme nous l'avons dit, à s_δ, se trouve résolu par rapport aux dérivées *principales* de cote δ; chacun des groupes

$$S_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad S_\Delta,$$

composé d'équations en nombre au moins égal à celui des dérivées *principales* de cote égale à son indice, est linéaire par rapport à ces dernières, et les coefficients des dérivées dont il s'agit (coefficients identiques, au signe près, les uns à l'unité, les autres à certaines dérivées partielles du premier ordre des seconds membres de S) dépendent uniquement des variables $x, y, \ldots$, des inconnues $u, v, \ldots$, et des quelques dérivées paramétriques figurant dans les seconds membres de S; enfin, chacun des groupes

$$S_{\Delta+1}, \quad S_{\Delta+2}, \quad \ldots,$$

composé d'équations en nombre au moins égal à celui des dérivées *principales* de cote égale à son indice, est linéaire par rapport aux dérivées, *tant principales que paramétriques*, de même cote, et une remarque toute semblable à la précédente s'applique aux coefficients de ces dérivées.

4° Si du groupe S_C on extrait un groupe partiel composé d'équations en nombre exactement égal à celui des dérivées principales de cote C, ce groupe partiel possède, par rapport aux dérivées princi-

pales de cote C, un déterminant différentiel qui est une fonction des variables x, y, ..., des inconnues u, v, ..., et des quelques dérivées paramétriques figurant dans les seconds membres de S.

5° Enfin, si, des groupes (en nombre limité)

$$S_{\delta},\quad S_{\delta+1},\quad \ldots,\quad S_{C},$$

on extrait respectivement des groupes,

$$(3)\qquad t_{\delta},\quad t_{\delta+1},\quad \ldots,\quad t_{C},$$

composés d'équations en nombres respectivement égaux à ceux des dérivées principales de cotes

$$\delta,\quad \delta+1,\quad \ldots,\quad C,$$

et si, dans chacun des groupes (3), on considère le déterminant différentiel relatif aux dérivées principales de cote égale à son indice, l'ensemble des groupes (3) possède, par rapport à l'ensemble de ces dérivées principales, un déterminant différentiel qui est le produit de tous les précédents (en sorte que sa *non-nullité,* si elle a lieu, entraîne celle de tous les précédents, et réciproquement).

Cela étant, nous adjoindrons aux deux hypothèses A et B, ci-dessus énoncées, l'hypothèse suivante :

C. En imposant éventuellement aux valeurs numériques des quantités qui figurent dans les seconds membres de S telles ou telles restrictions d'inégalité, *on peut, des groupes successifs* (*en nombre illimité*)

$$S_{\delta},\quad S_{\delta+1},\quad \ldots,\quad S_{C},\quad \ldots,$$

extraire respectivement des groupes,

$$(4)\qquad t_{\delta},\quad t_{\delta+1},\quad \ldots,\quad t_{C},\quad \ldots,$$

tels que l'un quelconque d'entre eux, t_{C}, *composé d'équations en nombre exactement égal à celui des dérivées principales de cote* C, *soit résoluble par rapport à elles.* Les groupes partiels (4) sont alors successivement résolubles par rapport aux dérivées principales de cotes

$$\delta,\quad \delta+1,\quad \ldots,\quad C,\quad \ldots,$$

et cela quelles que soient (sauf les restrictions éventuelles *d'inéga-*

lité auxquelles il est fait allusion plus haut) les valeurs numériques attribuées aux variables x, y, ..., aux inconnues u, v, ... et aux dérivées paramétriques.

Cela posé, et *les conditions A, B, C, ci-dessus énoncées, étant supposées satisfaites :*

1° *Le système* S *admet au plus un groupe d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données :* car, en attribuant aux variables indépendantes, aux intégrales hypothétiques, et à leurs dérivées paramétriques de tous ordres, les valeurs initiales choisies, le système illimité (4), extrait de S prolongé, fournit pour chaque dérivée principale une valeur correspondante unique.

2° *Pour que le système* S *soit passif, il faut et il suffit que l'élimination des dérivées principales de cotes*

$$\delta, \quad \delta+1, \quad \ldots, \quad C,$$

effectuée entre les équations

$$S_\delta, \quad S_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad S_C,$$

conduise, quel que soit C, *à des identités* (c'est-à-dire à des relations que vérifient toutes valeurs numériques des quantités x, y, ..., u, v, ... et des dérivées paramétriques, considérées comme autant de variables indépendantes distinctes).

Si l'on considère, en effet, les deux systèmes illimités

$$\begin{array}{lllll} S_\delta, & S_{\delta+1}, & \ldots, & S_C, & \ldots, \\ t_\delta, & t_{\delta+1}, & \ldots, & t_C, & \ldots, \end{array}$$

le second est, en vertu de nos hypothèses, résoluble par rapport aux dérivées principales; il est d'ailleurs conséquence numérique du premier, puisqu'il en fait partie. Pour que, inversement, le premier, c'est-à-dire S prolongé, soit conséquence numérique du second, il faut et il suffit que, pour toutes valeurs numériques attribuées à $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ et aux dérivées paramétriques, les valeurs fournies par le second système pour les dérivées principales vérifient les équations restantes du premier; il est donc nécessaire et suffisant que, dans le système

$$S_\delta, \quad S_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad S_C,$$

où ne figurent, avec $x, y, \ldots$, que des quantités de cote C ou de cote

inférieure, l'élimination spécifiée par notre énoncé conduise, *quel que soit* C, à des identités.

On se rend très bien compte, d'après cela, d'où peut provenir, dans le système proposé S, la non-existence effective des intégrales hypothétiques répondant à des conditions initiales données. Si le système S est passif, elle ne peut provenir, comme nous l'avons déjà vu (n° 101), que de la divergence de quelques-uns de leurs développements, construits *a priori*. Mais, dans le cas contraire, elle peut provenir aussi (et provient, en fait, beaucoup plus souvent) de ce que le système S prolongé, à l'aide duquel on doit déterminer les valeurs initiales des dérivées principales, contient des équations incompatibles : on peut en effet, si S n'est point passif, déduire de S prolongé, par voie d'éliminations, quelque relation *non identique* entre $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ et diverses dérivées paramétriques, et il suffit alors, pour que l'incompatibilité ait lieu, que les valeurs numériques assignées à ces dernières quantités dans l'ensemble des conditions initiales ne vérifient pas la relation considérée.

3° *Pour que le système* S *soit complètement intégrable* (n° 101), *il faut et il suffit, en premier lieu, qu'il soit passif, et, en second lieu, que les développements* (*construits* a priori) *des intégrales hypothétiques qui répondent à des conditions initiales arbitraires admettent toujours quelque domaine de convergence.*

Cette double condition, suffisante, en vertu du n° 101, pour l'intégrabilité complète du système S, est de plus nécessaire.

Si l'on suppose, en effet, que le système S admette un groupe d'intégrales effectives répondant à des déterminations initiales (convergentes) arbitrairement choisies, il admet, en particulier, un groupe d'intégrales tel, que, pour des valeurs arbitrairement choisies des variables, les inconnues et leurs dérivées paramétriques de cote inférieure ou égale à un entier algébrique donné C prennent des valeurs arbitrairement choisies, tandis que les dérivées paramétriques restantes prennent toutes la valeur zéro. Il en résulte que le système

$$S_{\delta}, \quad S_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad S_{C},$$

où ne figurent, avec $x, y, \ldots$, que des quantités de cote inférieure ou égale à C, admet, au point de vue numérique, une solution générale où $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ et les dérivées paramétriques de cote inférieure ou égale à C ont des valeurs arbitraires; l'élimination ci-dessus

indiquée (2°) conduit donc forcément à des identités, d'où l'on conclut, puisque C est quelconque, que le système S est passif.

Cela étant, puisque à des déterminations initiales convergentes correspondent toujours, par hypothèse, des intégrales effectives, les portions restantes des développements seront elles-mêmes toujours convergentes.

Définition des systèmes orthonomes.

104. Soient, comme au n° 102,

$$x, \quad y, \quad \ldots,$$
$$u, \quad v, \quad \ldots$$

des notations (en nombre limité) désignant, les premières diverses variables indépendantes, les dernières diverses fonctions inconnues de ces variables. A chacune de ces quantités attribuons p cotes successives arbitrairement choisies ($p \geqq 1$). Désignons enfin par δ, δ' deux quantités appartenant à l'ensemble que forment les fonctions u, v, ... et leurs dérivées de tous ordres, par

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_p,$$
$$c'_1, \quad c'_2, \quad \ldots, \quad c'_p$$

les cotes respectives de ces deux quantités, et convenons de dire que δ' est *normale* ou *anormale* par rapport à δ, suivant que les différences successives

$$c_1 - c'_1, \quad c_2 - c'_2, \quad \ldots, \quad c_p - c'_p$$

satisfont ou non à la double condition : 1° que ces différences ne soient pas toutes nulles ; 2° que la première d'entre elles non égale à zéro soit positive.

Considérons maintenant un système différentiel impliquant les fonctions inconnues u, v, ... des variables indépendantes x, y, ..., et possédant, comme dans l'hypothèse A du n° 103, la double propriété : 1° *d'être résolu par rapport à diverses dérivées de ces inconnues ;* 2° *de ne contenir dans ses seconds membres aucune dérivée principale*. Puis, à chacune des quantités x, y, ..., u, v, ..., attribuons, conformément aux indications qui précèdent, p cotes successives, sous la seule condition *que les cotes premières de toutes les varia-*

bles indépendantes aient pour valeur commune l'unité. Cela étant, le système considéré sera dit *orthonome,* si, moyennant un choix convenable de l'entier p et des cotes que l'on a commencé par attribuer aux variables et aux inconnues, chaque second membre ne contient *effectivement,* outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées) qui soient normales par rapport au premier membre correspondant [1].

---

[1] La définition que nous avions donnée tout d'abord des systèmes orthonomes, dans le Mémoire intitulé : *Sur une question fondamentale du Calcul intégral* (*Acta mathematica*, t. XXIII, p. 259), supposait égales à *un même entier positif quelconque* les cotes premières de toutes les variables indépendantes : mais on peut, sans restreindre la généralité de cette définition, supposer que *l'entier positif dont il s'agit est égal à* 1.

Effectivement, soient :

$x, y, \ldots$ les variables indépendantes;
$u, v, \ldots$ les fonctions inconnues;
c' la cote première (positive) commune à toutes les variables $x, y, \ldots$, et $c'_u, c'_v, \ldots$ les cotes premières respectives des inconnues $u, v, \ldots$;
$c''_x, c''_y, \ldots, c''_u, c''_v, \ldots$ les cotes secondes respectives de $x, y, \ldots, u, v, \ldots$;
. . . . ;
$c^{(p)}_x, c^{(p)}_y, \ldots, c^{(p)}_u, c^{(p)}_v, \ldots$ les cotes $p^{\text{ièmes}}$ respectives des mêmes quantités.

Cela posé, nous attribuerons, comme il suit, à chacune des quantités $x, y, \ldots, u, v, \ldots$, une cote supplémentaire que nous considérerons comme *antérieure* à celles que possède déjà cette quantité : nous affecterons d'abord $x, y, \ldots$ des cotes respectives 1, 1, ...; désignant ensuite par c_u le plus grand entier algébrique qui ne surpasse pas $\frac{c'_u}{c'}$, par c_v le plus grand entier algébrique qui ne surpasse pas $\frac{c'_v}{c'}$, etc., nous affecterons les inconnues $u, v, \ldots$ des cotes respectives $c_u, c_v, \ldots$. Les entiers c', $c'_u, c'_v, \ldots, c_u, c_v, \ldots$ satisfont évidemment aux relations

$$0 \leqq \frac{c'_u}{c'} - c_u < 1, \qquad 0 \leqq \frac{c'_v}{c'} - c_v < 1, \qquad \ldots.$$

Pour plus de netteté, nous réunirons dans le Tableau suivant les $p+1$ cotes successives qui se trouvent actuellement attribuées à chacune des quantités $x, y, \ldots, u, v, \ldots$:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 1, & \ldots, & c_u, & c_v, & \ldots, \\ c', & c', & \ldots, & c'_u, & c'_v, & \ldots, \\ c''_x, & c''_y, & \ldots, & c''_u, & c''_v, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ c^{(p)}_x, & c^{(p)}_y, & \ldots, & c^{(p)}_u, & c^{(p)}_v, & \ldots. \end{array}$$

En supprimant de ce Tableau la première ligne,

$$1, \quad 1, \quad \ldots, \quad c_u, \quad c_v, \quad \ldots,$$

on retombe, naturellement, sur l'ancien système de cotes.

Cela étant, il suffit, pour établir le point que nous avons en vue, de considérer

105. *Exemples* — I. Considérant d'abord une fonction inconnue, u, des variables indépendantes $x, y, \ldots, s, t$, nous rangerons comme il suit, sur une ligne indéfinie allant de droite à gauche, les dérivées de tous ordres de cette fonction. A l'extrême droite de la ligne nous

---

deux quantités quelconques appartenant l'une et l'autre à l'ensemble que forment les fonctions $u, v, \ldots$ et leurs dérivées de tous ordres, et de faire voir que si la seconde est, dans l'ancien système de cotes, *normale* vis-à-vis de la première, elle jouit de la même propriété dans le nouveau.

Désignons à cet effet par w_1 et w_2 deux quantités, distinctes ou non, prises dans le groupe $u, v, \ldots$. et soient

$$(1') \qquad \frac{\partial^{\alpha_1+\beta_1+\ldots} w_1}{\partial x^{\alpha_1}\,\partial y^{\beta_1}\ldots},$$

$$(2') \qquad \frac{\partial^{\alpha_2+\beta_2+\ldots} w_2}{\partial x^{\alpha_2}\,\partial y^{\beta_2}\ldots}$$

deux dérivées (d'ordre positif ou nul) de ces quantités respectives. Je dis tout d'abord qu'en supposant vérifiée la relation

$$(3') \qquad [c'_{w_1} + (\alpha_1+\beta_1+\ldots)c'] - [c'_{w_2} + (\alpha_2+\beta_2+\ldots)c'] \geqq 0,$$

on a nécessairement aussi

$$(4') \qquad (c_{w_1}+\alpha_1+\beta_1+\ldots) - (c_{w_2}+\alpha_2+\beta_2+\ldots) \geqq 0.$$

Effectivement, la relation (3′) peut s'écrire

$$\left(\frac{c'_{w_1}}{c'}+\alpha_1+\beta_1+\ldots\right) - \left(\frac{c'_{w_2}}{c'}+\alpha_2+\beta_2+\ldots\right) \geqq 0$$

ou

$$(c_{w_1}+\alpha_1+\beta_1+\ldots) - (c_{w_2}+\alpha_2+\beta_2+\ldots) \geqq \left(\frac{c'_{w_2}}{c'} - c_{w_2}\right) - \left(\frac{c'_{w_1}}{c'} - c_{w_1}\right).$$

Or, chacune des parenthèses figurant au second membre de cette dernière relation est une quantité non négative et moindre que 1; leur différence est donc algébriquement supérieure à -1, et à plus forte raison le premier membre; finalement, ce premier membre, étant un entier, ne peut être que supérieur ou égal à zéro, ce qu'exprime justement la relation (4′).

Cela étant, supposons que, dans l'ancien système de cotes, la quantité (2′) soit normale vis-à-vis de la quantité (1′), ou, en d'autres termes, que les différences

$$(5') \qquad \left\{\begin{array}{l} [c'_{w_1} + (\alpha_1+\beta_1+\ldots)c'] \quad - [c'_{w_2} + (\alpha_2+\beta_2+\ldots)c'], \\ [c''_{w_1} + \alpha_1 c''_x + \beta_1 c''_y + \ldots] - [c''_{w_2} + \alpha_2 c''_x + \beta_2 c''_y + \ldots], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \left[c^{(p)}_{w_1} + \alpha_1 c^{(p)}_x + \beta_1 c^{(p)}_y + \ldots\right] - \left[c^{(p)}_{w_2} + \alpha_2 c^{(p)}_x + \beta_2 c^{(p)}_y + \ldots\right] \end{array}\right.$$

ne soient pas toutes nulles, et que la première d'entre elles qui ne s'évanouit pas soit positive. La relation (3′) se trouve alors nécessairement vérifiée, et par suite

placerons le groupe des dérivées premières, puis à gauche de celui-ci le groupe des dérivées secondes, puis à gauche de ce dernier le groupe des dérivées troisièmes, et ainsi de suite indéfiniment. Adoptant ensuite pour les variables indépendantes un ordre quelconque, par exemple

$$x,\ y,\ \ldots,\ s,\ t,$$

et désignant par

$$\alpha,\ \beta,\ \ldots,\ \lambda,\ \mu$$

les ordres partiels d'une dérivée quelconque de u par rapport à ces variables respectives, nous partagerons chacun des groupes précédents en sous-groupes, qui se succéderont de gauche à droite suivant les valeurs décroissantes de l'ordre partiel α; puis, chacun des sous-groupes ainsi obtenus en nouveaux sous-groupes, qui se succéderont de gauche à droite suivant les valeurs décroissantes de l'ordre partiel β; et ainsi de suite jusqu'à l'ordre partiel λ (inclusivement). Chacun des groupes définitifs se compose alors d'une dérivée unique, et les dérivées de tous ordres de u se trouvent rangées, sur la ligne indéfinie, dans un ordre bien déterminé. Cela étant, nous dirons qu'une dérivée quelconque de u est *antérieure* ou *postérieure* à une autre, selon que, dans la suite obtenue, elle figure à gauche ou à droite de cette autre. Si donc on désigne par

$$\alpha',\ \beta',\ \ldots,\ \lambda',\ \mu'$$

et

$$\alpha'',\ \beta'',\ \ldots,\ \lambda'',\ \mu''$$

les ordres partiels relatifs à $x, y, \ldots, s, t$ de deux dérivées de u, et qu'on pose

$$\alpha' + \beta' + \ldots + \lambda' + \mu' = k',$$
$$\alpha'' + \beta'' + \ldots + \lambda'' + \mu'' = k'',$$

les conditions nécessaires et suffisantes pour que la première dérivée

---

aussi la relation (4'); il est aisé d'en conclure que si, en tête de différences (5'), on écrit la différence

$$(c_{w_1} + \alpha_1 + \beta_1 + \ldots) - (c_{w_2} + \alpha_2 + \beta_2 + \ldots),$$

la suite ainsi obtenue jouira, elle aussi, de la propriété que nous avons, par hypothèse, attribuée à la suite (5'). En d'autres termes, la quantité (2) sera, dans le nouveau système de cotes, normale vis-à-vis de la quantité (1'), ce qu'il s'agissait d'établir.

soit antérieure à la seconde sont : 1° que les différences

$$k'-k'',\quad \alpha'-\alpha'',\quad \beta'-\beta'',\quad \dots,\quad \lambda'-\lambda''$$

ne soient pas toutes nulles; 2° que la première non égale à zéro soit positive.

Considérons maintenant un système différentiel impliquant les m fonctions inconnues

$$u_1,\quad u_2,\quad \dots,\quad u_m$$

des h variables indépendantes

$$x,\quad y,\quad \dots,\quad s,\quad t,$$

et résolu par rapport aux m dérivées

$$(1)\qquad \frac{\partial^{k_1} u_1}{\partial x^{\alpha_1}\,\partial y^{\beta_1}\dots\partial s^{\lambda_1}\,\partial t^{\mu_1}},\quad \frac{\partial^{k_2} u_2}{\partial x^{\alpha_2}\,\partial y^{\beta_2}\dots\partial s^{\lambda_2}\,\partial t^{\mu_2}},\quad \dots,\quad \frac{\partial^{k_m} u_m}{\partial x^{\alpha_m}\,\partial y^{\beta_m}\dots\partial s^{\lambda_m}\,\partial t^{\mu_m}},$$

où

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \beta_1 + \dots + \lambda_1 + \mu_1 &= k_1,\\
\alpha_2 + \beta_2 + \dots + \lambda_2 + \mu_2 &= k_2,\\
\dots\dots\dots\dots&\dots\dots,\\
\alpha_m + \beta_m + \dots + \lambda_m + \mu_m &= k_m;
\end{aligned}$$

supposons en outre que les seconds membres du système ne renferment, outre les h variables indépendantes, que les m fonctions inconnues u_1, u_2, …, u_m, et celles d'entre leurs dérivées qui sont respectivement postérieures aux m dérivées (1). Cela étant, il est aisé de reconnaître que notre système satisfait de tous points à la définition de l'orthonomie.

En premier lieu, les seconds membres y sont manifestement indépendants de toute dérivée principale.

D'un autre côté, attribuons aux variables et aux inconnues les cotes suivantes :

	x,	y,	…,	s,	t	u_1,	u_2,	…,	u_m
Cote 1re…..	1,	1,	…,	1,	1	$-k_1$,	$-k_2$,	…,	$-k_m$
Cote 2e…..	1,	0,	…,	0,	0	$-\alpha_1$,	$-\alpha_2$,	…,	$-\alpha_m$
Cote 3e…..	0,	1,	…,	0,	0	$-\beta_1$,	$-\beta_2$,	…,	$-\beta_m$
…………	.,	.,	…,	.,	.	…..,	…..,	…,	…..
Cote $h^{\text{ième}}$…	0,	0,	…,	1,	0	$-\lambda_1$,	$-\lambda_2$,	…,	$-\lambda_m$

En désignant par i un entier quelconque de la suite 1, 2, …, m,

l'équation qui a pour premier membre

$$\frac{\partial^{k_i} u_i}{\partial x^{\alpha_i} \partial y^{\beta_i} \ldots \partial s^{\lambda_i} \partial t^{\mu_i}} \tag{2}$$

ne peut, d'après les conditions imposées à notre système, contenir dans son second membre (outre les variables indépendantes) que

$$u_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

et les diverses dérivées de u_j postérieures à la dérivée

$$\frac{\partial^{k_j} u_j}{\partial x^{\alpha_j} \partial y^{\beta_j} \ldots \partial s^{\lambda_j} \partial t^{\mu_j}}. \tag{3}$$

Or, les h cotes du premier membre (2) sont toutes nulles, celles de la fonction u_j sont respectivement égales à

$$-k_j, \quad -\alpha_j, \quad -\beta_j, \quad \ldots, \quad -\lambda_j, \tag{4}$$

et celles de la dérivée

$$\frac{\partial^{k} u_j}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \ldots \partial s^{\lambda} \partial t^{\mu}} \tag{5}$$
$$(\alpha + \beta + \ldots + \lambda + \mu = k)$$

à

$$k - k_j, \quad \alpha - \alpha_j, \quad \beta - \beta_j, \quad \ldots, \quad \lambda - \lambda_j. \tag{6}$$

En comparant alors successivement, comme on doit le faire d'après la définition de l'orthonomie, les nombres (4), puis les nombres (6), aux h cotes toutes nulles de la dérivée (2), on trouve, pour les différences à former, les valeurs

$$k_j, \quad \alpha_j, \quad \beta_j, \quad \ldots, \quad \lambda_j \tag{7}$$

et

$$k_j - k, \quad \alpha_j - \alpha, \quad \beta_j - \beta, \quad \ldots, \quad \lambda_j - \lambda. \tag{8}$$

Le premier des nombres (7), k_j, est essentiellement positif; si l'on suppose d'ailleurs la dérivée (5) postérieure à la dérivée (3), les différences (8), d'après ce qui a été dit au début, ne sont pas toutes nulles, et la première qui ne s'évanouit pas est positive. L'inconnue u_j et ses diverses dérivées postérieures à la dérivée (3) sont donc normales par rapport à la dérivée (2), ce qui entraîne la nature orthonome du système.

II. Dans le Mémoire cité au début du présent Ouvrage ([1]), M[me] de Kowalevsky considère un système partiel composé d'équations en nombre égal à celui des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et tel, qu'en désignant par

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_m$$

les inconnues dont il s'agit, et par

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_m$$

les ordres respectifs du système par rapport à elles, ce dernier soit résoluble par rapport aux dérivées

$$\frac{\partial^{k_1} u_1}{\partial x^{k_1}}, \quad \frac{\partial^{k_2} u_2}{\partial x^{k_2}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{k_m} u_m}{\partial x^{k_m}},$$

toutes relatives à une même variable x. Or, il est aisé de voir que, cette résolution une fois effectuée, le système résultant satisfait à la définition de l'orthonomie : il suffit, pour s'en convaincre, de faire, dans l'exemple précédent, les hypothèses particulières

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = k_1, & \beta_1 = \ldots = \lambda_1 = \mu_1 = 0, \\ \alpha_2 = k_2, & \beta_2 = \ldots = \lambda_2 = \mu_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_m = k_m, & \beta_m = \ldots = \lambda_m = \mu_m = 0. \end{array}$$

Nous rencontrerons, dans la suite, maint exemple de système orthonome.

106 ([2]). *Si, dans un système différentiel résolu par rapport à diverses dérivées des inconnues, on attribue* (comme au n° 104)

([1]) *Voir* la Préface.

([2]) Une partie des conclusions auxquelles conduit l'étude des systèmes orthonomes s'applique, avec quelques modifications, aux systèmes que j'ai nommés *orthoïques* [*Sur une question fondamentale du Calcul intégral* (*Acta mathematica,* t. XXIII, p. 231 et suiv.)], c'est-à-dire à ceux où les cotes premières des diverses variables indépendantes, au lieu d'être toutes égales à 1, sont respectivement égales à divers entiers positifs : si ces derniers sont égaux entre eux, on retombe, comme nous l'avons fait observer plus haut (*voir* la note du n° 104), sur les systèmes orthonomes, objet du présent Chapitre; s'ils sont inégaux, la passivité du système s'exprime encore à l'aide d'un nombre fini de relations qui doivent être identiquement vérifiées, et les développements des intégrales hypothétiques répondant à des conditions initiales données peuvent encore être construits *a priori,* mais *la convergence de ces développements cesse d'être assurée.*

p cotes successives à chacune des variables et des inconnues, sous la seule condition que les cotes premières des variables indépendantes aient pour valeur commune l'unité, l'ensemble illimité que forment les dérivées principales des inconnues se partage, d'après une loi déterminée, en ensembles limités successifs satisfaisant à la condition suivante :

Si l'on désigne par δ, δ' deux dérivées principales quelconques, la dérivée δ' est normale ou anormale vis-à-vis de δ, suivant que l'ensemble partiel où figure δ' précède ou non celui où figure δ.

C'est ce qui a lieu, notamment, dans un système orthonome.

On partagera d'abord les dérivées principales des inconnues en ensembles successifs d'après leurs cotes premières croissantes (ces ensembles seront nécessairement limités, ainsi qu'il résulte d'une observation faite au n° 102); chaque ensemble ainsi obtenu sera, toutes les fois qu'il y aura lieu, partagé en ensembles partiels successifs d'après les cotes secondes croissantes des dérivées qui le composent; puis, chacun des ensembles résultants en ensembles partiels successifs d'après les cotes troisièmes croissantes de ses termes; et ainsi jusqu'à épuisement des p cotes. L'ensemble illimité formé par les dérivées principales se trouvera finalement partagé en ensembles limités se succédant suivant une certaine loi, et l'on voit immédiatement que, par rapport à une dérivée quelconque figurant dans l'ensemble partiel de rang N, les dérivées figurant dans les ensembles partiels de rangs $1, 2, \ldots, N-1$ sont toutes normales, tandis que les dérivées figurant dans les ensembles partiels de rangs $N, N+1, \ldots$ sont toutes anormales. C'est ce qu'il s'agissait de prouver.

Si maintenant on convient de dire qu'une dérivée principale est de *classe* 1, 2, 3, ... suivant qu'elle appartient au premier, au second, au troisième, ... des ensembles successifs formés ci-dessus, notre théorème peut encore s'exprimer en disant que *toute dérivée principale est normale ou anormale relativement à une autre suivant qu'elle est ou non de classe inférieure à cette autre.*

On observera que *toute dérivée d'une dérivée principale est de classe supérieure à cette dernière :* car, la cote première de toute variable indépendante étant égale à 1, toute différentiation exécutée sur quelqu'une des fonctions inconnues ou de leurs dérivées a pour effet d'augmenter la cote première.

107. Un système *orthonome* étant donné, parmi les relations, en nombre infini, qu'on en peut déduire à l'aide de différentiations et d'éliminations (n° 98), nous distinguerons spécialement celles qui, ayant pour premier membre une dérivée de quelque fonction inconnue, ne contiennent dans leur second membre aucune quantité (inconnue ou dérivée) anormale relativement au premier; et nous dirons, pour abréger, qu'une semblable relation est *normale*, comme aussi l'expression fournie par elle pour la dérivée qui figure dans son premier membre.

Cette définition posée, nous établirons ce qui suit :

Si sur une relation normale on exécute des différentiations quelconques, en remplaçant, avant ou après quelques-unes de ces différentiations, telles ou telles des dérivées qui figurent dans le second membre par des expressions normales des dérivées en question, on tombe encore sur une relation normale.

I. *Suivant que la quantité* δ' *est normale ou anormale vis-à-vis de la quantité* δ (n° 104), *la dérivée* $\frac{\partial^{a+b+\cdots}\delta'}{\partial x^a\,\partial y^b\ldots}$ *possède l'une ou l'autre propriété vis-à-vis de la dérivée* $\frac{\partial^{a+b+\cdots}\delta}{\partial x^a\,\partial y^b\ldots}$.

Car, en désignant par

$$\begin{array}{llll} c_1, & c_2, & \ldots, & c_p, \\ c'_1, & c'_2, & \ldots, & c'_p, \\ g_1, & g_2, & \ldots, & g_p, \\ h_1, & h_2, & \ldots, & h_p, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}$$

les cotes respectives de δ, δ', x, y, ..., les différences

$$c_1 - c'_1,\quad c_2 - c'_2,\quad \ldots,\quad c_p - c'_p$$

sont respectivement égales aux différences

$$\begin{array}{l} (c_1 + ag_1 + bh_1 + \ldots) - (c'_1 + ag_1 + bh_1 + \ldots), \\ (c_2 + ag_2 + bh_2 + \ldots) - (c'_2 + ag_2 + bh_2 + \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (c_p + ag_p + bh_p + \ldots) - (c'_p + ag_p + bh_p + \ldots) \quad [1]. \end{array}$$

[1] La démonstration de l'alinéa I ne nécessite aucune hypothèse spéciale sur les cotes premières des variables indépendantes.

II. *Si la quantité δ'' est normale vis-à-vis de la quantité δ', et celle-ci normale vis-à-vis de la quantité δ, la première, δ'', jouit de la même propriété vis-à-vis de la dernière, δ.*

Si l'on désigne, en effet, par

$$\begin{matrix} c_1, & c_2, & \ldots, & c_p, \\ c'_1, & c'_2, & \ldots, & c'_p, \\ c''_1, & c''_2, & \ldots, & c''_p \end{matrix}$$

les cotes respectives de δ, δ', δ'', et si l'on considère les différences

$$\begin{matrix} c_1 - c'_1, & c_2 - c'_2, & \ldots, & c_p - c'_p, \\ c'_1 - c''_1, & c'_2 - c''_2, & \ldots, & c'_p - c''_p, \\ c_1 - c''_1, & c_2 - c''_2, & \ldots, & c_p - c''_p, \end{matrix}$$

rangées, comme nous venons de les écrire, en un Tableau rectangulaire, il résulte de nos hypothèses que, dans chacune des deux premières lignes horizontales du Tableau, les différences ne sont pas toutes nulles, et que la première non égale à zéro y est positive; comme d'ailleurs la dernière différence de chaque colonne verticale est égale à la somme des deux différences placées au-dessus d'elle, la dernière ligne horizontale jouit évidemment de la même propriété que les deux premières ([1]).

III. *Si sur une relation normale on exécute des différentiations quelconques, on tombe sur une relation de même nature.*

Soit en effet

$$(9) \qquad \delta = f(x, y, \ldots, \delta', \ldots)$$

une relation normale, dans laquelle δ', ... désignent, conformément à nos définitions, des quantités toutes normales par rapport à δ. La relation déduite de (9) par une différentiation relative à x a pour premier membre $\frac{\partial \delta}{\partial x}$, et son second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que les quantités δ', ... et leurs dérivées premières par rapport à x. Or, les quantités δ', ... étant normales vis-à-vis de δ, les quantités $\frac{\partial \delta'}{\partial x}$, ... jouissent de la même propriété

([1]) Même observation que pour l'alinéa I.

vis-à-vis de $\frac{\partial\delta}{\partial x}$ (I); d'un autre côté, si l'on désigne par c_1, c'_1, ..., g_1 les cotes premières respectives de δ, δ', ..., x, cette même hypothèse entraîne, entre les cotes premières de δ et δ', la relation

$$c_1 - c'_1 \geqq 0,$$

d'où l'on déduit, à cause de $g_1 > 0$,

$$(c_1 + g_1) - c'_1 > 0,$$

et, dès lors, la quantité δ' est normale vis-à-vis de $\frac{\partial\delta}{\partial x}$.

Ainsi, la condition formulée dans la définition d'une relation normale ne cesse pas d'être satisfaite après une première différentiation exécutée sur la relation donnée. En vertu du même raisonnement, appliqué à la relation résultante, elle ne cesse pas de l'être après une deuxième, et ainsi de suite quel que soit le nombre des différentiations ([1]).

IV. *Si, dans le second membre d'une relation normale, on remplace telles ou telles dérivées par certaines de leurs expressions normales, on tombe encore sur une relation normale.*

Désignons par δ le premier membre de la relation donnée, et par δ' l'une des dérivées figurant au second membre; puis, considérant une expression normale de δ', nommons δ'' l'une des inconnues ou dérivées qui y figurent. La quantité δ'' étant normale vis-à-vis de δ', et δ' normale vis-à-vis de δ, la quantité δ'' jouit de la même propriété vis-à-vis de δ (II) : en conséquence, les substitutions opérées dans le second membre de la relation donnée ne peuvent altérer la nature normale de cette dernière ([2]).

V. Le simple rapprochement des alinéas III et IV prouve dans toute sa généralité l'exactitude de notre énoncé.

108. *Tout système orthonome satisfait aux trois conditions A, B, C du n° 103.*

([1]) La démonstration de l'alinéa III suppose simplement que les cotes premières des diverses variables indépendantes sont toutes positives.

([2]) Même observation que pour les alinéas I et II.

Effectivement :

1° Un système orthonome se trouve, comme le spécifie notre définition du n° 104, résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et les seconds membres y sont indépendants de toute dérivée principale, ce qui est l'énoncé même de la condition A.

2° Dans un système orthonome, les cotes premières des variables indépendantes ont pour valeur commune l'unité; chaque second membre ne contient d'ailleurs, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées) qui soient normales par rapport au premier membre correspondant; enfin, toute quantité normale par rapport à un premier membre possède une cote première au plus égale à celle de ce premier membre. La condition B se trouve donc satisfaite moyennant l'attribution aux variables et aux inconnues de leurs cotes premières respectives.

3° Étant donné un système orthonome, chacune des relations qui le composent est, par hypothèse, normale; et, en vertu du n° 107, toute relation appartenant au système prolongé (n° 99) jouit de cette même propriété. Nous avons constaté, d'autre part (n° 106), que toute dérivée principale est normale ou anormale relativement à une autre dérivée principale, suivant qu'elle est ou non de classe inférieure à cette autre : il suit de là qu'une relation quelconque du système prolongé ne contient dans son second membre d'autres dérivées principales que celles de classe inférieure à son premier membre. Cela étant, partageons les relations du système prolongé en groupes successifs d'après les cotes premières croissantes de leurs premiers membres, et soient δ la cote première minima des premiers membres du système,

$$S_\delta, \quad S_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad S_C, \quad \ldots$$

les groupes successifs dont il s'agit; partageons ensuite ces derniers (comme au n° 106) en sous-groupes successifs d'après les classes croissantes des premiers membres, et soient θ_C, θ_C+1, ..., Θ_C les classes croissantes des sous-groupes provenant de S_C. Extrayons enfin, du sous-groupe correspondant à une classe quelconque, un sous-groupe partiel ayant pour premiers membres, *sans omission ni répétition,* les dérivées principales de même classe, et soient

(10) $$\tau_{\theta_C}, \quad \tau_{\theta_C+1}, \quad \ldots, \quad \tau_{\Theta_C}$$

les sous-groupes partiels correspondant respectivement aux classes

$$\theta_C, \quad \theta_C + 1, \quad \ldots, \quad \Theta_C.$$

Chacun des groupes (10), ne contenant dans ses seconds membres, ainsi qu'il a été dit, d'autres dérivées principales que celles de classe inférieure à ses premiers membres, se trouvera, en fait, résolu par rapport aux dérivées principales de classe égale, et les groupes (10) seront, dès lors, successivement résolubles par rapport aux dérivées principales de classes

$$\theta_C, \quad \theta_C + 1, \quad \ldots, \quad \Theta_C.$$

On pourra donc, du groupe S_C, extraire un groupe, t_C, composé d'équations en nombre exactement égal à celui des dérivées principales de cote première C, et résoluble par rapport à elles. La condition *C* du n° 103 se trouve ainsi satisfaite.

Pour qu'un système orthonome soit complètement intégrable, il est donc nécessaire et suffisant (n° 103), en premier lieu, qu'il soit passif, et, en second lieu, que les développements (construits *a priori*) des intégrales hypothétiques qui répondent à des conditions initiales arbitraires admettent toujours quelque domaine de convergence.

Nous nous occuperons tout d'abord de la passivité. Dans le cas où deux premiers membres au moins sont des dérivées d'une même inconnue, il semble, d'après ce qui a été dit plus haut (n° 103), qu'on ne puisse en général exprimer la passivité qu'à l'aide d'un nombre infini de relations dont chacune doit être identiquement vérifiée : ces identités toutefois, ainsi que nous allons l'établir, résultent, à titre de conséquences nécessaires, d'un nombre essentiellement limité d'entre elles.

Règle provisoire de passivité d'un système orthonome.

109. Étant donné un système orthonome, nous qualifierons, pour abréger, de *primitives*, par opposition à d'autres qui vont être formées dans un instant, les diverses relations du système prolongé, comme aussi les expressions fournies par elles pour les dérivées principales. Un mécanisme très simple, appliqué à ces relations primitives,

permet, comme nous allons le voir, d'en déduire, pour les dérivées principales des classes successives, certaines expressions dépendant exclusivement des variables, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques.

Les relations primitives étant partagées en groupes successifs d'après les classes croissantes 1, 2, 3, ... de leurs premiers membres, désignons par $\mathfrak{P}_1$ ou par $\mathfrak{U}_1$ indifféremment le premier de ces groupes, par $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, ... les groupes suivants. Une dérivée principale de première classe ne peut évidemment se déduire par dérivation d'aucun premier membre du système, car elle serait alors de classe supérieure à ce premier membre (n° 106), par suite, de classe supérieure à la classe minima, qui est 1 : il en résulte que les expressions primitives des dérivées dont il s'agit sont toutes fournies par des équations du système donné, ou, en d'autres termes, que $\mathfrak{P}_1$ fait partie du système donné (non prolongé), et, comme ce dernier a par hypothèse ses premiers membres tous distincts, il en est de même de $\mathfrak{P}_1$. Mais, si l'on considère les groupes suivants, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, ..., ils *peuvent*, et c'est ce qui a lieu fréquemment, présenter plusieurs fois un même premier membre.

Cela étant, remplaçons dans les relations $\mathfrak{P}_2$ chacune des dérivées principales de première classe par son expression (unique) tirée de $\mathfrak{U}_1$: comme une semblable expression dépend exclusivement des variables, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques, le groupe des relations résultantes, $\mathfrak{U}_2$, fournira, pour les dérivées principales de seconde classe, des expressions jouissant de la même propriété. Considérons ensuite les relations $\mathfrak{P}_3$, et éliminons-en de toutes les manières possibles, à l'aide de $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, les dérivées principales des deux premières classes ; autrement dit, extrayons du groupe $[\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2]$ un groupe partiel fournissant une expression et une seule pour chacune des dérivées principales des deux premières classes, éliminons ces dernières entre $\mathfrak{P}_3$ et les relations ainsi obtenues, et répétons l'opération en remplaçant successivement le groupe partiel considéré par tous les groupes analogues semblablement extraits de $[\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2]$. Il est clair que le groupe des relations résultantes, $\mathfrak{U}_3$, fournira, pour les dérivées principales de troisième classe, des expressions ne dépendant, comme les seconds membres de $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$, que des variables, des fonctions inconnues et de leurs dérivées paramétriques. L'élimination des dérivées principales des trois premières

classes, effectuée dans $\mathfrak{P}_4$ de toutes les manières possibles à l'aide de $[\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3]$, conduira de même à un groupe $\mathfrak{U}_4$ fournissant, pour les dérivées principales de quatrième classe, des expressions exclusivement composées avec les quantités dont il s'agit. Et ainsi de suite indéfiniment.

Nous nommerons *ultimes* les relations

$$\mathfrak{U}_1, \quad \mathfrak{U}_2, \quad \mathfrak{U}_3, \quad \ldots$$

obtenues à l'aide du mécanisme que nous venons de décrire, et aussi les expressions qu'elles fournissent pour les dérivées principales des classes 1, 2, 3, ...

D'après ce qui précède, et en considérant comme autant de variables indépendantes distinctes $x, y, \ldots, u, v, \ldots$ et les dérivées de tous ordres de $u, v, \ldots$, *l'ensemble des relations primitives de classes* $1, 2, \ldots, j$ *entraîne* comme conséquence nécessaire, quel que soit j, *l'ensemble des relations ultimes de mêmes classes. Réciproquement* d'ailleurs, il est facile de voir que *ces dernières entraînent les premières*. Les deux systèmes sont ainsi *numériquement équivalents* (n° 100).

Enfin, notre proposition du n° 107, d'où nous avons déjà déduit la nature normale des relations primitives (n° 108), entraîne aussi, de proche en proche, celle des relations ultimes appartenant aux groupes successifs

$$\mathfrak{U}_1, \quad \mathfrak{U}_2, \quad \mathfrak{U}_3, \quad \ldots.$$

110. Si l'on considère un système différentiel quelconque, possédant la double propriété d'être résolu par rapport à diverses dérivées des inconnues qui s'y trouvent engagées et de ne contenir dans ses seconds membres aucune dérivée principale, il faut et il suffit (n° 101), pour que ce système soit passif, que la solution numérique générale du système prolongé soit fournie par un groupe de formules où les variables, les inconnues et leurs dérivées paramétriques de tous ordres reçoivent des valeurs *arbitraires,* tandis que les dérivées principales se trouvent déterminées sans ambiguïté en fonctions de ces dernières quantités. Dans le cas particulier de l'orthonomie, le système prolongé équivaut numériquement, d'après ce qui vient d'être dit (n° 109), au groupe des relations ultimes, lesquelles ont pour premiers membres (avec répétitions possibles, mais sans omis-

sion) les diverses dérivées principales, tandis que leurs seconds membres ne contiennent aucune dérivée de cette espèce. Pour qu'un système orthonome soit passif, il est donc nécessaire et suffisant que les diverses expressions ultimes de chaque dérivée principale soient *identiquement* égales entre elles.

Cela étant, partageons en groupes les équations d'un système orthonome (non prolongé), suivant celle d'entre les fonctions inconnues u, v, ... dont quelque dérivée figure dans leurs premiers membres. *Si chacun des groupes ainsi formés ne contient qu'une équation au plus,* chaque dérivée principale ne possède qu'une seule expression primitive, par suite aussi qu'une seule expression ultime, et *la passivité a lieu d'elle-même :* c'est ce qui a lieu, par exemple, dans les systèmes considérés au n° 105. Il nous reste à examiner le cas, beaucoup plus complexe, où quelqu'un des groupes formés ci-dessus contiendrait plus d'une équation.

111. *Considérons un système orthonome où deux premiers membres au moins soient des dérivées d'une même inconnue, et désignons par* J *la classe maxima des dérivées cardinales* (n° 106) (n° 92). *Pour qu'un pareil système soit passif, ou, ce qui revient au même* (n° 110), *pour que les diverses expressions ultimes de chaque dérivée principale soient identiquement égales entre elles, il suffit que cela ait lieu pour chaque dérivée principale des classes* 1, 2, ..., J.

I. Des relations ultimes on peut, par un mécanisme analogue à celui qui nous les a fournies, déduire des relations nouvelles.

Différentions un nombre quelconque de fois une relation ultime; puis, après la dernière différentiation, remplaçons les diverses dérivées principales contenues dans le second membre par telles ou telles de leurs expressions ultimes. Dans le premier membre de la relation résultante figure évidemment une dérivée principale, qui se trouve alors exprimée *directement* (c'est-à-dire sans l'intermédiaire d'aucune autre dérivée principale) à l'aide des variables indépendantes, des fonctions inconnues, et de quelques-unes de leurs dérivées paramétriques. Pour abréger, et bien qu'une foule d'autres relations déduites du système jouissent aussi de cette propriété, nous qualifierons spécialement de *directes* les relations auxquelles nous conduit

l'application du mécanisme précédent (en y comprenant les relations ultimes elles-mêmes), et nous affecterons de la même qualification les expressions qui en résultent pour les diverses dérivées principales des fonctions inconnues.

Cela étant, *si l'on forme, à l'aide du mécanisme décrit ci-dessus, une relation directe quelconque,* il résulte immédiatement du n° 107 et de la nature normale, constatée plus haut (n° 109), des relations ultimes, que *les relations successivement rencontrées dans le cours d'un semblable calcul sont toutes normales.*

II. *Dans un système orthonome, chaque dérivée principale de première classe n'a qu'une expression directe.*

Effectivement, nous avons déjà observé (n° 109) qu'une dérivée principale de première classe ne peut se déduire par dérivation d'aucun premier membre du système ; il en résulte que les expressions directes des dérivées principales de première classe sont toutes fournies par des équations du système donné, et, comme les premiers membres y sont tous distincts, chacune des dérivées dont il s'agit n'a qu'une seule expression directe.

III. Les relations directes, d'après la définition même que nous en avons donnée (I), appartiennent à l'un ou à l'autre des trois groupes suivants :

Les relations du système donné ;

Les relations obtenues en différentiant un nombre quelconque de fois une relation du système donné, et remplaçant, dans le second membre de la relation résultante, les diverses dérivées principales par telles ou telles de leurs expressions ultimes ;

Les relations obtenues en effectuant sur une relation du système donné l'opération précédente, puis sur la relation résultante une opération de même espèce.

Dans tous les cas, on part, pour former une relation directe quelconque, d'une certaine équation du système donné.

Cela posé, *si, dans un système orthonome, l'égalité identique a lieu entre les diverses expressions directes de chaque dérivée principale des classes* 1, 2, ..., *j* (*où j désigne un entier positif quelconque*), *toutes les expressions directes d'une dé-*

rivée déterminée de classe $j+1$, obtenues en partant d'une même équation du système proposé, sont nécessairement identiques.

La dérivée de classe $j+1$ dont parle l'énoncé coïncide nécessairement, soit avec le premier membre de l'équation d'où l'on doit partir, soit avec quelque dérivée de ce premier membre.

Dans le premier cas, l'équation considérée ne peut fournir, pour la dérivée de classe $j+1$ qui figure dans son premier membre, qu'une seule expression directe, son second membre.

Dans le second cas, que nous allons maintenant examiner, la formation des expressions directes visées par l'énoncé nécessite, sur l'équation d'où l'on part, certaines différentiations qui ont toujours lieu, dans divers ordres, par rapport aux mêmes variables respectives; tantôt on n'effectue de substitutions qu'après la dernière d'entre elles, tantôt on en effectue en outre après *une* des différentiations précédentes. Il s'agit d'établir que, de quelque façon qu'on procède, on arrivera toujours, pour la dérivée considérée de classe $j+1$, à la même expression directe.

1° En premier lieu, si l'on n'opère de substitutions qu'après la dernière différentiation, les expressions directes auxquelles on est conduit pour la dérivée en question sont identiquement égales : car l'expression primitive résultant des seules différentiations est indépendante de l'ordre dans lequel on les exécute (n° 68), et, pour chacune des dérivées principales, de classes nécessairement inférieures à $j+1$, qui y figurent, les diverses expressions directes, à plus forte raison les diverses expressions ultimes, sont par hypothèse identiques.

2° Si l'on ne change pas l'ordre relatif des différentiations, les expressions directes auxquelles on est conduit sont encore identiquement égales.

Désignons par $(\mathfrak{a})$ l'équation du système donné d'où l'on doit partir, par k le nombre des différentiations successives, exécutées sur $(\mathfrak{a})$ dans un ordre invariable, par δ la dérivée principale que l'exécution des $k-1$ premières amènerait dans le premier membre, et par x la variable indépendante par rapport à laquelle la $k^{\text{ième}}$ différentiation doit avoir lieu : cette dernière, et *éventuellement une des précédentes,* doit être suivie de substitutions, et c'est l'exécution ou la non-exécution de cette partie éventuelle du calcul, comme aussi

le moment où elle est effectuée, qui constituent les circonstances variables de l'opération actuellement considérée. Or, je vais établir que le résultat final auquel on est conduit est, quelles que soient ces circonstances variables, identique au résultat fourni par une opération bien déterminée que je vais d'abord décrire.

Observons à cet effet que, $\frac{\partial \delta}{\partial x}$ étant de classe $j+1$, δ est au plus de classe j (n° 106). Cela étant, l'opération dont je veux parler consiste à prendre la relation directe (unique) dont le premier membre est δ, à la différentier par rapport à x, et à remplacer ensuite, dans le second membre de la relation résultante, chacune des dérivées principales, de classes nécessairement inférieures à $j+1$, qui y figurent, par son expression ultime (unique).

En effet, une semblable opération donne un résultat évidemment identique au résultat fourni par celle dont nous avons parlé antérieurement, si, dans cette dernière, la $k^{\text{ième}}$ différentiation doit être exécutée sur une relation ultime, et il reste alors à examiner le cas où la $k^{\text{ième}}$ différentiation doit être exécutée, non plus sur une relation ultime, mais sur une relation ultime *déjà différentiée*. Soit donc

$$(1) \qquad \delta = f(x, y, \ldots, \sigma, \ldots, \tau, \ldots)$$

la relation dont il s'agit, où $\sigma, \ldots$ désignent les diverses dérivées principales figurant *effectivement* dans le second membre, et $\tau, \ldots$ les diverses inconnues ou dérivées paramétriques y figurant aussi *effectivement*. La relation (1) étant normale (I), les quantités $\sigma, \ldots, \tau, \ldots$ ont une cote première au plus égale à celle de δ, et par suite inférieure à celle de $\frac{\partial \delta}{\partial x}$; elles sont donc toutes normales vis-à-vis de $\frac{\partial \delta}{\partial x}$. D'autre part, les quantités $\sigma, \ldots$ et $\tau, \ldots$ étant normales vis-à-vis de δ, les quantités $\frac{\partial \sigma}{\partial x}, \cdots$ et $\frac{\partial \tau}{\partial x}, \cdots$ le sont vis-à-vis de $\frac{\partial \delta}{\partial x}$ (n° 107, I). Enfin, puisque $\frac{\partial \delta}{\partial x}$ est de classe $j+1$, les dérivées $\sigma, \ldots, \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \cdots$, et celles d'entre les dérivées $\frac{\partial \tau}{\partial x}, \cdots$ qui sont principales, sont au plus de la classe j, et par suite chacune d'elles a une expression directe unique, qui se trouve être, à plus forte raison, son expression ultime unique. Désignons alors par

$$\Sigma, \quad \ldots, \quad \Sigma_x, \quad \ldots$$

les expressions directes de

$$\sigma, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \ldots;$$

par $\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial x}\right]$, ... les résultats que donne la règle des fonctions composées quand on effectue sur $\Sigma, \ldots$ une différentiation relative à x; enfin par $\left[\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial x}\right]\right], \ldots$ les résultats respectivement déduits de $\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial x}\right], \ldots$ en éliminant de ces dernières expressions les dérivées principales, de classes nécessairement inférieures à j, qui peuvent y figurer : il est clair, puisque les dérivées $\frac{\partial \sigma}{\partial x}, \ldots$ sont au plus de la classe j, que les expressions directes $\left[\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial x}\right]\right], \ldots$ sont respectivement identiques aux expressions directes $\Sigma_x, \ldots$.

Cela posé, exécutons sur la relation (1) les opérations qui restent à exécuter, c'est-à-dire la différentiation relative à x, et ensuite l'élimination des dérivées principales du second membre. Il suffit pour cela de considérer la relation

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x} + \ldots,$$

et de remplacer dans le second membre, d'une part les dérivées principales

$$\sigma, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \ldots$$

par leurs expressions ultimes

$$\Sigma, \quad \ldots, \quad \Sigma_x, \quad \ldots,$$

d'autre part celles d'entre les dérivées $\frac{\partial \tau}{\partial x}, \ldots$ qui sont principales par les expressions ultimes correspondantes. Or, en vertu des identités

$$\Sigma_x = \left[\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial x}\right]\right], \quad \ldots,$$

il revient évidemment au même de différentier par rapport à x la relation

$$\delta = f(x, y, \ldots, \Sigma, \ldots, \tau, \ldots)$$

(relation directe unique ayant pour premier membre δ), ce qui donne

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \Sigma}\left[\frac{\partial \Sigma}{\partial x}\right] + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x} + \ldots,$$

puis de remplacer par leurs expressions ultimes les dérivées principales qui peuvent alors figurer dans le second membre.

3° Considérons deux quelconques des expressions directes dont le présent alinéa III a pour but de démontrer l'identité, et qui se déduisent, comme nous l'avons expliqué, par différentiations et substitutions, d'une même équation du système. Si, sans changer de part ni d'autre l'ordre relatif des différentiations, on n'opère de substitutions qu'après la dernière d'entre elles, on tombe sur deux expressions directes respectivement identiques aux deux précédentes (2°), et l'on sait d'ailleurs (1°) qu'en procédant ainsi, le résultat est indépendant de l'ordre des différentiations.

IV. *Si, dans un système orthonome, l'égalité identique a lieu, d'une part entre les diverses expressions directes de chaque dérivée principale des classes* 1, 2, ..., j (*où* j *désigne un entier positif quelconque*), *d'autre part entre les diverses expressions ultimes de chaque dérivée cardinale de classe* $j+1$, *les deux expressions directes d'une même dérivée principale de classe* $j+1$ *obtenues en partant de deux équations différentes du système proposé sont nécessairement identiques.*

Supposons, pour fixer les idées, que ce soit la fonction u dont certaines dérivées figurent dans les premiers membres des deux équations considérées. Pour passer de la fonction u à l'une ou à l'autre de ces deux dérivées, il faut exécuter sur elle certaines différentiations, dont quelques-unes peuvent être les mêmes de part et d'autre. Nous désignerons par le symbole D. l'ensemble de ces différentiations communes, et par les symboles D'., D''. l'ensemble des différentiations restantes pour la première et la seconde dérivée respectivement. Les deux équations peuvent donc s'écrire

(2) $$\text{D}.\text{D}'.u = \ldots,$$

(3) $$\text{D}.\text{D}''.u = \ldots.$$

Cela posé, la dérivée de classe $j+1$ dont parle l'énoncé coïncide soit avec $\text{D}.\text{D}'.\text{D}''.u$, soit avec quelque dérivée de $\text{D}.\text{D}'.\text{D}''.u$, puis-

qu'elle est une résultante (n° 92) des premiers membres de (2) et (3). — Dans le premier cas, en vertu de l'alinéa précédent III, les opérations à effectuer soit sur l'équation (2), soit sur l'équation (3), pour en déduire une expression directe de $D.D'.D''.u$, pourront l'être comme il suit : on exécutera d'abord la différentiation D''. s'il s'agit de l'équation (2), la différentiation D'. s'il s'agit de l'équation (3), et l'on remplacera ensuite, dans les seconds membres des formules résultantes, les dérivées principales des classes $1, 2, \ldots, j$ par leurs expressions ultimes. Or, ce mécanisme engendre précisément deux expressions ultimes de la dérivée cardinale $D.D'.D''.u$, de classe $j+1$, c'est-à-dire deux expressions qui, par hypothèse, sont identiquement égales l'une à l'autre. — Si la dérivée de classe $j+1$ dont parle l'énoncé coïncide avec quelque dérivée de $D.D'.D''.u$, les opérations à effectuer soit sur l'équation (2), soit sur l'équation (3), pour en déduire une expression directe de la dérivée en question, pourront l'être comme il suit : 1° on effectuera d'abord la différentiation D''. s'il s'agit de la première, la différentiation D'. s'il s'agit de la seconde, et l'on remplacera les dérivées principales figurant dans les seconds membres par leurs expressions ultimes ; 2° on exécutera ensuite les différentiations restantes, qui sont les mêmes de part et d'autre, et l'on éliminera finalement des seconds membres les dérivées principales. Or, $D.D'.D''.u$ étant, dans le cas actuel, de classe inférieure à $j+1$ (n° 106), il résulte encore de nos hypothèses que les résultats sont identiques après la première partie de l'opération, par suite aussi après la seconde.

V. Comme nous l'avons déjà remarqué (II), chaque dérivée principale de première classe ne possède, dans un système orthonome, qu'une seule expression directe. Si donc on suppose que les diverses expressions ultimes de chaque dérivée principale des classes $1, 2, \ldots, J$, et, par suite, de chaque dérivée cardinale, sont identiquement égales, l'application répétée des propositions ci-dessus (III) (IV) prouve que l'égalité identique entre les diverses expressions directes d'une même dérivée principale a encore lieu dans la deuxième classe, puis dans la troisième, et ainsi de suite indéfiniment. *Il n'y a,* dès lors, *pour une même dérivée principale quelconque, qu'une seule expression directe, et, à plus forte raison, qu'une seule expression ultime,* ce que nous voulions établir.

112. La règle de passivité que nous venons d'établir peut évidemment se formuler de la manière suivante :

Pour qu'un système orthonome soit passif, ou, en d'autres termes, pour que l'élimination des dérivées principales de classes 1, 2, ..., j, *effectuée entre les équations*

$$\mathfrak{P}_1, \quad \mathfrak{P}_2, \quad \ldots, \quad \mathfrak{P}_j$$

(n° 109), *conduise, quel que soit* j, *à des identités, il suffit que cela ait lieu pour* $j = \mathrm{J}$, *classe maxima des dérivées cardinales des inconnues. S'il n'y a pas de dérivées cardinales, la passivité a lieu d'elle-même.*

Cette règle entraîne, à plus forte raison, la suivante, souvent plus commode au point de vue pratique lorsqu'il s'agit d'effectuer les calculs :

Règle provisoire de passivité. — *Soient* S *un système orthonome ;* δ *la cote première minima de ses premiers membres ;*

$$\mathrm{S}_\delta, \quad \mathrm{S}_{\delta+1}, \quad \mathrm{S}_{\delta+2}, \quad \ldots$$

les relations du système S *prolongé* (n° 99), *partagées en groupes successifs d'après les cotes premières croissantes,*

$$\delta, \quad \delta+1, \quad \delta+2, \quad \ldots,$$

de leurs premiers membres ; Ω *la cote première maxima des dérivées cardinales des inconnues.*

Pour que le système S *soit passif, ou, en d'autres termes, pour que l'élimination des dérivées principales de cotes premières* δ, $\delta+1$, ..., C, *effectuée entre les équations*

$$\mathrm{S}_\delta, \quad \mathrm{S}_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad \mathrm{S}_{\mathrm{C}},$$

conduise, quel que soit C, *à des identités, il suffit que cela ait lieu pour* $\mathrm{C} = \Omega$. *S'il n'y a pas de dérivées cardinales, la passivité a lieu d'elle-même.*

Cette règle provisoire sera plus tard simplifiée et généralisée (Chap. X).

Si les relations ainsi obtenues ne sont pas, comme l'exige la passivité, *identiquement* vérifiées, et si l'on cesse, en conséquence, d'y considérer comme indépendantes les quantités autres que $x, y, \ldots,$

elles se présentent comme étant, *au point de vue de l'intégration,* des conséquences du système donné, c'est-à-dire qu'elles ne peuvent manquer d'être satisfaites par tout groupe d'intégrales ordinaires de ce système : *au cas* donc *où, sans être identiquement vérifiées, quelques-unes d'entre elles ne contiendraient que les seules variables x, y, ..., le système proposé n'admettrait aucun groupe d'intégrales.*

Cette remarque s'applique, en particulier, au système différentiel, manifestement orthonome, dont nous nous sommes occupé à propos du Calcul inverse de la dérivation (Chap. VI) : dans ce système, les conditions de passivité, suffisantes pour l'existence de l'intégrale qui répond à des conditions initiales données, sont en même temps *nécessaires* à l'existence de toute intégrale, parce qu'elles ne contiennent, comme les seconds membres du système, que les seules variables indépendantes ; c'est pourquoi on les nomme, en pareil cas, *conditions d'intégrabilité.*

113. Nous terminerons par l'observation suivante, d'une importance assez secondaire, mais cependant quelquefois utile :

Si, dans un système orthonome passif, on supprime les diverses équations dont les premiers membres, comparés à ceux de telles ou telles autres, en peuvent être considérés comme des dérivées, le système résultant admet les mêmes intégrales que le premier, et possède, comme lui, une forme (*orthonome*) *passive.*

Car les dérivées respectivement principales et paramétriques des fonctions inconnues seront les mêmes de part et d'autre ; le second système, indéfiniment prolongé par différentiations (nº 99), admettra la même solution numérique générale que le premier ; et les développements des intégrales hypothétiques répondant aux mêmes conditions initiales seront les mêmes pour l'un et pour l'autre.

Convergence des développements des intégrales d'un système orthonome; théorème d'existence.

114. Soient S un système *orthonome;* δ et Δ les cotes premières respectivement maxima et minima de ses premiers membres ;

$$S_\delta, \quad S_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad S_\Delta, \quad S_{\Delta+1}, \quad \ldots$$

les relations de S prolongé, distribuées en groupes successifs d'après les cotes premières croissantes de leurs premiers membres ; t_C un groupe partiel extrait de S_C sous la seule condition d'avoir pour premiers membres, sans omission ni répétition, les diverses dérivées principales de cote première C. Cela étant, *si, dans le système orthonome* S, *on considère un groupe d'intégrales (ordinaires) hypothétiques répondant à des conditions initiales données, les développements (bien déterminés) construits* a priori *à l'aide des valeurs initiales données et de celles que fournit la résolution successive des groupes*

$$t_\delta, \quad t_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad t_\Delta, \quad t_{\Delta+1}, \quad \ldots$$

par rapport aux dérivées principales [1] *sont nécessairement convergents.*

I. Si les fonctions $f(x, y, \ldots)$, $\varphi(x, y, \ldots)$ sont toutes deux développables (n° 76) à partir de $x_0, y_0, \ldots,$ si, de plus, les valeurs de $\varphi(x, y, \ldots)$ et de toutes ses dérivées au point $(x_0, y_0, \ldots)$ sont réelles, positives, et respectivement supérieures aux modules des valeurs correspondantes de $f(x, y, \ldots)$ et de ses dérivées semblables, la fonction $\varphi(x, y, \ldots)$ sera dite *majorante* de $f(x, y, \ldots)$ par rapport aux valeurs particulières $x_0, y_0, \ldots$.

II. Soient :

$f(x, y, \ldots)$ une fonction développable à partir de $x_0, y_0, \ldots$ avec les rayons de convergence $R_x, R_y, \ldots$;

$r_x, r_y, \ldots$ des quantités positives respectivement inférieures à $R_x, R_y, \ldots$;

M une constante positive supérieure à la somme L que l'on obtient en remplaçant dans le développement de $f(x, y, \ldots)$, effectué à partir de $x_0, y_0, \ldots$, tous les coefficients par leurs modules, et les différences $x - x_0$, $y - y_0, \ldots$ par les quantités respectives $r_x, r_y, \ldots$;

$\alpha_x, \alpha_y, \ldots$ des quantités positives au moins égales à $\frac{1}{r_x}, \frac{1}{r_y}, \ldots$;

m un entier positif.

---

(1) Nous avons établi au n° 108 la possibilité de cette résolution successive.

Cela étant, *la fonction*

$$\Psi(x, y, \ldots) = \frac{M}{[1 - \alpha_x(x - x_0) - \alpha_y(y - y_0) - \ldots]^m},$$

évidemment développable (nº 61, II) *à partir des valeurs* $x_0, y_0, \ldots$, *est majorante* (I) *pour* $f(x, y, \ldots)$ *relativement à ces valeurs* (¹).

Faisons suivre en effet de l'indice zéro les notations des deux fonctions considérées et de leurs dérivées pour désigner les valeurs particulières qu'elles prennent au point $(x_0, y_0, \ldots)$; et soient $i, l, \ldots$ des ordres partiels quelconques de dérivation (positifs ou nuls). On a, par un calcul immédiat,

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial^{i+l+\ldots}\Psi}{\partial x^i\,\partial y^l\ldots}\right]_0 = M \times \alpha_x^i \alpha_y^l \ldots\\ \times m(m+1)\ldots(m+i-1)\\ \times (m+i)(m+i+1)\ldots(m+i+l-1)\\ \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

On a d'ailleurs, d'après nos définitions mêmes,

$$M > L, \qquad \alpha_x \geqq \frac{1}{r_x}, \qquad \alpha_y \geqq \frac{1}{r_y}, \qquad \ldots,$$

$$m(m+1)\ldots(m+i-1) \geqq 1.2\ldots i,$$

$$(m+i)(m+i+1)\ldots(m+i+l-1) \geqq 1.2\ldots l,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et il en résulte

$$\left[\frac{\partial^{i+l+\ldots}\Psi}{\partial x^i\,\partial y^l\ldots}\right]_0 > L\,\frac{1.2\ldots i}{r_x^i}\,\frac{1.2\ldots l}{r_y^l}\cdots.$$

Enfin, dans une série (convergente) à termes positifs, la somme est au moins égale à la valeur d'un terme quelconque, et l'on a par conséquent

$$L \geqq \operatorname{mod}\left[\frac{\partial^{i+l+\ldots}f}{\partial x^i\,\partial y^l\ldots}\right]_0 \frac{r_x^i}{1.2\ldots i}\,\frac{r_y^l}{1.2\ldots l}\cdots.$$

(¹) Comme nous l'avons dit dans la Préface, la première idée et les premières applications de la méthode des fonctions majorantes sont dues à Cauchy.

Dans l'énoncé du lemme ci-dessus, la constante M, qui figure au numérateur de la majorante, n'est pas définie comme on le fait d'habitude : cette légère modification aux usages courants a pour but d'éviter toute intervention explicite des quantités imaginaires.

On en déduit, par comparaison avec la relation précédente,

$$\left[\frac{\partial^{i+l+\dots}\Psi}{\partial x^i\,\partial y^l\dots}\right]_0 > \operatorname{mod}\left[\frac{\partial^{i+l+\dots}f}{\partial x^i\,\partial y^l\dots}\right]_0,$$

ce qu'il s'agissait d'établir.

III. La série entière

(1) $$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\dots+\frac{x^n}{1.2\dots n}+\dots$$

admet comme rayon de convergence (n° 30) une quantité positive arbitrairement choisie, puisque, dans la série formée par les modules des termes, le rapport d'un terme au précédent, $\frac{\operatorname{mod} x}{n}$, tend vers zéro pour n infini (n° 21, III). La série (1) définit donc, dans toute l'étendue de l'espace $[[x]]$ (n°s 1 et 15), une fonction olotrope que nous désignerons par $\Phi(x)$ (n° 46, I).

En différentiant, conformément à la règle du n° 51 (3°), tous les termes de la série (1), on trouve immédiatement

$$\Phi'(x)=\Phi(x),$$

et par suite, quel que soit k,

(2) $$\Phi^{(k)}(x)=\Phi(x).$$

La série (1) ayant, d'autre part, un domaine de convergence indéfini, la quantité $\Phi(x+h)$ est développable par la série de Taylor, quels que soient x et h. On trouve ainsi, en ayant égard à la formule (2),

$$\Phi(x+h)=\Phi(x)\left[1+\frac{h}{1}+\frac{h^2}{1.2}+\dots\right],$$

ou

$$\Phi(x+h)=\Phi(x)\,\Phi(h).$$

En désignant alors par $x_1, x_2, \dots, x_m$ des valeurs entièrement arbitraires, on déduit successivement de la formule précédente

$$\Phi(x_1+x_2)=\Phi(x_1)\,\Phi(x_2),$$

$$\Phi(x_1+x_2+x_3)=\Phi(x_1+x_2)\,\Phi(x_3)$$
$$=\Phi(x_1)\,\Phi(x_2)\,\Phi(x_3),$$

et, de proche en proche,

(3) $$\Phi(x_1+x_2+\ldots+x_m) = \Phi(x_1)\,\Phi(x_2)\ldots\Phi(x_m).$$

Si, dans cette relation, on suppose que les valeurs x_1, x_2, ..., x_m soient toutes égales à x, il vient

(4) $$\Phi(mx) = [\Phi(x)]^m,$$

où m désigne un entier positif.

Notons encore la relation numérique

$$\Phi(0) = 1 \quad (^1).$$

IV. *En désignant par λ une constante différente de zéro, et par t une variable indépendante, il existe une fonction de t développable par la formule de Maclaurin* (n° 55), *se réduisant à $+1$ pour $t=0$, et dont le carré est identiquement égal à $1-2\lambda t$.* Nous désignerons cette fonction par $\sqrt{1-2\lambda t}$.

---

(1) Il résulte de la formule (2) que la fonction $\Phi(x)$ ne s'évanouit pour aucune valeur de x : car autrement toutes les dérivées s'évanouiraient en même temps que la fonction; cette dernière serait donc identiquement nulle (n° 57), et l'on n'aurait pas, par exemple, $\Phi(0)=1$. Cela posé, la formule (3) donne, en particulier,

$$\Phi(x)\,\Phi(-x) = \Phi(x-x) = \Phi(0) = 1,$$

d'où l'on tire, puisque $\Phi(x)$ est nécessairement $\neq 0$,

$$\Phi(-x) = \frac{1}{\Phi(x)}.$$

En désignant alors par x_1 et x_2 des valeurs quelconques, il vient

$$\Phi(x_1-x_2) = \Phi(x_1)\,\Phi(-x_2) = \frac{\Phi(x_1)}{\Phi(x_2)}.$$

Enfin, la formule (4), établie dans le cas où l'entier m est positif, est encore applicable dans le cas où cet entier est nul ou négatif : car, pour $m=0$, son premier membre se réduit à 1, terme constant de la série (1), et son second membre prend aussi la valeur 1, à cause de la signification attribuée à l'exposant zéro; pour m négatif et égal à $-m'$, on a

$$\Phi(mx) = \Phi(-m'x) = \frac{1}{\Phi(m'x)} = \frac{1}{[\Phi(x)]^{m'}},$$

c'est-à-dire, à cause de la signification attribuée à un exposant entier négatif,

$$\Phi(mx) = [\Phi(x)]^{-m'} = [\Phi(x)]^m.$$

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dw}{dt} = \frac{2\lambda}{2\lambda t - 1} \quad (^1),$$

impliquant la fonction inconnue w de la variable indépendante t. Le second membre $\frac{2\lambda}{2\lambda t - 1}$ (où ne figure, à l'exclusion de l'inconnue w, que la seule variable indépendante t) étant développable par la formule de Maclaurin (n° 61, II), l'équation admet, en vertu d'une proposition antérieure (n° 76), une intégrale $W(t)$, développable par la formule de Maclaurin et s'annulant avec t. Cette intégrale particulière vérifie d'ailleurs identiquement, comme nous allons l'établir, la relation

$$(5) \qquad \Phi[W(t)] = 1 - 2\lambda t,$$

où Φ désigne la composante indéfiniment olotrope définie à l'alinéa III.

De la relation

$$(6) \qquad \frac{dW}{dt} = \frac{2\lambda}{2\lambda t - 1}$$

on tire, en effet,

$$\frac{d^2W}{dt^2} = \frac{-4\lambda^2}{(2\lambda t - 1)^2},$$

d'où

$$\left(\frac{dW}{dt}\right)^2 + \frac{d^2W}{dt^2} = 0.$$

En multipliant les deux membres de cette identité par le facteur $\Phi[W(t)]$, développable suivant la formule de Maclaurin en vertu du principe général des fonctions composées (n° 59), il vient

$$\Phi[W(t)]\left[\left(\frac{dW}{dt}\right)^2 + \frac{d^2W}{dt^2}\right] = 0;$$

or, le premier membre de cette dernière relation n'est autre que la

---

(1) Lorsqu'une fonction, f, ne dépend que d'une seule variable, t, on adopte habituellement, pour désigner ses dérivées successives, les notations $\frac{df}{dt}$, $\frac{d^2f}{dt^2}$, ..., au lieu des notations $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, ...

dérivée seconde de la fonction composée $\Phi[W(t)]$; on a, par conséquent,

$$\frac{d^2\,\Phi[W(t)]}{dt^2} = 0.$$

D'ailleurs, toute fonction olotrope, f, de la variable t, dont la dérivée seconde se réduit identiquement à zéro, est une fonction linéaire : car de la relation $\frac{d^2 f}{dt^2} = 0$ on déduit successivement, par l'application d'une remarque antérieure (n° 94),

$$\frac{df}{dt} = A \qquad \text{ou} \qquad \frac{df}{dt} - A = 0,$$

puis

$$f - At = B \qquad \text{ou} \qquad f = At + B,$$

où A, B désignent deux constantes. On a ainsi, pour un choix convenable des valeurs numériques attribuées à A, B,

(7) $$\Phi[W(t)] = At + B.$$

Pour déterminer ces valeurs, on adjoindra à l'équation (7) l'équation dérivée

(8) $$\Phi[W(t)]\frac{dW}{dt} = A,$$

et l'on fera $t = 0$ dans les relations (7) et (8) : si l'on observe, d'une part, qu'en vertu des relations

$$W(0) = 0, \qquad \Phi(0) = 1,$$

on a

$$\Phi[W(0)] = 1,$$

et, d'autre part, qu'en vertu de la relation (6), $\frac{dW}{dt}$ se réduit à -2λ pour $t = 0$, il vient

$$B = 1, \qquad A = -2\lambda.$$

Il en résulte bien, comme nous voulions l'établir, l'identité (5).

Finalement, si l'on considère la fonction

$$\Phi\left[\frac{1}{2}W(t)\right],$$

développable par la série de Maclaurin en vertu du principe général des fonctions composées, et se réduisant à $+1$ pour $t = 0$, on a, en

se reportant à la formule (4),

$$\Phi[W(t)] = \Phi^2\left[\frac{1}{2}W(t)\right],$$

puis, en se reportant à l'identité (5),

$$\Phi^2\left[\frac{1}{2}W(t)\right] = 1 - 2\lambda t.$$

V. *En désignant par α et μ deux constantes différentes de zéro, et par u, v, … diverses fonctions inconnues de la variable indépendante t, le système différentiel*

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\mu}{1-\alpha(u+v+\ldots)}, \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\mu}{1-\alpha(u+v+\ldots)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

dont les seconds membres sont développables par la formule de Maclaurin (n° 61, II), *admet un groupe d'intégrales développables par cette même formule et s'annulant avec t.*

Désignons en effet par g le nombre des fonctions inconnues du système (9), et considérons les g fonctions u, v, … définies par les relations

$$u = v = \ldots = \frac{1}{g\alpha}\left(1 - \sqrt{1 - 2g\alpha\mu t}\right).$$

Ces fonctions sont, en vertu de IV, développables par la formule de Maclaurin; elles s'annulent d'ailleurs avec t, puisque le radical se réduit à $+1$ pour $t = 0$: je dis qu'elles vérifient identiquement le système (9).

En effet, de la relation

$$u = \frac{1}{g\alpha}\left(1 - \sqrt{1 - 2g\alpha\mu t}\right)$$

on tire

$$(1 - g\alpha u)^2 = 1 - 2g\alpha\mu t$$

ou

$$g\alpha u^2 - 2u + 2\mu t = 0;$$

on en déduit, par différentiation,

$$g\alpha u\frac{du}{dt} - \frac{du}{dt} + \mu = 0,$$

d'où

$$\frac{du}{dt} = \frac{\mu}{1 - \alpha g u},$$

et finalement, à cause de $gu = u + v + \ldots$,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\mu}{1 - \alpha(u + v + \ldots)}.$$

On a de même

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mu}{1 - \alpha(u + v + \ldots)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

VI. *Le système différentiel (orthonome et passif)*

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \mathrm{U}(u, v, \ldots), \\ \dfrac{dv}{dt} = \mathrm{V}(u, v, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

dont les seconds membres, indépendants de t, sont supposés développables par la formule de Maclaurin, admet un groupe d'intégrales développables par cette même formule et s'annulant avec t.

Le système (10) est manifestement orthonome, comme on le voit en attribuant à t, u, v, ... les cotes respectives 1, 0, 0, ... : il est d'ailleurs passif, puisqu'il n'y a pas de dérivées cardinales (n° 112).

Cela étant, désignons par r une quantité positive moindre que les rayons d'un domaine (de centre 0, 0, ...) où les seconds membres de (10) soient tous développables suivant la formule de Maclaurin, et par M une quantité supérieure aux diverses sommes qu'on obtient lorsque, après avoir développé les seconds membres dont il s'agit, on remplace dans les développements tous les coefficients par leurs modules, et les quantités u, v, ... par r. Puis, considérons le système différentiel

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\mathrm{M}}{1 - \dfrac{u + v + \ldots}{r}}, \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\mathrm{M}}{1 - \dfrac{u + v + \ldots}{r}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

dont les seconds membres sont des majorantes pour ceux de (10) relativement aux valeurs 0, 0, ... de u, v, ... (II). Ce système admet, en vertu de V, un groupe d'intégrales développables par la formule de Maclaurin et s'annulant avec t, satisfaisant, par suite, aux conditions initiales

$$\left.\begin{array}{l} u = 0 \\ v = 0 \\ \dots\dots \end{array}\right\} \quad \text{pour } t = 0.$$

Cela posé, considérons, d'une part, les intégrales dont nous venons de constater l'existence *effective* dans le système (11), d'autre part les intégrales *hypothétiques* de (10) répondant aux mêmes conditions initiales, et comparons entre eux les développements de ces deux groupes d'intégrales. On voit immédiatement, d'après la définition des majorantes, que les valeurs initiales de $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\cdots$ dans le système (11) sont positives et supérieures aux modules de celles qui fournit le système (10). Si l'on considère maintenant les deux groupes de relations respectivement déduits de (10) et de (11) par des différentiations d'ordre $k-1$, et ayant dès lors pour premiers membres les dérivées d'ordre k de u, v, ..., les seconds membres du premier groupe sont des sommes de produits pouvant contenir comme facteurs trois sortes de quantités, savoir :

1° Certains entiers positifs;
2° Certaines dérivées partielles des composantes U, V, ...;
3° Les dérivées de u, v, ... d'ordre inférieur à k.

Et les seconds membres du deuxième groupe sont composés exactement de la même façon, si ce n'est que les dérivées partielles des composantes U, V, ... doivent être remplacées par les dérivées semblables de leurs majorantes. On voit alors, par un raisonnement effectué de proche en proche pour les ordres successifs, que les dérivées des intégrales effectives du système (11) ont des valeurs initiales positives et supérieures aux modules de celles qu'on obtient pour les dérivées semblables des intégrales hypothétiques de (10). Or, les intégrales effectives de (11) ayant de toute nécessité des développements convergents, les intégrales hypothétiques de (10) jouissent forcément aussi de la même propriété, ce qui suffit (n° 99) pour établir leur existence effective.

VII. *Le système différentiel (orthonome et passif)*

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \mathrm{U}(t, u, v, \ldots), \\ \dfrac{dv}{dt} = \mathrm{V}(t, u, v, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

dont les seconds membres sont supposés développables par la formule de Maclaurin, admet un groupe d'intégrales développables par cette même formule et s'annulant avec t.

Désignons en effet par ω une nouvelle inconnue adjointe à $u, v, \ldots$, et considérons tout d'abord, au lieu du système (12), le système

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \mathrm{U}(\omega, u, v, \ldots), \\ \dfrac{dv}{dt} = \mathrm{V}(\omega, u, v, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{d\omega}{dt} = 1, \end{cases}$$

qui s'en déduit par un mécanisme facile à apercevoir, et dont les seconds membres, en vertu de l'hypothèse faite sur ceux de (12), sont, eux aussi, développables par la formule de Maclaurin. Cela étant, il résulte de l'alinéa VI que le système (13) admet un groupe d'intégrales développables par cette même formule et s'annulant avec t. Or, la dernière équation (13), jointe à la condition initiale

$$\omega = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0,$$

donne évidemment $\omega = t$. Remplaçant ω par cette valeur dans les autres équations du système (13), nous retombons sur le système (12), qui, dès lors, admet bien un groupe d'intégrales satisfaisant aux conditions initiales indiquées.

VIII. *Le système différentiel (orthonome et passif)*

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \mathrm{U}(x, u, v, \ldots), \\ \dfrac{dv}{dx} = \mathrm{V}(x, u, v, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

dont les seconds membres sont supposés développables par la formule de Taylor à partir des valeurs numériques x_0, u_0, v_0, ..., *admet un groupe d'intégrales développables à partir de* x_0 *et répondant aux conditions initiales*

$$\left.\begin{array}{l} u = u_0 \\ v = v_0 \\ \cdots\cdots \end{array}\right\} \quad \text{pour } x = x_0.$$

Si l'on considère en effet le système différentiel

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{du'}{dt} = \mathrm{U}(x_0+t,\, u_0+u',\, v_0+v',\, \ldots), \\ \dfrac{dv'}{dt} = \mathrm{V}(x_0+t,\, u_0+u',\, v_0+v',\, \ldots), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{array}\right.$$

ce dernier, dont les seconds membres, en vertu de l'hypothèse faite sur ceux du proposé, sont développables par la formule de Maclaurin (n° 59), admet, en vertu de l'alinéa précédent, un groupe d'intégrales, $\upsilon(t)$, $\varphi(t)$, ..., développables par cette même formule et s'annulant avec t. Les relations (15) sont donc vérifiées quel que soit t lorsqu'on y substitue aux inconnues u', v', ... et à leurs dérivées premières les fonctions $\upsilon(t)$, $\varphi(t)$, ... et les dérivées premières de celles-ci ; et, dans les identités résultantes, la substitution de $x - x_0$ à t donne encore des identités. Si l'on pose maintenant

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{l} u = u_0 + \upsilon(x - x_0), \\ v = v_0 + \varphi(x - x_0), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{array}\right.$$

et si l'on observe que (en vertu de la règle des fonctions composées) les dérivées premières de u, v, ... par rapport à x s'obtiennent en remplaçant t par $x - x_0$ dans les dérivées premières de $\upsilon(t)$, $\varphi(t)$, ..., on voit que le système (14) est identiquement vérifié par les fonctions (16), et qu'il admet bien, dès lors, le groupe d'intégrales spécifié par notre énoncé.

IX. Considérons le système différentiel

$$\frac{d^\alpha u}{dx^\alpha} = \mathrm{U}, \qquad \frac{d^\beta v}{dx^\beta} = \mathrm{V}, \qquad \ldots,$$

où u, v, ... désignent des fonctions inconnues de la variable indé-

pendante x; α, β, ... des entiers positifs quelconques; et U, V, ... des fonctions données de toutes les quantités

$$(17)\qquad \begin{cases} x, \\ u, \quad \dfrac{du}{dx}, \quad \ldots, \quad \dfrac{d^{\alpha-1}u}{dx^{\alpha-1}}, \\ v, \quad \dfrac{dv}{dx}, \quad \ldots, \quad \dfrac{d^{\beta-1}v}{dx^{\beta-1}}, \\ \ldots, \quad \ldots, \quad \ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si les fonctions U, V, ... *sont développables à partir des valeurs*

$$(18)\qquad \begin{cases} x_0, \\ u_0, \quad \left(\dfrac{du}{dx}\right)_0, \quad \ldots, \quad \left(\dfrac{d^{\alpha-1}u}{dx^{\alpha-1}}\right)_0, \\ v_0, \quad \left(\dfrac{dv}{dx}\right)_0, \quad \ldots, \quad \left(\dfrac{d^{\beta-1}v}{dx^{\beta-1}}\right)_0, \\ \ldots, \quad \ldots\ldots, \quad \ldots, \quad \ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

le système proposé admet un groupe d'intégrales, u, v, ..., *développables à partir de* x_0, *et telles que, pour* $x = x_0$, *les quantités* (17) *prennent respectivement les valeurs numériques* (18).

En effet, l'intégration du système proposé se ramène visiblement à celle du suivant :

$$\begin{array}{llll} \dfrac{du}{dx} = u', & \dfrac{du'}{dx} = u'', & \ldots, & \dfrac{du^{(\alpha-1)}}{dx} = \mathrm{U}, \\ \dfrac{dv}{dx} = v', & \dfrac{dv'}{dx} = v'', & \ldots, & \dfrac{dv^{(\beta-1)}}{dx} = \mathrm{V}, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Il va sans dire que, dans les seconds membres U, V, ..., figurant à l'extrémité des lignes horizontales respectives du Tableau ci-dessus, on a substitué aux dérivées

$$\begin{array}{llll} \dfrac{du}{dx}, & \dfrac{d^2u}{dx^2}, & \ldots, & \dfrac{d^{\alpha-1}u}{dx^{\alpha-1}}, \\ \dfrac{dv}{dx}, & \dfrac{d^2v}{dx^2}, & \ldots, & \dfrac{d^{\beta-1}v}{dx^{\beta-1}}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots \end{array}$$

les nouvelles inconnues respectives

$$\begin{array}{llll} u', & u'', & \ldots, & u^{(\alpha-1)}, \\ v', & v'', & \ldots, & v^{(\beta-1)}, \\ .., & .., & \ldots, & \ldots\ldots \end{array}$$

Cela étant, la proposition qui fait l'objet du présent alinéa IX se présente comme une conséquence immédiate du précédent.

X. Revenant à notre énoncé général (*voir* le début du présent n° 114), considérons, au lieu du système S, le système $S_{\Delta+1}$, que nous désignerons aussi par (S). Il est clair que, dans les deux systèmes S et (S), la répartition des dérivées des fonctions inconnues en principales et paramétriques est la même, à cela près que les dérivées principales du système S dont la cote première tombait au-dessous de $\Delta+1$ sont devenues paramétriques dans le système (S); et si, dans les deux systèmes

S prolongé, (S) prolongé

(n° 99), on partage les relations en groupes successifs d'après leur cote première croissante, cette suite illimitée de groupes est la même de part et d'autre, à cela près que, dans le système (S) prolongé, un certain nombre de groupes,

$$S_\delta, \quad S_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad S_\Delta,$$

ont disparu en tête de la liste. Au lieu donc d'imposer aux intégrales hypothétiques de S les conditions initiales choisies, il revient au même, pour la démonstration de notre énoncé général, d'imposer à celles de (S) des conditions initiales identiques, en ayant soin seulement de prendre, pour les anciennes dérivées principales devenues paramétriques, les valeurs initiales calculées à l'aide des groupes

$$t_\delta, \quad t_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad t_\Delta.$$

On peut maintenant, moyennant un simple changement de fonctions, remplacer le système (S) par un autre où les déterminations initiales des inconnues soient toutes identiquement nulles. Effectivement, soient I_u, I_v, ... les déterminations initiales respectives des inconnues u, v, ... dans le système (S). Nous observerons tout d'abord que, parmi les dérivées de I_u, I_v, ..., celles qui sont respectivement sem-

blables aux dérivées principales de u, v, ... ont toutes zéro pour valeur initiale, et qu'elles sont, par suite, identiquement nulles, puisque leurs propres dérivées, nécessairement semblables à des dérivées principales de u, v, ..., ont toutes aussi pour valeur initiale zéro (n° 57); quant aux valeurs initiales de I_u, I_v, ... et de leurs dérivées restantes, elles sont précisément égales aux valeurs initiales de u, v, ... et de leurs dérivées (paramétriques) semblables. Cela posé, effectuons dans le système (S) la transformation

$$u = I_u + \mathfrak{u},$$
$$v = I_v + \mathfrak{v},$$
$$\dots\dots\dots,$$

où $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, ... désignent de nouvelles fonctions inconnues, et soit $(\mathfrak{S})$ le système ainsi obtenu : de la remarque faite ci-dessus il résulte évidemment que le système $(\mathfrak{S})$ prolongé peut se déduire de (S) prolongé en remplaçant les dérivées principales de u, v, ... par les dérivées semblables de $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, ..., puis les fonctions u, v, ... et leurs dérivées paramétriques par les sommes $I_u + \mathfrak{u}$, $I_v + \mathfrak{v}$, ... et les dérivées semblables de ces sommes. Les deux systèmes (S) et $(\mathfrak{S})$ ont donc, sauf le changement de u, v, ... en $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, ..., les mêmes premiers membres, et les dérivées des fonctions inconnues s'y répartissent de la même manière en principales et paramétriques; d'ailleurs, si aux intégrales hypothétiques $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, ... de $(\mathfrak{S})$ on impose des déterminations initiales identiquement nulles, il est clair que les valeurs numériques initiales prises, dans le système (S), par les intégrales hypothétiques u, v, ..., qui correspondent aux déterminations initiales I_u, I_v, ..., et par leurs dérivées paramétriques de tous ordres, sont respectivement égales aux valeurs numériques initiales prises, dans le système $(\mathfrak{S})$, par les sommes $I_u + \mathfrak{u}$, $I_v + \mathfrak{v}$, ... et les dérivées semblables de ces sommes.

Cela étant, conservons aux variables x, y, ..., dans le système $(\mathfrak{S})$, les cotes respectives qu'elles avaient dans les systèmes S et (S), et attribuons aux nouvelles fonctions inconnues $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, ... les mêmes cotes respectives qu'aux anciennes correspondantes u, v, ... Considérons d'autre part, dans les systèmes (S) prolongé et $(\mathfrak{S})$ prolongé, deux relations correspondantes (nécessairement normales); si, dans chacune d'elles, on remplace par les valeurs numériques initiales qui leur conviennent respectivement les variables indépendantes x,

y, ..., les intégrales hypothétiques (u, v, ... ou $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, ..., suivant qu'il s'agit de l'une ou de l'autre relation), et leurs dérivées paramétriques de tous ordres, les deux relations ainsi obtenues (où ne figurent plus que des dérivées principales) seront identiques l'une à l'autre.

Cela posé, je dis qu'il suffit, pour établir notre énoncé général, d'établir le point suivant.

Si l'on désigne par

$$(\mathfrak{S})_{\Delta+1},\quad (\mathfrak{S})_{\Delta+2},\quad \ldots$$

les relations (toutes normales) de ($\mathfrak{S}$) prolongé, partagées en groupes successifs d'après les valeurs croissantes de leurs cotes premières, et par

$$(\mathfrak{t})_{\Delta+1},\quad (\mathfrak{t})_{\Delta+2},\quad \ldots$$

des groupes respectivement extraits des précédents sous la seule condition d'avoir respectivement pour premiers membres, sans omission ni répétition, les dérivées principales de cotes premières

$$\Delta+1,\quad \Delta+2,\quad \ldots,$$

les développements (bien déterminés) construits à l'aide des valeurs initiales données (toutes nulles) et de celles que fournit la résolution successive des groupes

$$(\mathfrak{t})_{\Delta+1},\quad (\mathfrak{t})_{\Delta+2},\quad \ldots$$

par rapport aux dérivées principales, sont nécessairement convergents.

Car, si aux variables, aux intégrales hypothétiques, et à leurs dérivées paramétriques, on attribue les valeurs initiales qui leur conviennent respectivement dans les systèmes ($\mathfrak{S}$) et (S), les relations de ces deux systèmes prolongés deviennent, comme nous l'avons dit, identiques chacune à chacune; en désignant donc par t_C, conformément aux notations de notre énoncé général, un groupe quelconque extrait de (S) prolongé sous la seule condition d'avoir pour premiers membres, sans omission ni répétition, les dérivées principales de cote C ($C > \Delta$), et par $(\mathfrak{t})_C$ le groupe *correspondant* extrait de ($\mathfrak{S}$) prolongé, la résolution successive, soit des groupes

$$(\mathfrak{t})_{\Delta+1},\quad (\mathfrak{t})_{\Delta+2},\quad \ldots,$$

soit des groupes

$$t_{\Delta+1},\quad t_{\Delta+2},\quad \ldots,$$

fournit, pour les dérivées principales semblables, les mêmes valeurs initiales. Dès lors, si, dans les développements construits de part et d'autre à l'aide des valeurs initiales tant données que calculées, on fait abstraction des portions (convergentes) formées par les déterminations initiales, les portions restantes sont respectivement identiques de part et d'autre, et la convergence, lorsqu'elle a lieu d'un côté, ne peut manquer d'avoir lieu de l'autre.

Ainsi, *nous nous trouvons ramené à établir le point formulé ci-dessus dans le présent alinéa* X.

XI. Dans le système ($\mathfrak{S}$), partageons les fonctions inconnues en catégories suivant la valeur de leur cote première, et supposons, pour fixer les idées, que le nombre des catégories ainsi obtenues soit égal à 3. Les dérivées de tous ordres des inconnues se partagent naturellement alors en trois catégories, suivant qu'elles appartiennent à telle ou telle inconnue.

Cela étant, désignons par γ', γ'', γ''' les cotes premières attribuées aux inconnues des trois catégories respectives, et posons

$$\Delta + 1 - \gamma' = K', \qquad \Delta + 1 - \gamma'' = K'', \qquad \Delta + 1 - \gamma''' = K''';$$

la cote première d'une inconnue quelconque étant au plus égale à Δ (puisque celles des diverses équations du système proposé S ne surpassent pas Δ), les différences $\Delta - \gamma'$, $\Delta - \gamma''$, $\Delta - \gamma'''$ sont positives ou nulles, et, par suite, les entiers K', K'', K''' sont au moins égaux à 1. Il est clair d'ailleurs qu'une dérivée d'inconnue aura une cote première inférieure, égale, ou supérieure à $\Delta + 1$, suivant qu'elle sera :

D'ordre inférieur, égal, ou supérieur à K', s'il s'agit d'une dérivée de première catégorie;

D'ordre inférieur, égal, ou supérieur à K'', s'il s'agit d'une dérivée de deuxième catégorie;

D'ordre inférieur, égal, ou supérieur à K''', s'il s'agit d'une dérivée de troisième catégorie.

Considérant, en particulier, les dérivées de cote première inférieure ou égale à $\Delta + 1$, qui seules figurent dans ($\mathfrak{S}$), nous qualifierons, pour abréger, de *secondaires* celles dont la cote première est inférieure à $\Delta + 1$, et de *dominantes* celles dont la cote première est égale à $\Delta + 1$. Chaque équation du système ($\mathfrak{S}$), linéaire par rapport aux dérivées dominantes, a pour premier membre une de celles-ci.

Nous nommerons, en outre, dans ce qui suit :

Coefficients du système ($\mathfrak{S}$) les diverses fonctions (des variables, des inconnues et des dérivées secondaires) qui figurent dans les seconds membres, soit comme multiplicateurs des dérivées dominantes, soit comme termes indépendants de ces dérivées;

$x_0, y_0, \ldots$ les valeurs initiales de $x, y, \ldots$;

$\mathfrak{f}, \ldots$ les diverses quantités du groupe formé par les inconnues $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$ et leurs dérivées secondaires (toutes ces quantités ont des valeurs initiales nulles, puisque les déterminations initiales sont identiquement nulles);

$\mathfrak{u}', \mathfrak{v}', \ldots$ les inconnues de première catégorie, g' leur nombre, g'_1, $g'_2, \ldots, g'_{K'-1}$ les nombres respectifs de leurs dérivées des ordres $1, 2, \ldots, K'-1$;

$\mathfrak{u}'', \mathfrak{v}'', \ldots$ les inconnues de deuxième catégorie, g'' leur nombre, g''_1 $g''_2, \ldots, g''_{K''-1}$ les nombres respectifs de leurs dérivées des ordres $1, 2, \ldots, K''-1$;

$\mathfrak{u}''', \mathfrak{v}''', \ldots$ les inconnues de troisième catégorie, g''' leur nombre, g'''_1, $g'''_2, \ldots, g'''_{K'''-1}$ les nombres respectifs de leurs dérivées des ordres $1, 2, \ldots, K'''-1$.

D'ailleurs, les seconds membres du système primitif S étant, par hypothèse, développables à partir des valeurs initiales choisies pour les diverses quantités qui y figurent, on voit sans peine que les coefficients du système ($\mathfrak{S}$), fonctions des diverses quantités

$$x, \quad y, \quad \ldots, \quad \mathfrak{f}, \quad \ldots,$$

seront développables à partir des valeurs initiales

$$x_0, \quad y_0, \quad \ldots, \quad 0, \quad \ldots.$$

XII. Soient :

ε une constante positive moindre que $\frac{1}{3}$ (c'est-à-dire moindre que le quotient de 1 par le nombre des catégories d'inconnues du système donné);

μ une constante positive quelconque;

$$\begin{array}{llllll} K', & g', & g'_1, & g'_2, & \ldots, & g'_{K'-1}, \\ K'', & g'', & g''_1, & g''_2, & \ldots, & g''_{K''-1}, \\ K''', & g''', & g'''_1, & g'''_2, & \ldots, & g'''_{K'''-1} \end{array}$$

les entiers définis dans ce qui précède (XI);

w', w'', w''' trois fonctions inconnues de la variable indépendante t.

Si l'on pose

$$(19)\qquad \begin{aligned} z = t + g'\,w' + g'_1\frac{dw'}{dt} + \ldots + g'_{K'-1}\frac{d^{K'-1}w'}{dt^{K'-1}} \\ + g''\,w'' + g''_1\frac{dw''}{dt} + \ldots + g''_{K''-1}\frac{d^{K''-1}w''}{dt^{K''-1}} \\ + g'''\,w''' + g'''_1\frac{dw'''}{dt} + \ldots + g'''_{K'''-1}\frac{d^{K'''-1}w'''}{dt^{K'''-1}} \end{aligned}$$

et $\Theta(z) = \frac{1}{1-z}$, *le système différentiel*

$$(20)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^{K'}w'}{dt^{K'}} &= \frac{\mu\,\Theta(z)}{1-3\varepsilon\,\Theta(z)}, \\ \frac{d^{K''}w''}{dt^{K''}} &= \frac{\mu\,\Theta(z)}{1-3\varepsilon\,\Theta(z)}, \\ \frac{d^{K'''}w'''}{dt^{K'''}} &= \frac{\mu\,\Theta(z)}{1-3\varepsilon\,\Theta(z)} \end{aligned} \right.$$

admet un groupe d'intégrales satisfaisant aux conditions initiales

$$(21)\qquad \left\{ \begin{aligned} w' &= \frac{dw'}{dt} = \ldots = \frac{d^{K'-1}w'}{dt^{K'-1}} = 0 \\ w'' &= \frac{dw''}{dt} = \ldots = \frac{d^{K''-1}w''}{dt^{K''-1}} = 0 \\ w''' &= \frac{dw'''}{dt} = \ldots = \frac{d^{K'''-1}w'''}{dt^{K'''-1}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{pour } t = 0.$$

Les dérivées restantes de ces intégrales ont d'ailleurs, pour $t = 0$, *des valeurs initiales essentiellement positives* (1).

---

(1) Dans l'étude qu'il a publiée avec notre collaboration sur une certaine classe de systèmes partiels du premier ordre (*voir* la Préface du présent Ouvrage), M. Méray considère l'équation différentielle

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\mu\,\Theta(\alpha w + \beta t)}{1-\varepsilon\,\Theta(\alpha w + \beta t)},$$

où t désigne une variable indépendante, w une fonction inconnue de cette variable, $\Theta(z)$ la composante $\frac{1}{1-z}$, et α, β, μ, ε quatre constantes positives, la dernière essentiellement plus petite que 1, les trois autres quelconques; cette équation admet une intégrale satisfaisant à la condition initiale

$$w = 0 \qquad \text{pour} \qquad t = 0,$$

et ayant des dérivées de tous ordres à valeurs initiales positives (MÉRAY, *Leçons nouvelles, etc.*, 1re Partie, p. 330).

D'abord, l'existence d'un groupe d'intégrales répondant aux conditions initiales (21) résulte immédiatement de l'alinéa IX.

D'un autre côté, si l'on développe $\Theta(z)$ par la formule

$$1 + z + z^2 + \ldots,$$

et que, après avoir remplacé z par le second membre de (19), on ordonne le résultat par rapport aux puissances de

$$\begin{array}{llll} t, \quad w', & \dfrac{dw'}{dt}, & \ldots, & \dfrac{d^{K'-1} w'}{dt^{K'-1}}, \\ w'', & \dfrac{dw''}{dt}, & \ldots, & \dfrac{d^{K''-1} w''}{dt^{K''-1}}, \\ w''', & \dfrac{dw'''}{dt}, & \ldots, & \dfrac{d^{K'''-1} w'''}{dt^{K'''-1}}, \end{array}$$

on voit immédiatement que les valeurs initiales de la fonction ainsi obtenue et de ses dérivées partielles de tous ordres sont essentiellement positives. Il en est de même de la fonction $\dfrac{1}{1 - 3\varepsilon\Theta(z)}$, que l'on peut, à cause de $\varepsilon < \frac{1}{3}$, développer suivant la formule

$$1 + 3\varepsilon\Theta + 3^2\varepsilon^2\Theta^2 + \ldots,$$

par suite, enfin, du produit

$$\mu\,\Theta(z)\,\frac{1}{1 - 3\varepsilon\,\Theta(z)},$$

second membre commun aux équations du système (20). Les valeurs initiales des dérivées principales de nos intégrales jouissent donc, elles aussi, de la propriété énoncée : car l'attribution aux quantités

$$t, \quad w', \quad w'', \quad w'''$$

des cotes respectives

$$1, \quad -K', \quad -K'', \quad -K'''$$

met tout d'abord en évidence la nature orthonome du système (20), et, cela étant, on aperçoit sans peine que le calcul des valeurs initiales des dérivées principales, effectué de proche en proche pour les classes successives à l'aide des relations du système (20) prolongé, conduit nécessairement à des résultats tous positifs.

Nous désignerons par $W'(t)$, $W''(t)$, $W'''(t)$ les intégrales considérées du système (20).

Nous ferons, en outre, observer ce qui suit :

Si l'on nomme $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon''_1, \varepsilon''_2, \ldots, \varepsilon'''_1, \varepsilon'''_2, \ldots$ des quantités positives (en nombre limité) vérifiant les relations

$$\begin{gathered}\varepsilon'_1+\varepsilon'_2+\ldots=\varepsilon,\\ \varepsilon''_1+\varepsilon''_2+\ldots=\varepsilon,\\ \varepsilon'''_1+\varepsilon'''_2+\ldots=\varepsilon,\end{gathered}$$

le système (20) entraîne évidemment comme conséquence

$$(22)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{d^{K'}w'}{dt^{K'}} &= \mu\Theta(z)+\varepsilon'_1\,\Theta(z)\frac{d^{K'}w'}{dt^{K'}}+\varepsilon'_2\,\Theta(z)\frac{d^{K'}w'}{dt^{K'}}+\ldots\\ &\quad+\varepsilon''_1\,\Theta(z)\frac{d^{K''}w''}{dt^{K''}}+\varepsilon''_2\,\Theta(z)\frac{d^{K''}w''}{dt^{K''}}+\ldots\\ &\quad+\varepsilon'''_1\,\Theta(z)\frac{d^{K'''}w'''}{dt^{K'''}}+\varepsilon'''_2\,\Theta(z)\frac{d^{K'''}w'''}{dt^{K'''}}+\ldots,\\ \frac{d^{K''}w''}{dt^{K''}} &= \text{idem},\\ \frac{d^{K'''}w'''}{dt^{K'''}} &= \text{idem}.\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, le système (20) entraînant aussi comme conséquences les relations

$$\frac{\mu\varepsilon\,\Theta^2(z)}{1-3\varepsilon\,\Theta(z)}=\varepsilon\,\Theta(z)\frac{d^{K'}w'}{dt^{K'}}=\varepsilon\,\Theta(z)\frac{d^{K''}w''}{dt^{K''}}=\varepsilon\,\Theta(z)\frac{d^{K'''}w'''}{dt^{K'''}},$$

si, dans l'une quelconque des équations (22), on remplace telle ou telle des sommes

$$\begin{gathered}\varepsilon'_1\,\Theta(z)\frac{d^{K'}w'}{dt^{K'}}+\varepsilon'_2\,\Theta(z)\frac{d^{K'}w'}{dt^{K'}}+\ldots,\\ \varepsilon''_1\,\Theta(z)\frac{d^{K''}w''}{dt^{K''}}+\varepsilon''_2\,\Theta(z)\frac{d^{K''}w''}{dt^{K''}}+\ldots,\\ \varepsilon'''_1\,\Theta(z)\frac{d^{K'''}w'''}{dt^{K'''}}+\varepsilon'''_2\,\Theta(z)\frac{d^{K'''}w'''}{dt^{K'''}}+\ldots\end{gathered}$$

par la quantité $\dfrac{\mu\varepsilon\Theta^2(z)}{1-3\varepsilon\,\Theta(z)}$, on tombe encore sur une conséquence de (20).

XIII. Aux variables indépendantes et aux fonctions inconnues,

$$x,\ y,\ \ldots,\ u',\ v',\ \ldots,\ u'',\ v'',\ \ldots,\ u''',\ v''',\ \ldots,$$

du système ($\mathfrak{S}$), faisons correspondre autant de quantités positives,

$$\xi,\quad \eta,\quad \ldots,\quad \upsilon'-\gamma',\quad \psi'-\gamma',\quad \ldots,\quad \upsilon''-\gamma'',\quad \psi''-\gamma'',\quad \ldots,\quad \upsilon'''-\gamma''',\quad \psi'''-\gamma''',\quad \ldots,$$

que nous nommerons, pour abréger, leurs *poids* respectifs; considérant ensuite une dérivée d'ordre k d'une inconnue, appelons *poids* de cette dérivée le quotient obtenu en divisant le poids de la fonction à laquelle elle appartient par ceux des k variables de différentiation; désignons enfin d'une manière générale par φ, . . . les poids respectifs des quantités $\mathfrak{f}$, ...

Cela posé, considérons une équation, conséquence de (20), subsistant entre z, $\frac{d^{K'}w'}{dt^{K'}}$, $\frac{d^{K''}w''}{dt^{K''}}$, $\frac{d^{K'''}w'''}{dt^{K'''}}$, et remplaçons-y la somme z par la somme

$$s = \xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\ldots+\varphi\mathfrak{f}+\ldots;$$

substituons, d'autre part, à la dérivée $\frac{d^{K'}w'}{dt^{K'}}$, qui peut figurer dans divers termes de l'équation considérée, divers produits obtenus chacun en multipliant l'une quelconque des dérivées dominantes de $\mathfrak{u}'$, $\mathfrak{v}'$, ... par son poids; effectuons, enfin, des substitutions analogues pour chacune des dérivées $\frac{d^{K''}w''}{dt^{K''}}$ et pour chacune des dérivées $\frac{d^{K'''}w'''}{dt^{K'''}}$: la relation résultante sera, comme il est bien facile de s'en rendre compte, identiquement vérifiée pour

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{l}
\mathfrak{u}' = \upsilon'\gamma'\ \ W'[\xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\ldots],\\
\mathfrak{v}' = \psi'\gamma'\ \ W'[\xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\ldots],\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathfrak{u}'' = \upsilon''\gamma''\ \ W''[\xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\ldots],\\
\mathfrak{v}'' = \psi''\gamma''\ \ W''[\xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\ldots],\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathfrak{u}''' = \upsilon'''\gamma'''\,W'''[\xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\ldots],\\
\mathfrak{v}''' = \psi'''\gamma'''\,W'''[\xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\ldots],\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{array}\right.$$

il suffit, pour le voir, d'observer qu'en vertu des formules (23), toute inconnue ou dérivée de première catégorie, multipliée par son poids, s'obtient en remplaçant, dans la fonction $W'(t)$ ou dans sa dérivée d'ordre égal, la variable t par la somme

$$\xi(x-x_0)+\eta(y-y_0)+\ldots$$

puis de faire une remarque analogue relativement aux inconnues ou dérivées de deuxième ou de troisième catégorie.

Prenons maintenant, dans le système $(\mathfrak{S})$, une équation quelconque, $(\mathfrak{s})$, et désignons par p', p'', p''' les nombres respectifs $(\geqq 0)$ des dérivées dominantes de première, deuxième, troisième catégorie qui figurent dans son second membre; par

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{D}'_1, & \mathfrak{D}'_2, & \ldots, & \mathfrak{D}'_{p'}, \\ \mathfrak{D}''_1, & \mathfrak{D}''_2, & \ldots, & \mathfrak{D}''_{p''}, \\ \mathfrak{D}'''_1, & \mathfrak{D}'''_2, & \ldots, & \mathfrak{D}'''_{p'''} \end{array}$$

ces dérivées respectives; par

$$\begin{array}{llll} \varpi'_1, & \varpi'_2, & \ldots, & \varpi'_{p'}, \\ \varpi''_1, & \varpi''_2, & \ldots, & \varpi''_{p''}, \\ \varpi'''_1, & \varpi'''_2, & \ldots, & \varpi'''_{p'''} \end{array}$$

leurs poids respectifs; par $\mathfrak{D}$ le premier membre de $(\mathfrak{s})$, et par ϖ le poids de $\mathfrak{D}$. Si l'entier p' n'est pas nul, on remplacera l'ensemble des termes en $\mathfrak{D}'_1, \mathfrak{D}'_2, \ldots, \mathfrak{D}'_{p'}$ qui figurent dans le second membre de $(\mathfrak{s})$ par

$$\frac{\varepsilon}{p'}\varpi'_1\,\Theta(s)\,\mathfrak{D}'_1 + \frac{\varepsilon}{p'}\varpi'_2\,\Theta(s)\,\mathfrak{D}'_2 + \ldots + \frac{\varepsilon}{p'}\varpi'_{p'}\,\Theta(s)\,\mathfrak{D}'_{p'};$$

si p' est nul, on remplacera cet ensemble absent par $\frac{\mu\varepsilon\,\Theta^2(s)}{1-3\varepsilon\,\Theta(s)}\cdot$ On effectuera des substitutions analogues pour les termes en $\mathfrak{D}''_1, \mathfrak{D}''_2, \ldots, \mathfrak{D}''_{p''}$ et pour les termes en $\mathfrak{D}'''_1, \mathfrak{D}'''_2, \ldots, \mathfrak{D}'''_{p'''}$ qui figurent dans le second membre de $(\mathfrak{s})$. Quant au terme indépendant des dérivées dominantes, on le remplacera par $\mu\,\Theta(s)$. On remplacera enfin le premier membre $\mathfrak{D}$ par $\varpi\,\mathfrak{D}$, et l'on multipliera les deux membres par $\frac{1}{\varpi}\cdot$ L'équation finalement obtenue, $((\mathfrak{s}))$, ne différera alors de $(\mathfrak{s})$ que par les coefficients, fonctions de $x, y, \ldots, \mathfrak{f}, \ldots$, qui figurent dans le second membre. A chaque équation du système $(\mathfrak{S})$ on fera correspondre de même une équation telle que $((\mathfrak{s}))$; *on obtiendra finalement un système*, $((\mathfrak{S}))$, *ne différant de* $(\mathfrak{S})$ *que par les coefficients des seconds membres, et identiquement vérifié par la substitution aux inconnues* des seconds membres de (23), c'est-à-dire *de fonctions qui, elles et toutes leurs dérivées secondaires, prennent en* x_0, $y_0, \ldots$ *des valeurs initiales nulles, tandis que leurs dérivées res-*

tantes y prennent toutes des valeurs initiales positives (XII). Chacun des nouveaux coefficients s'obtient d'ailleurs en faisant le produit de $\Theta(s)$ par quelque constante positive, et y ajoutant parfois le produit de $\frac{\Theta^2(s)}{1-3\varepsilon\Theta(s)}$ par quelque autre constante positive. La première de ces deux constantes, qui seule est importante à considérer, et que nous nommerons, pour abréger, *caractéristique* du coefficient, dépend de ε ou de μ suivant que le coefficient où elle figure multiplie ou non quelque dérivée dominante. Son produit par $\Theta(s)$ est identique au coefficient de $((\mathfrak{S}))$ dont il s'agit, ou l'admet pour majorante relativement aux valeurs $x_0, y_0, \ldots, 0, \ldots$ de $x, y, \ldots, \mathfrak{f}, \ldots$.

Il importe de remarquer que, dans les seconds membres du système $((\mathfrak{S}))$ que nous venons de former, *les caractéristiques dépendant de ε sont de degré zéro par rapport à l'ensemble des quantités*

$$(24) \qquad \xi, \quad \eta, \quad \ldots, \quad \upsilon', \quad \psi', \quad \ldots, \quad \upsilon'', \quad \psi'', \quad \ldots, \quad \upsilon''', \quad \psi''', \quad \ldots.$$

Effectivement, le poids d'une dérivée quelconque est, d'après notre définition, un produit de puissances, positives ou négatives, de ces quantités, et le degré de ce produit visiblement égal et de signe contraire à la cote première de la dérivée considérée; dès lors, les dérivées dominantes qui figurent dans une équation quelconque de $((\mathfrak{S}))$ ont pour poids respectifs des produits qui sont tous de degré $-(\Delta+1)$, en sorte que, après réduction à l'unité du coefficient du premier membre, les caractéristiques dépendant de ε sont de degré zéro par rapport à l'ensemble des quantités (24).

Il est bon de remarquer aussi qu'en augmentant, s'il le faut, d'un même entier négatif convenablement choisi les cotes premières, γ', γ'', γ''', des fonctions inconnues (augmentation évidemment permise, parce que, après elle comme avant, la définition de l'orthonomie reste applicable au système proposé S), *les poids φ, . . . des diverses quantités $\mathfrak{f}$, . . . seront tous de degré supérieur à zéro par rapport à l'ensemble des quantités* (24). Effectivement, parmi les cotes premières des diverses quantités $\mathfrak{f}, \ldots$, la plus grande algébriquement est Δ, d'où résulte que, parmi les cotes premières changées de signes, la plus petite algébriquement est $-\Delta$: il suffit donc que l'on ait $-\Delta > 0$, ou $\Delta < 0$. C'est ce que nous supposerons désormais.

XIV. *Si, par un choix convenable de la constante ε (moindre*

que $\frac{1}{3}$) *et des constantes* (24), *on peut faire en sorte que, dans les seconds membres de* (($\mathfrak{S}$)), *les caractéristiques dépendant de* ε *soient respectivement supérieures aux modules des valeurs numériques initiales que prennent, dans les seconds membres de* ($\mathfrak{S}$), *les coefficients des dérivées dominantes, on peut, en laissant à* ε *sa valeur, multipliant les quantités* (24) *par un même nombre convenablement choisi, et prenant pour* μ *une valeur convenablement choisie, faire en sorte que les coefficients des seconds membres de* (($\mathfrak{S}$)) (nous voulons dire les coefficients des dérivées dominantes et les termes indépendants de ces dérivées) *soient respectivement majorants pour les coefficients correspondants des seconds membres de* ($\mathfrak{S}$).

Effectivement, supposons que, par un choix convenable de ε et des constantes (24), les caractéristiques dépendant de ε dans les seconds membres de (($\mathfrak{S}$)) soient respectivement supérieures aux modules des valeurs numériques initiales que prennent, dans les seconds membres de ($\mathfrak{S}$), les coefficients des dérivées dominantes, et désignons par M, . . . les caractéristiques dont il s'agit. D'autre part, soit r une constante positive satisfaisant à la double condition : 1° d'être inférieure à des rayons de convergence simultanés des coefficients des seconds membres de ($\mathfrak{S}$), quand on suppose ces coefficients développés à partir des valeurs initiales des quantités dont ils dépendent; 2° d'être assez petite pour que, en remplaçant dans les développements des coefficients des dérivées dominantes les coefficients numériques par leurs modules et les accroissements par r, les sommes ainsi obtenues soient respectivement inférieures aux caractéristiques M, . . . (la chose est évidemment possible, puisque, dans ces développements, les termes constants ont des modules respectivement *inférieurs* aux constantes M, . . .). La constante r étant ainsi fixée, multiplions les nombres (24) par une constante positive telle que les nouvelles valeurs de $\xi, \eta, \ldots, \varphi, \ldots$ soient toutes supérieures à $\frac{1}{r}$ [ce qui est possible, puisque $\xi, \eta, \ldots, \varphi, \ldots$ ont des degrés positifs par rapport à l'ensemble des quantités (24)], et *remplaçons désormais les constantes* (24) *par les produits ainsi obtenus :* une pareille multiplication ne change pas les valeurs des caractéristiques dépendant de ε, parce que chacune de ces caractéristiques est de degré zéro par

rapport à l'ensemble des quantités (24), et, en conséquence, la double condition à laquelle nous avons assujetti r ne cesse pas d'être vérifiée. Soient alors ω le poids maximum des premiers membres du système ($\mathfrak{S}$) [ou (($\mathfrak{S}$))], et N une constante positive supérieure à toutes celles qu'on obtient lorsque, après avoir développé à partir des valeurs initiales des quantités qui y figurent les termes indépendants des dérivées dominantes dans les seconds membres de ($\mathfrak{S}$), on remplace dans ces développements les coefficients numériques par leurs modules et les accroissements par r. Cela étant, si l'on prend $\mu > N\omega$, toute caractéristique dépendant de μ, étant au moins égale à $\frac{\mu}{\omega}$, sera, par suite, supérieure à N.

Dans ces conditions, on voit sans peine que les coefficients du système ($\mathfrak{S}$) admettent comme majorantes, par rapport aux valeurs x_0, y_0, ..., 0, ... de x, y, ..., $\mathfrak{f}$, ..., les coefficients correspondants du système (($\mathfrak{S}$)).

XV. *Si, par un choix convenable de la constante* ε $\left(\textit{moindre que } \frac{1}{3}\right)$ *et des constantes* (24), *on peut faire en sorte que, dans les seconds membres de* (($\mathfrak{S}$)), *les caractéristiques dépendant de* ε *soient respectivement supérieures aux modules des valeurs numériques initiales que prennent, dans les seconds membres de* ($\mathfrak{S}$), *les coefficients des dérivées dominantes, les développements spécifiés à l'alinéa* X *sont nécessairement convergents.*

En rapprochant de notre hypothèse actuelle les conclusions de l'alinéa précédent, on voit que la constante ε, les constantes (24) et la constante μ peuvent être déterminées de telle façon que les coefficients des seconds membres de (($\mathfrak{S}$)) soient respectivement majorants pour ceux de ($\mathfrak{S}$). Cela fait, rappelons-nous que les valeurs initiales imposées dans le système ($\mathfrak{S}$) aux inconnues et à leurs dérivées paramétriques de tous ordres sont nulles, tandis que les valeurs initiales prises par les intégrales effectives dont nous avons constaté l'existence dans le système (($\mathfrak{S}$)) et par leurs dérivées paramétriques sont positives ou nulles.

Observons maintenant que, dans les deux systèmes

$$(\mathfrak{S}) \text{ prolongé}, \qquad ((\mathfrak{S})) \text{ prolongé},$$

les relations se correspondent chacune à chacune. Considérons alors deux relations correspondantes. Dans la première [celle qui provient de $(\mathfrak{S})$ prolongé], le premier membre est une certaine dérivée principale des intégrales hypothétiques de $(\mathfrak{S})$, et le second membre une somme de produits pouvant contenir comme facteurs quatre sortes de quantités, savoir : certains entiers positifs; certains coefficients des seconds membres de $(\mathfrak{S})$; certaines dérivées partielles de ces coefficients; enfin, certaines dérivées, principales ou paramétriques, des intégrales hypothétiques de $(\mathfrak{S})$. Si de cette relation [provenant de $(\mathfrak{S})$ prolongé] on passe à la relation correspondante [provenant de $((\mathfrak{S}))$ prolongé], cette dernière est composée exactement de la même façon avec les dérivées principales ou paramétriques des intégrales effectives de $((\mathfrak{S}))$, les entiers positifs dont nous venons de parler, les majorantes des coefficients de $(\mathfrak{S})$, et les dérivées partielles de ces majorantes.

Cela étant, considérons, dans $(\mathfrak{S})$ prolongé, les groupes successifs

$$(25)\qquad (\mathfrak{t})_{\Delta+1},\quad (\mathfrak{t})_{\Delta+2},\quad \ldots$$

dont il est question à l'alinéa X, et, dans $((\mathfrak{S}))$ prolongé, les groupes *correspondants,*

$$((\mathfrak{t}))_{\Delta+1},\quad ((\mathfrak{t}))_{\Delta+2},\quad \ldots.$$

En partageant chacun de ces groupes en sous-groupes successifs d'après les *classes* croissantes des premiers membres (n° 106), nous aurons en définitive, dans $(\mathfrak{S})$ prolongé, les groupes

$$(26)\qquad (\mathfrak{G})',\quad (\mathfrak{G})'',\quad \ldots$$

et, dans $((\mathfrak{S}))$ prolongé, les groupes *correspondants*

$$((\mathfrak{G}))',\quad ((\mathfrak{G}))'',\quad \ldots.$$

Si, dans les deux groupes

$$(\mathfrak{G})',\quad ((\mathfrak{G}))',$$

on remplace par les valeurs initiales qui leur conviennent respectivement de part et d'autre les variables, les inconnues, et leurs dérivées paramétriques, chacun des groupes résultants, à l'aide desquels on cherche à déterminer de part et d'autre les valeurs initiales des déri-

vées principales de classe minima, a pour premiers membres (sans omission ni répétition) les dérivées principales de cette classe; quant aux seconds membres, ils ont pris des valeurs numériques connues, et l'on voit, d'après ce qui a été dit plus haut, que ceux du deuxième groupe sont positifs et respectivement supérieurs aux modules de ceux du premier groupe.

Cela étant, considérons les groupes

$$(\mathfrak{G})'', \quad ((\mathfrak{G}))'',$$

et, dans ces deux groupes, remplaçons les variables, les inconnues, et leurs dérivées paramétriques par les valeurs initiales qui leur correspondent respectivement de part et d'autre, puis les dérivées principales de classe minima par les valeurs numériques respectivement obtenues comme il vient d'être dit. Chacun des groupes résultants, à l'aide desquels on cherche à déterminer de part et d'autre les valeurs numériques initiales des dérivées principales de la classe suivante, a pour premiers membres les dérivées principales de cette classe; quant aux seconds membres, ils ont pris des valeurs numériques connues, et l'on voit, d'après ce qui a été dit plus haut, que ceux du deuxième groupe sont positifs et respectivement supérieurs aux modules de ceux du premier groupe.

En poursuivant ce raisonnement de proche en proche pour les dérivées principales de classe indéfiniment croissante, et nous reportant à ce qui a été dit plus haut sur les valeurs initiales des inconnues et de leurs dérivées paramétriques, on voit que les développements (bien déterminés) construits à l'aide des valeurs initiales données et de celles que fournit la résolution successive des groupes (25) ou (26), ont des coefficients dont les modules sont respectivement inférieurs aux coefficients correspondants (positifs) des développements des intégrales *effectives* de $((\mathfrak{S}))$: par suite, ils sont, comme ces derniers, nécessairement convergents.

XVI. *On peut, par un choix convenable de la constante* ε $\left(\textit{moindre que } \frac{1}{3}\right)$ *et des constantes* (24), *faire en sorte que, dans les seconds membres de* $((\mathfrak{S}))$, *les caractéristiques dépendant de* ε *soient respectivement supérieures aux modules des valeurs numériques initiales que prennent, dans les seconds membres de* $(\mathfrak{S})$, *les coefficients des dérivées dominantes.*

Soient, en effet :

P le plus grand des modules initiaux que prennent, dans les seconds membres de ($\mathfrak{S}$), les coefficients des dérivées dominantes;

Q un entier positif supérieur à la plus grande valeur que puisse atteindre, pour une équation quelconque du système ($\mathfrak{S}$), le nombre des dérivées dominantes figurant au second membre;

$j_3, j_4, \ldots, j_p$ les plus petites valeurs et $J_3, J_4, \ldots, J_p$ les plus grandes valeurs que puissent respectivement atteindre les cotes troisième, quatrième, ..., $p^{\text{ième}}$ des diverses dérivées dominantes.

Désignant, comme au début de l'alinéa XIII, par

$$\xi, \quad \eta, \quad \ldots, \quad \upsilon'-\gamma', \quad \psi'-\gamma', \quad \ldots, \quad \upsilon''-\gamma'', \quad \psi''-\gamma'', \quad \ldots, \quad \upsilon'''-\gamma''', \quad \psi'''-\gamma''', \quad \ldots$$

les *poids* des variables indépendantes et des fonctions inconnues, et, en outre, par

$$\theta_1, \quad \theta_2, \quad \ldots, \quad \theta_p$$

p quantités positives dont les valeurs vont être fixées dans un instant, nous déterminerons les quantités (24) en fonctions de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ par les conditions : 1° que le poids d'une variable indépendante soit un produit de puissances de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ de cette variable; 2° que le poids d'une fonction inconnue soit le quotient de 1 par des puissances de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ de la fonction inconnue considérée. Le poids d'une dérivée de fonction inconnue aura alors pour valeur le quotient de 1 par des puissances de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ d'exposants respectivement égaux aux cotes première, seconde, ..., $p^{\text{ième}}$ de la dérivée dont il s'agit.

Cela étant, et la constante ε ayant une valeur moindre que $\frac{1}{3}$, on donnera à θ_1 une valeur quelconque (1 par exemple), et l'on déterminera successivement les quantités $\theta_p, \theta_{p-1}, \ldots, \theta_3, \theta_2$ de manière à vérifier les inégalités

$$\begin{cases} \theta_p > 1, \\ \theta_p > \dfrac{PQ}{\varepsilon}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_{p-1} > 1, \\ \theta_{p-1} > \dfrac{PQ}{\varepsilon}\theta_p^{J_p - j_p}; \end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \theta_3 & > 1, \\ \theta_3 & > \dfrac{PQ}{\varepsilon}\,\theta_4^{J_4-j_4}\ldots\theta_p^{J_p-j_p}; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \theta_2 & > 1, \\ \theta_2 & > \dfrac{PQ}{\varepsilon}\,\theta_3^{J_3-j_3}\theta_4^{J_4-j_4}\ldots\theta_p^{J_p-j_p}. \end{array}\right.$$

Si l'on considère maintenant une équation quelconque du système $((\mathfrak{S}))$, chacune des dérivées dominantes figurant au second membre a nécessairement, outre une cote première égale à celle $(\Delta+1)$ du premier membre : soit une cote seconde inférieure à celle du premier membre ; soit une cote seconde égale à celle du premier membre, avec une cote troisième inférieure ; etc.; soit des cotes seconde, troisième, ..., $(p-2)^{\text{ième}}$ respectivement égales à celles du premier membre, avec une cote $(p-1)^{\text{ième}}$ inférieure ; soit, enfin, des cotes seconde, troisième, ..., $(p-2)^{\text{ième}}$, $(p-1)^{\text{ième}}$ respectivement égales à celles du premier membre, avec une cote $p^{\text{ième}}$ inférieure. Comme les quantités θ_2, θ_3, ..., θ_p sont toutes supérieures à 1, les caractéristiques dépendant de ε ont donc, suivant le cas, une valeur supérieure à l'une ou à l'autre des quantités

$$\frac{\varepsilon}{Q}\,\theta_p^{j_p-J_p}\ldots\theta_4^{j_4-J_4}\theta_3^{j_3-J_3}\theta_2,$$

$$\frac{\varepsilon}{Q}\,\theta_p^{j_p-J_p}\ldots\theta_4^{j_4-J_4}\theta_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\varepsilon}{Q}\,\theta_p^{j_p-J_p}\theta_{p-1},$$

$$\frac{\varepsilon}{Q}\,\theta_p;$$

elles sont donc toutes supérieures à P.

XVII. Le simple rapprochement des alinéas XV et XVI suffit à prouver l'exactitude de notre énoncé général (formulé au début du présent numéro **114**).

115. Théorème d'existence. — *Tout système orthonome passif est complètement intégrable, c'est-à-dire admet un groupe (unique) d'intégrales ordinaires répondant à des données initiales arbitrairement choisies.*

C'est ce qui résulte du simple rapprochement des nos 108 (*in fine*) et **114**.

CHAPITRE VIII.

FONCTIONS IMPLICITES.

Propositions fondamentales.

116. On appelle système d'*équations différentielles totales* un système du premier ordre résolu par rapport à *toutes* les dérivées premières des fonctions inconnues ; ces dérivées se trouvent ainsi exprimées à l'aide des variables indépendantes, x, y, ..., et des fonctions inconnues, u, v, ... En désignant donc par U_x, V_x, ..., U_y, V_y, ... des composantes données, le type d'un pareil système sera

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial x} = U_x(x, y, \ldots, u, v, \ldots), & \dfrac{\partial v}{\partial x} = V_x(x, y, \ldots, u, v, \ldots), & \ldots, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = U_y(x, y, \ldots, u, v, \ldots), & \dfrac{\partial v}{\partial y} = V_y(x, y, \ldots, u, v, \ldots), & \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots; \end{array}\right.$$

la détermination initiale de chaque inconnue s'y réduisant à une simple constante schématique, les conditions initiales (n° 90) seront de la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} u = u_0 \\ v = v_0 \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \text{pour } x - x_0 = y - y_0 = \ldots = 0,$$

où $x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots$ désignent les valeurs numériques initiales des variables et des inconnues.

Le système est d'ailleurs visiblement orthonome (n° 104) : il suffit, pour s'en convaincre, d'attribuer aux variables indépendantes des cotes respectives toutes égales à 1, et aux fonctions inconnues des cotes respectives toutes nulles ; la cote (unique) de chaque dérivée se trouvera ainsi être égale à son ordre. Dans le cas d'une seule

variable indépendante, le système est forcément passif (n° 110). S'il y en a plus d'une, les inconnues y ont pour dérivées cardinales celles d'entre leurs dérivées secondes qui intéressent deux variables indépendantes distinctes, et il est nécessaire et suffisant, pour la passivité, que l'élimination des dérivées premières et secondes de u, v, ... (toutes principales) entre les équations (1) et celles qu'on en déduit par toutes les différentiations premières possibles conduise à des identités, c'est-à-dire à des relations qui soient vérifiées pour toutes valeurs numériques de x, y, ..., u, v, ... (n° 112); à chaque dérivée cardinale correspond ainsi une condition de passivité; par exemple, à la dérivée cardinale $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$ correspond, comme on le voit par un calcul très simple, la condition

$$\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_x}{\partial u} U_y + \frac{\partial U_x}{\partial v} V_y + \ldots = \frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial u} U_x + \frac{\partial U_y}{\partial v} V_x + \ldots.$$

Cela étant, le théorème général que nous avons établi sur l'existence des intégrales dans les systèmes orthonomes (n° 115) nous fournit la conséquence particulière suivante :

En désignant par x_0, y_0, ..., u_0, v_0, ... des valeurs numériques arbitrairement choisies dans les limites d'olotropie communes à tous les seconds membres, le système (1), *supposé passif, admet un groupe* (*unique*) *d'intégrales répondant aux conditions initiales* (2).

Nous allons appliquer ce principe à un système particulier dont la considération nous sera plus loin fort utile.

117. Nous poserons tout d'abord la définition suivante :

Considérant un système de fonctions,

$$(3) \qquad \begin{cases} F_1(X, Y, Z, \ldots, T), \\ F_2(X, Y, Z, \ldots, T), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_m(X, Y, Z, \ldots, T), \end{cases}$$

en nombre *au plus égal* à celui des variables X, Y, Z, ..., T, nous nommerons *déterminant différentiel de ces m fonctions par rapport à m variables désignées* le déterminant (au signe près) qui a pour éléments les dérivées premières des m fonctions par rapport

aux m variables dont il s'agit; ce déterminant ne peut manquer d'être olotrope dans les limites où les fonctions (3) le sont elles-mêmes (n° 61, I).

Pour avoir les divers déterminants différentiels du système de ces fonctions, il suffit donc de former le Tableau

$$\begin{array}{ccccc} \frac{\partial F_1}{\partial X}, & \frac{\partial F_1}{\partial Y}, & \frac{\partial F_1}{\partial Z}, & \ldots, & \frac{\partial F_1}{\partial T}, \\ \frac{\partial F_2}{\partial X}, & \frac{\partial F_2}{\partial Y}, & \frac{\partial F_2}{\partial Z}, & \ldots, & \frac{\partial F_2}{\partial T}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \frac{\partial F_m}{\partial X}, & \frac{\partial F_m}{\partial Y}, & \frac{\partial F_m}{\partial Z}, & \ldots, & \frac{\partial F_m}{\partial T} \end{array}$$

(qui contient m lignes et au moins m colonnes), et d'en extraire de toutes les manières possibles m colonnes.

118. Soient

$$(4) \qquad \begin{cases} f_1\,(u, v, \ldots, x, y, \ldots), \\ f_2\,(u, v, \ldots, x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_m(u, v, \ldots, x, y, \ldots) \end{cases}$$

m fonctions des diverses variables

$$\begin{array}{l} u, \ v, \ \ldots, \\ x, \ y, \ \ldots, \end{array}$$

dont *les premières,* u, v, ..., *sont en nombre* m *comme les fonctions.* Supposons que les fonctions (4) soient toutes développables (n° 76) à partir des valeurs particulières

$$(5) \qquad u_0, \ v_0, \ \ldots, \ x_0, \ y_0, \ \ldots$$

de u, v, ..., x, y, ..., et qu'en outre le déterminant différentiel, $\Delta\,(u, v, \ldots, x, y, \ldots)$, de ces m fonctions par rapport aux m variables u, v, ... ne s'évanouisse pas pour les valeurs (5).

Cela étant, considérons le système différentiel du premier ordre

$$(6) \qquad \begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial f_m}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_m}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial f_m}{\partial x} = 0; \end{cases}$$

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_1}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f_1}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\ldots+\dfrac{\partial f_1}{\partial y}=0,\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f_2}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\ldots+\dfrac{\partial f_2}{\partial y}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f_m}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\ldots+\dfrac{\partial f_m}{\partial y}=0; \end{array}\right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

dont les premiers membres se déduisent des expressions (4) en y considérant u, v, ... comme des fonctions indéterminées de $x, y, \ldots$, et effectuant sur elles, conformément à la règle des fonctions composées, toutes les différentiations premières possibles. Le déterminant $\Delta(u, v, \ldots, x, y, \ldots)$ étant, par hypothèse, différent de zéro pour les valeurs (5), l'est, par là même, pour toutes valeurs de $u, v, \ldots, x, y, \ldots$ suffisamment voisines de ces dernières; et, dans ces limites, l'algorithme de Cramer sera applicable aux groupes (6), (7), etc., qui seront résolubles, le premier par rapport aux m dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial x},\quad \ldots,$$

le second par rapport aux m dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial y},\quad \ldots,$$

et ainsi de suite. En effectuant ces résolutions, on est conduit à un système différentiel total du premier ordre (n° 116),

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial x}=U_x, & \dfrac{\partial v}{\partial x}=V_x, & \ldots,\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=U_y, & \dfrac{\partial v}{\partial y}=V_y, & \ldots,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

dont les seconds membres sont des fonctions connues de $u, v, \ldots, x, y, \ldots$. Je dis que *ce système*, (8), *est passif*.

Pour l'établir, on pourrait se borner à faire voir, conformément aux indications du n° 116, que l'élimination des dérivées premières et secondes, effectuée entre les équations (8) et celles qu'on en déduit par toutes les différentiations possibles du premier ordre,

conduit à des identités : mais il est aussi simple, dans le cas actuel, de faire voir, plus généralement, que l'élimination des dérivées des ordres 1, 2, ..., g, effectuée entre les équations (8) et celles qu'on en déduit par toutes les différentiations possibles des ordres 1, 2, ..., $g-1$, conduit, quel que soit g, à des identités. C'est ce que nous allons établir.

I. Considérant le système du premier ordre, S', formé par les groupes (6), (7), etc., nommons S'' le système du second ordre déduit de S' par toutes les différentiations possibles du premier ordre; S''' le système du troisième ordre déduit de S' par toutes les différentiations possibles du second ordre; et ainsi de suite indéfiniment. Considérant, d'autre part, le système du premier ordre, (8), déduit de S' par résolution, écrivons-le sous la forme

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial x}-U_x=0, & \dfrac{\partial v}{\partial x}-V_x=0, & \ldots, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}-U_y=0, & \dfrac{\partial v}{\partial y}-V_y=0, & \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, \end{array}\right.$$

et nommons T' le système (9); T'' le système du second ordre déduit de T' par toutes les différentiations possibles du premier ordre; T''' le système du troisième ordre déduit de T' par toutes les différentiations possibles du second ordre; et ainsi de suite indéfiniment. Il est clair qu'en désignant par g un entier positif arbitraire, les premiers membres de $S^{(g)}$ et $T^{(g)}$ sont des expressions entières par rapport aux dérivées d'ordres 1, 2, ..., g de u, v, ..., et que les coefficients de ces expressions entières sont développables, comme les fonctions (4), à partir des valeurs (5).

Je dis que *l'un quelconque des deux systèmes*

$$(10)\qquad (S', S'', \ldots, S^{(g)}),$$

$$(11)\qquad (T', T'', \ldots, T^{(g)})$$

peut se déduire de l'autre en ajoutant membre à membre les équations de cet autre préalablement multipliées par des facteurs convenablement choisis; les facteurs dont il s'agit sont d'ailleurs des expressions entières par rapport aux dérivées d'ordres 1, 2, ..., $g-1$ de u, v, ..., et les coefficients de ces expressions certaines fonctions développables à partir des valeurs (5).

Tout d'abord, le point que nous avons en vue est vrai pour les systèmes S′, T′. En effet, puisque les fonctions

$$\begin{matrix} U_x, & V_x, & \ldots, \\ U_y, & V_y, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{matrix}$$

respectivement substituées à

$$\begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial x}, & \ldots, \\ \frac{\partial u}{\partial y}, & \frac{\partial v}{\partial y}, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{matrix}$$

transforment en identités (quels que soient $u, v, \ldots, x, y, \ldots$) les équations (6), (7), etc., on aura, en considérant par exemple la première des équations (6), l'identité

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} U_x + \frac{\partial f_1}{\partial v} V_x + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0,$$

ou

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial u} U_x - \frac{\partial f_1}{\partial v} V_x - \ldots;$$

si donc, dans l'équation dont il s'agit, on remplace le terme $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ par cette dernière expression, qui lui est identiquement égale en $u, v, \ldots, x, y, \ldots$, elle prendra la forme

$$\frac{\partial f_1}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - U_x\right) + \frac{\partial f_1}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - V_x\right) + \ldots = 0.$$

En opérant de même sur chacune des équations (6), (7), etc., le système S′ prendra la forme

$$(12)\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - U_x\right) + \frac{\partial f_1}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - V_x\right) + \ldots = 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - U_x\right) + \frac{\partial f_2}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - V_x\right) + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial f_m}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - U_x\right) + \frac{\partial f_m}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - V_x\right) + \ldots = 0; \end{array} \right.$$

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial u}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - \mathrm{U}_y\right) + \dfrac{\partial f_1}{\partial v}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{V}_y\right) + \ldots = 0, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - \mathrm{U}_y\right) + \dfrac{\partial f_2}{\partial v}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{V}_y\right) + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial u}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - \mathrm{U}_y\right) + \dfrac{\partial f_m}{\partial v}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{V}_y\right) + \ldots = 0; \end{cases}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cela posé, désignons par q le nombre des équations contenues dans l'un quelconque des deux systèmes S', T' (ce nombre est égal au produit de m par le nombre des variables du groupe $x, y, \ldots$), et soient

$$(14)\qquad \mathrm{F}_1 = 0, \qquad \mathrm{F}_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{F}_q = 0,$$

$$(15)\qquad \mathrm{H}_1 = 0, \qquad \mathrm{H}_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{H}_q = 0$$

les équations de ces deux systèmes respectifs. La simple inspection des groupes (12), (13), etc. nous montre qu'on a identiquement (en $u, v, \ldots, x, y, \ldots$)

$$(16)\quad \begin{cases} \mathrm{F}_1 = \lambda_{1,1}\mathrm{H}_1 + \lambda_{1,2}\mathrm{H}_2 + \ldots + \lambda_{1,q}\mathrm{H}_q, \\ \mathrm{F}_2 = \lambda_{2,1}\mathrm{H}_1 + \lambda_{2,2}\mathrm{H}_2 + \ldots + \lambda_{2,q}\mathrm{H}_q, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \mathrm{F}_q = \lambda_{q,1}\mathrm{H}_1 + \lambda_{q,2}\mathrm{H}_2 + \ldots + \lambda_{q,q}\mathrm{H}_q, \end{cases}$$

où les λ désignent certaines fonctions de $u, v, \ldots, x, y, \ldots$; le déterminant formé par ces dernières est d'ailleurs identiquement égal à une puissance entière et positive de $\Delta(u, v, \ldots, x, y, \ldots)$, et, par suite, différent de zéro, en sorte que les formules (16) sont résolubles par rapport à $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \ldots, \mathrm{H}_q$. Cela étant, il résulte tout d'abord des identités (16), sous la forme où elles sont écrites, que chaque équation du système S' peut se déduire du système T' en ajoutant membre à membre les équations de ce dernier, préalablement multipliées par certaines fonctions de $u, v, \ldots, x, y, \ldots$ développables à partir des valeurs (5); et il résulte de ces mêmes identités, résolues par rapport à $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \ldots, \mathrm{H}_q$, que chaque équation de T' peut se déduire semblablement de S'.

Convenons maintenant d'une notation destinée à simplifier l'écriture.

Étant donnée une expression f, qui contient $u, v, \ldots, x, y, \ldots$, et des dérivées d'ordres quelconques de $u, v, \ldots$, nous désignerons par le symbole $\Omega_{x^\alpha y^\beta \ldots} f$ le résultat obtenu en exécutant sur f, *conformément à la règle des fonctions composées,* une dérivation d'ordres partiels $\alpha, \beta, \ldots$ par rapport à $x, y, \ldots$ respectivement : ce résultat est, comme on sait (n° 68), indépendant de l'ordre des dérivations.

Cela posé, une équation quelconque du système (11) est de la forme

$$(17) \qquad \Omega_{x^\alpha y^\beta \ldots} H_p = 0 \qquad (0 \leqq \alpha + \beta + \ldots \leqq g - 1, \ 1 \leqq p \leqq q),$$

et il résulte de ce qui vient d'être démontré sur S' et T' qu'en désignant par $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$ certaines fonctions de $u, v, \ldots, x, y, \ldots$ développables à partir des valeurs (5), l'équation (17) peut s'écrire

$$(18) \qquad \Omega_{x^\alpha y^\beta \ldots}(\mu_1 F_1 + \mu_2 F_2 + \ldots + \mu_q F_q) = 0.$$

Or, en développant, conformément aux règles de différentiation d'une somme et d'un produit, le premier membre de la relation (18), on tombe évidemment sur une somme de termes dont chacun est de la forme

$$\Omega_{x^{\alpha'} y^{\beta'} \ldots} \mu_r \times \Omega_{x^{\alpha''} y^{\beta''} \ldots} F_r \qquad (1 \leqq r \leqq q, \ \alpha' + \alpha'' = \alpha, \ \beta' + \beta'' = \beta, \ldots);$$

d'ailleurs, la relation

$$\Omega_{x^{\alpha''} y^{\beta''} \ldots} F_r = 0$$

appartient au système (10), et le facteur $\Omega_{x^{\alpha'} y^{\beta'} \ldots} \mu_r$ est une expression entière par rapport aux dérivées d'ordres 1, 2, ..., $g - 1$ de $u, v, \ldots$, les coefficients de l'expression dont il s'agit étant, comme μ_r, développables à partir des valeurs (5). Chaque relation du système (11) peut donc se déduire du système (10) de la manière indiquée au début du présent alinéa I; et la réciproque est vraie, en vertu d'un raisonnement semblable.

II. Revenons à notre énoncé général.

Pour établir la passivité du système (8), il suffit de prouver que le système formé par les groupes

$$(19) \qquad T', \quad T'', \quad \ldots, \quad T^{(g)}$$

équivaut numériquement à un autre système, résolu par rapport aux dérivées des ordres 1, 2, ..., g de $u, v, \ldots$. Or, il résulte de l'alinéa I

qu'en considérant u, v, ..., x, y, ... et les dérivées dont il s'agit comme autant de variables indépendantes distinctes [et assujettissant u, v, ..., x, y, ... à rester suffisamment voisins des valeurs (5)], les systèmes (10) et (11) admettent les mêmes solutions numériques. On peut dès lors, dans la démonstration qui nous reste à faire, substituer aux groupes (19) les groupes respectifs

$$S', \quad S'', \quad \ldots, \quad S^{(g)}. \tag{20}$$

Cela posé, on observera que, pour avoir le groupe

$$S^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, g),$$

il suffit de considérer le système

$$\Omega_{x^\alpha y^\beta \ldots} f_1 = 0, \qquad \Omega_{x^\alpha y^\beta \ldots} f_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Omega_{x^\alpha y^\beta \ldots} f_m = 0, \tag{21}$$

et d'y attribuer successivement à α, β, ... les divers systèmes de valeurs entières, positives ou nulles, qui vérifient la relation

$$\alpha + \beta + \ldots = k.$$

Comme on l'aperçoit sans peine, le système (21), composé de m équations, est linéaire par rapport aux m dérivées semblables

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\ldots} u}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta \ldots}, \quad \frac{\partial^{\alpha+\beta+\ldots} v}{\partial x^\alpha \, \partial y^\beta \ldots}, \quad \ldots; \tag{22}$$

celles-ci y ont pour coefficients les éléments du déterminant différentiel

$$\Delta(u, v, \ldots, x, y, \ldots),$$

qu'on suppose différent de zéro, et les autres termes ne contiennent, avec u, v, ..., x, y, ..., que des dérivées de u, v, ... d'ordre inférieur à $\alpha + \beta + \ldots$; la résolution du système (21) par rapport aux dérivées (22) fournit donc pour ces dernières des expressions ne contenant, avec u, v, ..., x, y, ..., que des dérivées d'ordre inférieur à $\alpha + \beta + \ldots$. Il en résulte évidemment que les groupes (20) sont successivement résolubles par rapport aux dérivées des ordres 1, 2, ..., g.

119. *Les mêmes choses étant posées qu'au début du numéro précédent, le système différentiel* S', *formé des groupes* (6), (7), *etc., admet un groupe d'intégrales, et un seul, vérifiant les*

conditions initiales

$$\left.\begin{array}{l} u = u_0 \\ v = v_0 \\ \dots\dots \end{array}\right\} \quad \text{pour } x - x_0 = y - y_0 = \dots = 0.$$

De la relation établie plus haut entre les systèmes S′ et T′ (n° 118, I) il résulte, en effet, que les groupes d'intégrales vérifiant les conditions initiales imposées par notre énoncé sont les mêmes pour ces deux systèmes. Or, le système T′ ou (8), étant passif, admet un pareil groupe d'intégrales, et un seul : il en est donc de même du système S′.

120. *Soient*

$$(23)\qquad \left\{\begin{array}{l} f_1\,(u, v, \dots, x, y, \dots) = 0, \\ f_2\,(u, v, \dots, x, y, \dots) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ f_m(u, v, \dots, x, y, \dots) = 0 \end{array}\right.$$

m équations simultanées entre les diverses variables

$$\begin{array}{l} u, \ v, \ \dots \\ x, \ y, \ \dots, \end{array}$$

dont les premières, u, v, ..., sont en nombre m comme les équations. Supposons que les premiers membres, f_1, f_2, ..., f_m, soient tous développables (n° 76) *à partir des valeurs particulières*

$$(24)\qquad u_0, \ v_0, \ \dots, \qquad x_0, \ y_0, \ \dots$$

de u, v, ..., x, y, ..., et s'annulent pour les valeurs en question; supposons en outre que le déterminant différentiel,

$$\Delta(u, v, \dots, x, y, \dots),$$

des m premiers membres par rapport aux m variables u, v, ... ne s'annule pas pour les valeurs (24).

Cela étant :

1° *Le système des équations proposées* (23) *est identiquement vérifié par la substitution à u, v, ... d'un certain groupe de fonctions de x, y, ...,*

$$\begin{array}{l} u = \upsilon(x, y, \dots), \\ v = \varphi(x, y, \dots), \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \end{array}$$

développables à partir des valeurs x_0, y_0, ..., *et ayant pour valeurs initiales respectives* u_0, v_0, ...

2° *Si l'on considère, en même temps que le système proposé* (23), *le système des formules*

$$(25)\quad \begin{cases} u - \upsilon(x, y, \ldots) = 0, \\ v - \varphi(x, y, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

toute équation du système (23) *peut se déduire du système* (25) *en ajoutant membre à membre les diverses équations* (25), *préalablement multipliées par certaines fonctions de* $u, v, \ldots, x, y, \ldots$ *développables à partir des valeurs* (24); *et toute équation du système* (25) *peut se déduire semblablement du système* (23).

I. Supposons pour un instant que le système (23) soit, comme il est dit dans la première partie de notre énoncé, identiquement vérifié par la substitution à u, v, ... d'un groupe de fonctions de x, y, ... développables à partir de x_0, y_0, ... et s'y réduisant respectivement à u_0, v_0, ... Après cette substitution, les premiers membres de (23) deviennent des fonctions composées de x, y, ..., développables à partir de x_0, y_0, ..., et auxquelles s'appliquent les règles de différentiation exposées aux n°s 62 et 64; ces fonctions sont d'ailleurs identiquement nulles. En conséquence, les fonctions substituées à u, v, ..., et que, pour plus de simplicité, nous désignerons aussi par u, v, ..., satisfont non seulement aux équations (23), mais encore à toutes celles qui s'en déduisent par différentiations, et notamment au système S′ considéré plus haut (n°s 118 et 119).

Réciproquement, si, dans le système S′, on considère, conformément à ce qui a été dit au n° 119, le groupe (unique) d'intégrales répondant aux conditions initiales

$$\left.\begin{array}{l} u = u_0 \\ v = v_0 \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \text{pour } x - x_0 = y - y_0 = \ldots = 0,$$

ces intégrales satisfont, comme nous allons le voir, au système proposé (23).

Effectivement, le système S′ se composant des groupes (6), (7), etc. du n° 118, on voit qu'après la substitution à u, v, ... des intégrales

dont il s'agit, les fonctions composées

$$\begin{array}{l} f_1\,(u, v, \ldots, x, y, \ldots), \\ f_2\,(u, v, \ldots, x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_m(u, v, \ldots, x, y, \ldots) \end{array}$$

ont leurs diverses dérivées premières toutes identiquement nulles : ces fonctions se réduisent donc à des constantes (n° 94). D'ailleurs, quand x, y, ... prennent à la fois leurs valeurs initiales x_0, y_0, ..., les intégrales u, v, ... prennent respectivement aussi leurs valeurs initiales u_0, v_0, ..., et, par suite, les fonctions composées prennent respectivement les valeurs

$$\begin{array}{l} f_1\,(u_0, v_0, \ldots, x_0, y_0, \ldots), \\ f_2\,(u_0, v_0, \ldots, x_0, y_0, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_m(u_0, v_0, \ldots, x_0, y_0, \ldots), \end{array}$$

toutes nulles par hypothèse : les constantes dont nous avons parlé sont donc nulles, c'est-à-dire que les équations (23) sont identiquement vérifiées.

Ainsi se trouve établie la première partie de notre énoncé.

II. *Si la fonction*

$$F(u, v, \ldots, x, y, \ldots) \tag{26}$$

est développable à partir des valeurs

$$u_0, \quad v_0, \quad \ldots, \qquad x_0, \quad y_0, \quad \ldots, \tag{27}$$

considérées comme initiales, et si les fonctions

$$\upsilon(x, y, \ldots), \qquad \varphi(x, y, \ldots), \qquad \ldots,$$

développables à partir de x_0, y_0, ..., *ont pour valeurs initiales respectives*

$$u_0, \quad v_0, \quad \ldots,$$

on a l'identité

$$\left.\begin{array}{r l} F(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = & \lambda(u, v, \ldots, x, y, \ldots)[u - \upsilon(x, y, \ldots)] \\ & + \mu(u, v, \ldots, x, y, \ldots)[v - \varphi(x, y, \ldots)] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \omega(x, y, \ldots), \end{array}\right\} \tag{28}$$

où

$$\lambda(u, v, \ldots, x, y, \ldots), \quad \mu(u, v, \ldots, x, y, \ldots), \quad \ldots, \quad \omega(x, y, \ldots)$$

désignent certaines fonctions développables, les premières à partir de $u_0, v_0, \ldots, x_0, y_0, \ldots$, *la dernière à partir de* $x_0, y_0, \ldots$.

Effectivement, si l'on pose

$$(29) \qquad \begin{cases} u - \upsilon(x, y, \ldots) = \mathrm{U}, \\ v - \varphi(x, y, \ldots) = \mathrm{V}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

la substitution à $u, v, \ldots$ de leurs valeurs tirées de ces formules transforme $\mathrm{F}(u, v, \ldots, x, y, \ldots)$ en une fonction

$$(30) \qquad \begin{cases} \mathrm{F}[\upsilon(x, y, \ldots) + \mathrm{U}, \varphi(x, y, \ldots) + \mathrm{V}, \ldots, x, y, \ldots] \\ \text{ou} \\ \qquad \mathrm{G}(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \ldots, x, y, \ldots), \end{cases}$$

développable (n° 59) à partir des valeurs

$$(31) \qquad 0, \quad 0, \quad \ldots, \quad x_0, \quad y_0, \quad \ldots$$

des variables

$$(32) \qquad \mathrm{U}, \quad \mathrm{V}, \quad \ldots, \quad x, \quad y, \quad \ldots.$$

Si l'on ordonne par rapport à U, V, ... le développement de la fonction (30), et qu'on désigne par $\omega(x, y, \ldots)$ le terme indépendant de ces variables, développable à partir de $x_0, y_0, \ldots$, un groupement convenable des termes restants nous donnera, pour (30), l'expression

$$(33) \qquad \Lambda\mathrm{U} + \mathrm{MV} + \ldots + \omega(x, y, \ldots),$$

où Λ, M, ... désignent certaines fonctions des variables (32) développables à partir des valeurs (31). Finalement, si, dans l'expression (33), identiquement égale à (30), on remplace U, V, ... par les premiers membres des formules respectives (29), on régénère évidemment la fonction (26), et celle-ci prend, dès lors, la forme assignée par l'énoncé.

III. *Si l'équation*

$$\mathrm{F}(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0,$$

dont on suppose le premier membre développable à partir des valeurs initiales (27), *est identiquement vérifiée par la substitution à* u, v, ... *des fonctions*

$$\upsilon(x, y, \ldots), \qquad \varphi(x, y, \ldots), \qquad \ldots,$$

développables à partir de x_0, y_0, ... *et ayant pour valeurs initiales respectives* u_0, v_0, ..., *elle peut se déduire du système*

$$\begin{aligned} u - \upsilon(x, y, \ldots) &= 0, \\ v - \varphi(x, y, \ldots) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

en ajoutant membre à membre les équations de ce dernier, préalablement multipliées par certaines fonctions de u, v, ..., x, y, ... *développables à partir des valeurs* (27).

Car la fonction $\omega(x, y, \ldots)$, qui figure dans l'identité (28), doit alors s'annuler identiquement.

IV. Il nous est facile maintenant d'établir la seconde partie de notre énoncé général.

Soient, en effet,

$$\begin{aligned} u &= \upsilon(x, y, \ldots), \\ v &= \varphi(x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

les intégrales du système S' qui satisfont aux conditions initiales

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 \\ v &= v_0 \\ \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad \text{pour } x - x_0 = y - y_0 = \ldots = 0$$

(n° 119). Puisque ces intégrales vérifient identiquement, en vertu de l'alinéa I, les équations (23), il résulte de l'alinéa III qu'on a identiquement en u, v, ..., x, y, ...

$$(34) \qquad \left\{\begin{aligned} f_1 &= (u - \upsilon)\lambda_1 + (v - \varphi)\mu_1 + \ldots, \\ f_2 &= (u - \upsilon)\lambda_2 + (v - \varphi)\mu_2 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m &= (u - \upsilon)\lambda_m + (v - \varphi)\mu_m + \ldots, \end{aligned}\right.$$

où

$$\begin{matrix} \lambda_1, & \mu_1, & \dots, \\ \lambda_2, & \mu_2, & \dots, \\ \dots, & \dots, & \dots, \\ \lambda_m, & \mu_m, & \dots \end{matrix}$$

désignent m^2 fonctions convenablement choisies de $u, v, \ldots, x, y, \ldots$ développables à partir des valeurs (24), que nous considérons comme initiales. Je dis que le déterminant formé par ces m^2 fonctions prend, pour les valeurs (24), une valeur numérique essentiellement différente de zéro.

Calculons, en effet, la valeur initiale du déterminant différentiel de $f_1, f_2, \ldots, f_m$ par rapport aux m variables $u, v, \ldots$. En ayant recours aux notations que définissent les formules (29), les formules (34) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} f_1 &= \lambda_1 \mathrm{U} + \mu_1 \mathrm{V} + \ldots, \\ f_2 &= \lambda_2 \mathrm{U} + \mu_2 \mathrm{V} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_m &= \lambda_m \mathrm{U} + \mu_m \mathrm{V} + \ldots, \end{aligned}$$

et la première, différentiée par rapport à la variable u, nous donne

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} = \lambda_1 \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u} + \mu_1 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u} + \ldots + \mathrm{U} \frac{\partial \lambda_1}{\partial u} + \mathrm{V} \frac{\partial \mu_1}{\partial u} + \ldots;$$

or, les quantités U, V, ... ayant des valeurs initiales nulles, on peut, pour calculer la valeur initiale de $\frac{\partial f_1}{\partial u}$, faire abstraction, dans le second membre, des termes

$$\mathrm{U} \frac{\partial \lambda_1}{\partial u} + \mathrm{V} \frac{\partial \mu_1}{\partial u} + \ldots,$$

c'est-à-dire opérer comme si les facteurs $\lambda_1, \mu_1, \ldots$ étaient des constantes; une remarque analogue est applicable à tous les éléments du déterminant $\Delta(u, v, \ldots, x, y, \ldots)$, et, dès lors, la valeur initiale de Δ s'obtiendra en multipliant la valeur initiale du déterminant

$$(35) \qquad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \dots \\ \lambda_2 & \mu_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_m & \mu_m & \dots \end{vmatrix}$$

par celle du déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial u} & \frac{\partial V}{\partial u} & \cdots \\ \frac{\partial U}{\partial v} & \frac{\partial V}{\partial v} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \\ . & . & \cdots \\ . & . & \cdots \end{vmatrix} = 1.$$

La valeur initiale du déterminant (35) est donc égale à celle du déterminant Δ, par suite essentiellement $\neq 0$; en conséquence, ce même déterminant (35) ne s'annule pas non plus pour les valeurs de u, v, ..., x, y, ... suffisamment voisines des valeurs (24), et, dans ces limites, les relations (34) sont résolubles par rapport à $u - \upsilon$, $v - \varphi$, ...

Cela étant, si l'on considère les identités (34), en premier lieu sous la forme même où elles sont écrites, et en second lieu après leur résolution par rapport aux différences $u - \upsilon$, $v - \varphi$, ..., on voit que l'un quelconque des deux systèmes

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad f_m = 0$$

et

$$u - \upsilon = 0, \qquad v - \varphi = 0, \qquad \ldots$$

peut se déduire de l'autre comme l'indique notre énoncé.

121. Lorsque le système (23), considéré au numéro précédent, satisfait à toutes les conditions qui s'y trouvent énoncées, nous dirons qu'il est *résoluble par rapport aux variables* u, v, ... *à partir des valeurs numériques* (24).

On observera que les dérivées de tous ordres des fonctions de x, y, ... obtenues à l'aide de cette résolution peuvent, par la considération des systèmes successifs S′, S″, S‴, ... (n° 118), s'exprimer à l'aide de x, y, ... et des fonctions elles-mêmes.

122. Considérons, entre des variables s, t, ..., qu'on regarde comme indépendantes, deux systèmes de relations dont les premiers membres (après réduction des seconds à zéro) soient tous développables à partir de certaines valeurs numériques s_0, t_0, ..., qu'on regarde comme *initiales :* cela posé, nous dirons que le second système est une *combinaison multiplicatoire* du premier, si chacune de ses équations peut s'obtenir en ajoutant membre à membre celles

du premier, préalablement multipliées par certaines fonctions de s, t, ... développables à partir de s_0, t_0, ... Si chacun des deux systèmes proposés est une combinaison multiplicatoire de l'autre, les systèmes seront dits être en *corrélation multiplicatoire*.

Étant donnés, entre les variables s, t, ..., trois systèmes de relations, si le dernier est une combinaison multiplicatoire du second, et le second une combinaison multiplicatoire du premier (dans le voisinage des mêmes valeurs initiales), le dernier est aussi, comme on le voit sans peine, une combinaison multiplicatoire du premier. Par suite, si deux systèmes, successivement comparés à un même troisième, sont avec lui en corrélation multiplicatoire, ils jouissent l'un par rapport à l'autre de cette même propriété.

Lorsque deux systèmes sont en corrélation multiplicatoire, ils admettent évidemment, dans un voisinage suffisamment rapproché des valeurs initiales, les mêmes solutions numériques par rapport aux variables qui s'y trouvent engagées.

Les définitions posées ci-dessus permettent d'exprimer comme il suit la dernière partie de l'énoncé du n° 120 :

Lorsqu'un système est résoluble, conformément au principe général des fonctions implicites, à partir de certaines valeurs numériques des indéterminées qui s'y trouvent engagées (n° 121), *il est en corrélation multiplicatoire avec le système des formules de résolution*. Il en résulte, notamment, que, dans un voisinage suffisamment rapproché des valeurs initiales, les deux systèmes admettent les mêmes solutions numériques [1].

---

[1] La dernière partie de notre énoncé du n° 120 est susceptible d'une généralisation parfois utile. Désignons toujours par

$$u,\ v,\ \ldots \quad \text{et} \quad x,\ y,\ \ldots$$

deux groupes de variables, dont *les premières*, u, v, ..., *sont en nombre* m, et considérons un système d'équations

$$(1')\qquad \begin{cases} f_1\ \ (u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0, \\ f_2\ \ (u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_m\ \ (u, v, \ldots x, y, \ldots) = 0, \end{cases}$$

$$(2')\qquad \begin{cases} f_{m+1}(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

dont les premiers membres soient tous développables à partir de certaines valeurs

123. Soient

$$(36) \qquad t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \quad t_n$$

n variables indépendantes, μ *un entier moindre que* n, et

$$(37) \qquad \begin{cases} f_1(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ f_2(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_\mu(t_1, t_2, \ldots, t_n) \end{cases}$$

μ fonctions des variables dont il s'agit : *si, avec les fonctions* (37),

---

initiales de $u, v, \ldots, x, y, \ldots$; supposons, en outre, que les m premières d'entre elles, celles du groupe (1′), soient, à partir des valeurs initiales dont il s'agit, résolubles, conformément au principe général des fonctions implicites, par rapport aux m variables $u, v, \ldots$. Si l'on considère maintenant les m formules de résolution

$$(3') \qquad u - \upsilon(x, y, \ldots) = 0, \qquad v - \varphi(x, y, \ldots) = 0, \qquad \ldots,$$

la substitution à $u, v, \ldots$ des fonctions $\upsilon(x, y, \ldots)$, $\varphi(x, y, \ldots)$, ... dans les équations restantes, celles du groupe (2′), en transforme les premiers membres, $f_{m+1}, \ldots$, en certaines fonctions de $x, y, \ldots$, développables, en vertu du principe général des fonctions composées, à partir des valeurs initiales de ces dernières variables : soient

$$(4') \qquad \begin{cases} F_{m+1}(x, y, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

les équations ainsi obtenues.

Je dis que *les systèmes* [(1′), (2′)] *et* [(3′), (4′)] *sont en corrélation multiplicatoire.*

Si l'on se reporte, en effet, à l'alinéa IV du n° 120, on a les identités

$$(5') \qquad \begin{cases} f_1 = (u - \upsilon)\lambda_1 + (v - \varphi)\mu_1 + \ldots, \\ f_2 = (u - \upsilon)\lambda_2 + (v - \varphi)\mu_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_m = (u - \upsilon)\lambda_m + (v - \varphi)\mu_m + \ldots, \end{cases}$$

où les m^2 multiplicateurs des m différences $u - \upsilon$, $v - \varphi$, ... forment un déterminant à valeur initiale non nulle; et, si l'on se reporte à l'alinéa II du même numéro, on a les identités

$$(6') \qquad \begin{cases} f_{m+1} = (u - \upsilon)\lambda_{m+1} + (v - \varphi)\mu_{m+1} + \ldots + F_{m+1}(x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

En vertu de la remarque faite sur les multiplicateurs qui figurent dans (5′), les relations (5′) et (6′) sont résolubles, conformément à l'algorithme de Cramer, par rapport à

$$u - \upsilon, \quad v - \varphi, \quad \ldots, \quad F_{m+1}, \quad \ldots.$$

Cela étant, si l'on considère les identités (5′) et (6′), en premier lieu sous la

on construit une fonction composée,

$$\text{(38)}\qquad F(f_1, f_2, \ldots, f_\mu) = f(t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

de telle façon que les règles générales relatives à la composition des fonctions olotropes soient applicables, les déterminants différentiels des $\mu+1$ *fonctions* (37) *et* (38), *pris par rapport à* $\mu+1$ *quelconques des variables* (36), *sont tous identiquement nuls.*

Considérons, par exemple, le déterminant différentiel relatif aux $\mu+1$ variables $t_1, t_2, \ldots, t_{\mu+1}$. L'algorithme des fonctions composées, appliqué au calcul des dérivées premières de la fonction (38), donne

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t_1} &= \frac{\partial F}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t_1} + \frac{\partial F}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t_1} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial f_\mu}\frac{\partial f_\mu}{\partial t_1},\\
\frac{\partial f}{\partial t_2} &= \frac{\partial F}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t_2} + \frac{\partial F}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t_2} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial f_\mu}\frac{\partial f_\mu}{\partial t_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{\partial f}{\partial t_{\mu+1}} &= \frac{\partial F}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial t_{\mu+1}} + \frac{\partial F}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial t_{\mu+1}} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial f_\mu}\frac{\partial f_\mu}{\partial t_{\mu+1}}.
\end{aligned}$$

Il résulte de ces relations que, dans le déterminant considéré, les éléments d'une certaine file sont exprimables par une même fonction linéaire et homogène des éléments de même rang des files parallèles : ce déterminant est donc identiquement nul.

---

forme même où elles sont écrites, et en second lieu après la résolution indiquée, on voit que l'un quelconque des deux systèmes

$$[(1'), (2')] \quad \text{et} \quad [(3'), (4')]$$

est une combinaison multiplicatoire de l'autre.

On peut remarquer que *les deux systèmes*

$$[(1'), (2')], \quad [(1'), (4')]$$

sont, eux aussi, en corrélation multiplicatoire. Car, les systèmes (1′) et (3′) jouissant de cette propriété, les relations (6′) peuvent s'écrire sous la forme

$$f_{m+1} = L_{m+1,1} f_1 + L_{m+1,2} f_2 + \ldots + L_{m+1,m} f_m + F_{m+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

or, si on les considère, en premier lieu sous cette forme même, et en second lieu après leur résolution par rapport à $F_{m+1}, \ldots$, on voit que (2′) est une combinaison multiplicatoire de [(1′), (4′)] et (4′) une combinaison multiplic8taire de [(1′), (2′)].

124. La réciproque est vraie.

Désignant par μ *un entier moindre que* n, *supposons :*

1° *Que les* $\mu+1$ *fonctions*

$$(39)\qquad \begin{cases} f_1(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ f_2(t_1, t_2, \ldots, t_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_\mu(t_1, t_2, \ldots, t_n) \end{cases}$$

et

$$(40)\qquad f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

soient toutes développables à partir de certaines valeurs numériques, considérées comme initiales, des variables $t_1, t_2, \ldots, t_n$;

2° *Que l'un au moins des déterminants différentiels des* μ *fonctions* (39) *ait une valeur initiale différente de zéro;*

3° *Que les déterminants différentiels des* $\mu+1$ *fonctions* (39) *et* (40) *soient tous identiquement nuls.*

Cela étant, je dis que *la fonction* (40) *est composée des* μ *fonctions* (39).

Supposons, pour fixer les idées, que

$$t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_\mu$$

soit un des groupes de μ variables par rapport auxquels les μ fonctions (39) possèdent un déterminant différentiel à valeur initiale non nulle. Si l'on désigne par $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu$ les valeurs variables des fonctions (39), il existera, entre les quantités

$$(41)\qquad \varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_\mu,\quad t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n,$$

les μ équations finies

$$(42)\qquad \begin{cases} f_1(t_1, t_2, \ldots, t_\mu, t_{\mu+1}, \ldots, t_n) = \varphi_1, \\ f_2(t_1, t_2, \ldots, t_\mu, t_{\mu+1}, \ldots, t_n) = \varphi_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_\mu(t_1, t_2, \ldots, t_\mu, t_{\mu+1}, \ldots, t_n) = \varphi_\mu, \end{cases}$$

lesquelles, en vertu de notre hypothèse, combinée avec le théorème fondamental du n° 120, peuvent être résolues par rapport à t_1, $t_2, \ldots, t_\mu$ [à partir des valeurs initiales des quantités (41)]. Substituant à $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$, dans la fonction (40), les seconds membres des

formules de résolution, on tombe sur une certaine fonction composée,

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu, t_{\mu+1}, \ldots, t_n);$$

et il s'agit de prouver que la composante Φ est indépendante de $t_{\mu+1}, \ldots, t_n$, c'est-à-dire que sa dérivée première, prise par rapport à l'une quelconque de ces dernières variables, $t_{\mu+1}$ par exemple, est identiquement nulle (n° 94).

Or, la règle de différentiation du n° 62 est applicable au calcul des dérivées de la composante Φ, et donne

$$(43) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial t_{\mu+1}} = \frac{\partial f}{\partial t_1}\frac{\partial t_1}{\partial t_{\mu+1}} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t_\mu}\frac{\partial t_\mu}{\partial t_{\mu+1}} + \frac{\partial f}{\partial t_{\mu+1}}.$$

A leur tour, les dérivées $\frac{\partial t_1}{\partial t_{\mu+1}}, \ldots, \frac{\partial t_\mu}{\partial t_{\mu+1}}$ se déduisent des formules (42) par la règle des fonctions implicites, et l'on a

$$\begin{gathered}
\frac{\partial f_1}{\partial t_1}\frac{\partial t_1}{\partial t_{\mu+1}} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial t_\mu}\frac{\partial t_\mu}{\partial t_{\mu+1}} + \frac{\partial f_1}{\partial t_{\mu+1}} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{\partial f_\mu}{\partial t_1}\frac{\partial t_1}{\partial t_{\mu+1}} + \ldots + \frac{\partial f_\mu}{\partial t_\mu}\frac{\partial t_\mu}{\partial t_{\mu+1}} + \frac{\partial f_\mu}{\partial t_{\mu+1}} = 0.
\end{gathered}$$

En résolvant ces μ dernières équations par rapport à $\frac{\partial t_1}{\partial t_{\mu+1}}, \ldots, \frac{\partial t_\mu}{\partial t_{\mu+1}}$, et portant dans (43) les valeurs ainsi obtenues, il vient

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial t_\mu} & \frac{\partial f_1}{\partial t_{\mu+1}} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
\frac{\partial f_\mu}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial f_\mu}{\partial t_\mu} & \frac{\partial f_\mu}{\partial t_{\mu+1}} \\
\frac{\partial f}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial t_\mu} & \frac{\partial f}{\partial t_{\mu+1}} - \frac{\partial \Phi}{\partial t_{\mu+1}}
\end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial t_\mu} \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\partial f_\mu}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial f_\mu}{\partial t_\mu}
\end{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial t_{\mu+1}} = \begin{vmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial t_\mu} & \frac{\partial f_1}{\partial t_{\mu+1}} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
\frac{\partial f_\mu}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial f_\mu}{\partial t_\mu} & \frac{\partial f_\mu}{\partial t_{\mu+1}} \\
\frac{\partial f}{\partial t_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial t_\mu} & \frac{\partial f}{\partial t_{\mu+1}}
\end{vmatrix},$$

relation dans laquelle les variables $t_1, t_2, \ldots, t_\mu$ doivent être rempla-

cées par leurs valeurs tirées de (42). Or, le second membre, qui, avant cette substitution, était une fonction identiquement nulle de $t_1, t_2, \ldots, t_n$, devient, après elle, une fonction identiquement nulle de $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu, t_{\mu+1}, \ldots, t_n$; dans le premier membre, le coefficient de $\frac{\partial\Phi}{\partial t_{\mu+1}}$ a, après comme avant, une valeur initiale non nulle, et, par suite, reste différent de zéro dans le voisinage des valeurs initiales de $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu, t_{\mu+1}, \ldots, t_n$: il en résulte bien, comme nous voulions l'établir, que $\frac{\partial\Phi}{\partial t_{\mu+1}}$ est identiquement nul.

125. L'énoncé précédent suppose $\mu < n$; dans le cas où $\mu = n$, il doit être remplacé par le suivant :

Si n fonctions de n variables sont développables à partir de certaines valeurs numériques, considérées comme initiales, des variables dont il s'agit, et que leur déterminant différentiel ait une valeur initiale différente de zéro, toute autre fonction développable à partir des mêmes valeurs initiales est composée des n premières.

La démonstration est la même, à cela près qu'alors la composante Φ ne peut manifestement contenir que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$: elle s'allège donc de toute la partie du raisonnement servant à prouver qu'elle ne contient pas autre chose.

126. Dans les théorèmes qui précèdent interviennent les déterminants différentiels de μ ou $\mu + 1$ fonctions par rapport aux divers groupes de μ ou $\mu + 1$ d'entre les variables, sans aucune distinction faite entre ces dernières. Or, on peut supposer que les fonctions considérées dépendent, non seulement des variables $t_1, t_2, \ldots, t_n$, mais encore d'autres variables, $s_1, s_2, \ldots$, en nombre quelconque, et ne faire intervenir dans les énoncés que les déterminants différentiels intéressant les premières variables à l'exclusion des dernières. On arrive alors, par des raisonnements tout semblables, aux propositions suivantes, qui contiennent comme cas particuliers celles que nous venons d'établir.

A. En désignant par μ un entier moindre que n, si, avec les

μ *fonctions*

$$(44)\qquad \begin{cases} f_1(t_1, t_2, \ldots, t_n, s_1, s_2, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_\mu(t_1, t_2, \ldots, t_n, s_1, s_2, \ldots) \end{cases}$$

et les variables $s_1, s_2, \ldots,$ *on construit une fonction composée,*

$$(45)\qquad F(f_1, \ldots, f_\mu, s_1, s_2, \ldots),$$

de telle façon que les règles générales relatives à la composition des fonctions olotropes soient applicables, les déterminants différentiels des $\mu+1$ *fonctions* (44) *et* (45), *pris par rapport à* $\mu+1$ *quelconques des variables* $t_1, t_2, \ldots, t_n$, *sont tous identiquement nuls.*

B. Désignant par μ *un entier moindre que* n, *supposons :* 1° *que les* $\mu+1$ *fonctions*

$$(46)\qquad \begin{cases} f_1(t_1, t_2, \ldots, t_n, s_1, s_2, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_\mu(t_1, t_2, \ldots, t_n, s_1, s_2, \ldots) \end{cases}$$

et

$$(47)\qquad f(t_1, t_2, \ldots, t_n, s_1, s_2, \ldots)$$

soient toutes développables à partir de certaines valeurs numériques, considérées comme initiales, des variables

$$t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n,\ s_1,\ s_2,\ \ldots;$$

2° *que l'un au moins des déterminants différentiels des* μ *fonctions* (46) *par rapport aux seules variables* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *ait une valeur initiale différente de zéro;* 3° *que les déterminants différentiels des* $\mu+1$ *fonctions* (46) *et* (47) *par rapport aux seules variables dont il s'agit soient tous identiquement nuls.*

Cela étant, la fonction (47) *est composée des* μ *fonctions* (46) *et des variables* $s_1, s_2, \ldots.$

C. Si n *fonctions des variables*

$$t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n,\ s_1,\ s_2,\ \ldots$$

sont développables à partir de certaines valeurs numériques, considérées comme initiales, de ces variables, et que leur détermi-

nant différentiel relatif à $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ait une valeur initiale différente de zéro, toute autre fonction développable à partir des mêmes valeurs initiales est composée des n premières et des variables $s_1, s_2, \ldots$.

Systèmes d'équations olotropes considérés au point de vue de leurs solutions numériques.

127. *Si le système*

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1(u, v, \ldots) = 0, \\ f_2(u, v, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_M(u, v, \ldots) = 0, \end{cases}$$

où $u, v, \ldots$ désignent des indéterminées en nombre quelconque, admet quelque solution numérique,

$$u_0, \quad v_0, \quad \ldots,$$

à partir de laquelle ses premiers membres soient tous développables, on peut, sous le bénéfice d'une certaine restriction qui sera formulée plus loin, lui substituer un système jouissant de la double propriété : 1° d'être, à l'intérieur d'un domaine suffisamment petit de centre $(u_0, v_0, \ldots)$, numériquement équivalent à (1); 2° d'être résoluble à partir des valeurs $u_0, v_0, \ldots$, conformément au principe général du n° 120, par rapport à un groupe d'indéterminées convenablement choisi.

Soit n le nombre des variables $u, v, \ldots$. En supposant, comme de raison, que les équations (1) ne se réduisent pas toutes à $0 = 0$, c'est-à-dire (n° 94) que les dérivées premières de $f_1, f_2, \ldots, f_M$ par rapport à $u, v, \ldots$ ne soient pas toutes identiquement nulles, il arrive nécessairement de deux choses l'une :

Ou bien il existe n des fonctions

$$(2)\qquad f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_M$$

dont le déterminant différentiel n'est pas identiquement nul;

Ou bien, μ désignant un certain entier moindre que n, il existe μ des fonctions (2) dont les déterminants différentiels ne sont pas tous identiquement nuls, tandis qu'au contraire l'adjonction aux μ fonc-

tions dont il s'agit de l'une quelconque des fonctions restantes (s'il y en a) fournit un système dont les déterminants différentiels sont tous identiquement nuls.

En désignant donc par μ un entier, soit inférieur, soit égal à n, on peut répartir les équations du système (1) en deux groupes,

$$(3)\qquad \begin{cases} f_1\ \ (u, v, \ldots) = 0, \\ f_2\ \ (u, v, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_\mu\ \ (u, v, \ldots) = 0 \end{cases}$$

et

$$(4)\qquad \begin{cases} f_{\mu+1}(u, v, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_M\ \ (u, v, \ldots) = 0, \end{cases}$$

jouissant respectivement des propriétés suivantes :

1° Dans le système (3), les déterminants différentiels (d'ordre μ) ne sont pas tous identiquement nuls; *nous supposerons en outre,* ce qui n'arrive pas nécessairement, *que l'un au moins de ces déterminants différentiels a une valeur initiale différente de zéro.*

2° Dans le système (4), les premiers membres satisfont, en vertu de **124** ou de **125**, à des identités de la forme

$$(5)\qquad \begin{cases} f_{\mu+1} = F_{\mu+1}(f_1, f_2, \ldots, f_\mu), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_M\ \ = F_M\ \ (f_1, f_2, \ldots, f_\mu), \end{cases}$$

d'où l'on déduit, par la simple attribution aux variables u, v, ... de leurs valeurs initiales u_0, v_0, ..., les relations numériques

$$(6)\qquad \begin{cases} F_{\mu+1}(0, 0, \ldots, 0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_M\ \ (0, 0, \ldots, 0) = 0. \end{cases}$$

Cela étant, le groupe (3), composé d'équations en nombre au plus égal à celui des variables ($\mu \leqq n$), est résoluble, conformément au principe général du n° **120**, par rapport à μ variables convenablement choisies. Quant au groupe (4), il est évidemment vérifié, en vertu des identités (5) et des relations (6), par toute solution de (3). En conséquence, à l'intérieur d'un domaine suffisamment petit de centre (u_0, v_0, ...), le système proposé (1) admet une solution générale dans

laquelle $n - \mu$ variables convenablement choisies sont arbitraires, tandis que les μ autres sont exprimées en fonctions olotropes des précédentes. (En particulier, si $\mu = n$, il n'admet qu'une seule solution numérique à l'intérieur du domaine.) C'est ce qu'il s'agissait de faire voir.

Dans ce qui précède, comme dans le théorème du n° **120**, on commence par admettre l'existence d'une solution numérique à partir de laquelle les premiers membres du système étudié soient développables, et les conclusions de l'énoncé ne se trouvent établies que pour un voisinage suffisamment rapproché de la solution numérique initiale. Une pareille observation sera, dans ce qui suit, constamment applicable : toutes les fois, par exemple, qu'il s'agira d'équivalence numérique entre deux systèmes, il faudra entendre que cette propriété (supposée ou démontrée) a lieu dans le voisinage d'une solution numérique commune, à partir de laquelle les premiers membres des équations considérées sont tous développables.

128. Étant donné un système d'équations, aux indéterminées u, v, ..., et dont les premiers membres sont supposés développables à partir de u_0, v_0, ..., nous dirons que ce système (considéré dans le voisinage des valeurs en question) est *réduit*, si l'on peut, conformément au principe général du n° **120**, le résoudre à partir de u_0, v_0, ... par rapport à un groupe d'indéterminées en nombre égal à celui des équations du système. [Cette définition implique d'elle-même : 1° que $(u_0, v_0, \ldots)$ est une solution numérique du système; 2° que le nombre total des indéterminées est au moins égal à celui des équations du système; 3° que l'un au moins des déterminants différentiels du système a une valeur initiale différente de zéro.]

Les systèmes réduits jouissent de propriétés importantes que nous allons exposer.

129. *Tout système réduit,* S', *conséquence numérique d'un système réduit,* S, *se compose d'équations en nombre inférieur ou au plus égal.*

I. *Si l'on désigne par* S *un système réduit, et par* Σ *un système quelconque dont les premiers membres soient tous développables à partir de la solution numérique initiale de* S, *il faut et il suffit,*

pour que Σ *soit une conséquence numérique de* S, *qu'il en soit une combinaison multiplicatoire* (nº 122).

Cette condition, évidemment suffisante, est, de plus, nécessaire.

Effectivement, soient m le nombre des équations du système réduit S;

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_m, \quad u_{m+1}, \quad \ldots$$

les variables, en nombre au moins égal à m, qui s'y trouvent engagées;

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_m$$

l'un des groupes de m variables par rapport auxquels le système S est résoluble (nº 128); enfin

$$(7) \qquad \begin{cases} u_1 - \upsilon_1\,(u_{m+1}, \ldots) = 0, \\ u_2 - \upsilon_2\,(u_{m+1}, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m - \upsilon_m(u_{m+1}, \ldots) = 0 \end{cases}$$

les formules de résolution.

Si l'on considère une équation quelconque, $K = 0$, du système Σ, elle ne peut manquer, puisqu'elle est une conséquence numérique de S, d'être identiquement vérifiée par la substitution à $u_1, u_2, \ldots, u_m$ des fonctions $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_m$, et elle est dès lors (nº 120, III) une combinaison multiplicatoire du système (7). Il résulte d'ailleurs du principe général des fonctions implicites (nº 120) que le système (7) est une combinaison multiplicatoire de S (nº 122). Donc l'équation $K = 0$ est elle-même une combinaison multiplicatoire de S.

II. Revenant à notre énoncé général, désignons par m le nombre des équations du système réduit S, et admettons pour un instant que le système réduit S′, conséquence numérique de S, comprenne plus de m équations (il en résulte, à plus forte raison, que le nombre des variables engagées dans les deux systèmes est lui-même supérieur à m). Cela étant, soient

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_m = 0$$

et

$$K_1 = 0, \qquad K_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad K_m = 0, \qquad K_{m+1} = 0, \qquad \ldots$$

les équations des systèmes respectifs S et S′. On a, en vertu de I, les

identités

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} K_1 = L_{1,1}F_1 + L_{1,2}F_2 + \ldots + L_{1,m}F_m, \\ K_2 = L_{2,1}F_1 + L_{2,2}F_2 + \ldots + L_{2,m}F_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ K_m = L_{m,1}F_1 + L_{m,2}F_2 + \ldots + L_{m,m}F_m, \\ K_{m+1} = L_{m+1,1}F_1 + L_{m+1,2}F_2 + \ldots + L_{m+1,m}F_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

où les L désignent certaines fonctions développables à partir de la solution numérique initiale commune. Je dis que celles d'entre ces fonctions qui figurent dans les m premières identités (8) forment un déterminant dont la valeur initiale est différente de zéro.

Considérons en effet les dérivées premières des m fonctions K_1, K_2, ..., K_m, et calculons, à l'aide des m premières identités (8), leurs valeurs initiales. La première identité, différentiée par rapport à une variable quelconque, u_1, nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_1}{\partial u_1} = {} & L_{1,1}\frac{\partial F_1}{\partial u_1} + L_{1,2}\frac{\partial F_2}{\partial u_1} + \ldots + L_{1,m}\frac{\partial F_m}{\partial u_1} \\ & + F_1\frac{\partial L_{1,1}}{\partial u_1} + F_2\frac{\partial L_{1,2}}{\partial u_1} + \ldots + F_m\frac{\partial L_{1,m}}{\partial u_1}. \end{aligned}$$

Or, F_1, F_2, ..., F_m ayant des valeurs initiales nulles, on peut, pour calculer la valeur initiale du premier membre, $\frac{\partial K_1}{\partial u_1}$, de la formule précédente, faire abstraction des m derniers termes du second membre, c'est-à-dire opérer comme si les fonctions L se réduisaient à des constantes. Si donc on se propose de calculer la valeur initiale du déterminant différentiel de

$$K_1,\quad K_2,\quad \ldots,\quad K_m$$

par rapport à m variables *quelconques,*

$$u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_m,$$

il suffira de combiner, par la règle de multiplication, les deux déterminants

$$(9)\quad \begin{vmatrix} L_{1,1} & L_{1,2} & \ldots & L_{1,m} \\ L_{2,1} & L_{2,2} & \ldots & L_{2,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L_{m,1} & L_{m,2} & \ldots & L_{m,m} \end{vmatrix}$$

et

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial u_1} \\ \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial u_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial u_m} & \frac{\partial F_2}{\partial u_m} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}.$$

Cela étant, si le déterminant (9) avait une valeur initiale nulle, tous les déterminants différentiels du système

$$K_1 = 0, \qquad K_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad K_m = 0$$

auraient aussi des valeurs initiales nulles; et, comme tous les déterminants différentiels de S' sont (en vertu d'une propriété connue des déterminants) fonctions linéaires et homogènes des précédents, ils auraient tous eux-mêmes des valeurs initiales nulles, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Le déterminant (9) ayant une valeur initiale différente de zéro, les m premières identités (8) sont résolubles par rapport à F_1, $F_2, \ldots, F_m$, et, en portant dans les identités suivantes les expressions ainsi obtenues, il vient

$$(10) \qquad \begin{cases} K_{m+1} = P_{m+1,1} K_1 + P_{m+1,2} K_2 + \ldots + P_{m+1,m} K_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

où les fonctions P sont développables à partir des valeurs initiales des variables. Si l'on calcule maintenant, en tenant compte des identités (10), les valeurs initiales des déterminants différentiels du système S', ce calcul peut, à cause de la nullité des valeurs initiales de $K_1, K_2, \ldots, K_m$, s'opérer en assimilant à des constantes les diverses fonctions P : donc, dans chacun des déterminants considérés, toute ligne de rang supérieur à m a ses divers éléments exprimables par une même fonction linéaire et homogène des éléments correspondants des m premières lignes; il en résulte, contrairement à l'hypothèse, que les déterminants différentiels de S' ont tous des valeurs initiales nulles.

130. *Deux systèmes réduits numériquement équivalents comprennent le même nombre d'équations.*

Soient m et m' les nombres respectifs d'équations des deux systèmes. En vertu de l'équivalence supposée, chaque système est une conséquence numérique de l'autre; on ne peut donc avoir (n° 129) ni $m > m'$, ni $m' > m$: il en résulte nécessairement $m = m'$.

131. *Si deux systèmes réduits comprennent le même nombre d'équations, et que le second soit conséquence numérique du premier, inversement le premier est conséquence numérique du second, et les deux systèmes sont numériquement équivalents.*

Soient en effet

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_m = 0$$

et

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad \ldots, \quad K_m = 0$$

les équations de ces deux systèmes respectifs. Le premier étant réduit, et le second conséquence numérique du premier, on a (n° 129, I) les identités

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_1 = L_{1,1} F_1 + L_{1,2} F_2 + \ldots + L_{1,m} F_m, \\ K_2 = L_{2,1} F_1 + L_{2,2} F_2 + \ldots + L_{2,m} F_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ K_m = L_{m,1} F_1 + L_{m,2} F_2 + \ldots + L_{m,m} F_m. \end{array} \right.$$

Le second système étant, de plus, réduit, le déterminant formé par les fonctions L a, en vertu d'un raisonnement antérieur (n° 129, II), une valeur initiale différente de zéro : les identités (11) peuvent donc être résolues par rapport à $F_1, F_2, \ldots, F_m$, d'où résulte que le premier système est une conséquence numérique du second.

132. *Étant donné un système réduit,* S, *composé des m équations*

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_m = 0,$$

l'expression générale des systèmes réduits équivalents est

$$\begin{array}{l} L_{1,1} F_1 + L_{1,2} F_2 + \ldots + L_{1,m} F_m = 0, \\ L_{2,1} F_1 + L_{2,2} F_2 + \ldots + L_{2,m} F_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_{m,1} F_1 + L_{m,2} F_2 + \ldots + L_{m,m} F_m = 0, \end{array}$$

où les fonctions L, *développables à partir des valeurs initiales des*

variables, sont arbitrairement choisies sous la seule condition de former un déterminant à valeur initiale non nulle.

Effectivement, tout système réduit équivalent à S se compose, comme lui, de m équations (n° 130), et en est une combinaison multiplicatoire (n° 129, I); on voit d'ailleurs, en raisonnant comme on l'a déjà fait (n° 129, II), que le déterminant des multiplicateurs a une valeur initiale différente de zéro.

Réciproquement, si un système S', composé des m équations

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad \ldots, \quad K_m = 0,$$

est une combinaison multiplicatoire du système réduit S, et que le déterminant des multiplicateurs ait une valeur initiale différente de zéro, les identités (11), sur lesquelles on raisonnera comme plus haut (n° 129, II), montrent que le système S' est forcément réduit : comme il est évidemment une conséquence numérique de S, il lui est, en vertu du n° 131, numériquement équivalent.

133. *Si deux systèmes sont réduits et numériquement équivalents, d'où résulte* (n° 130) *qu'ils sont composés d'un même nombre m d'équations, ils sont, en outre, nécessairement résolubles par rapport aux mêmes groupes de m variables.*

Si l'on désigne en effet par

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_m = 0$$

et par

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad \ldots, \quad K_m = 0$$

les équations de ces deux systèmes respectifs, on a, entre leurs premiers membres, les identités (11), où le déterminant des fonctions L a une valeur initiale différente de zéro (n° 132) : cela étant, si l'on considère, par rapport à un même groupe quelconque de m variables, leurs déterminants différentiels respectifs, la valeur initiale du second s'obtient en multipliant celle du premier par la valeur initiale du déterminant des fonctions L.

134. *Étant donné un système réduit,* S, *composé des m équations*

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_m = 0,$$

les systèmes réduits de $m-p$ équations qui jouissent de la propriété d'être conséquences numériques de S *ont pour expression générale*

$$(12)\quad \begin{cases} L_{1,1}\ F_1 + L_{1,2}\ F_2 + \ldots + L_{1,m}\ F_m = 0, \\ L_{2,1}\ F_1 + L_{2,2}\ F_2 + \ldots + L_{2,m}\ F_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L_{m-p,1} F_1 + L_{m-p,2} F_2 + \ldots + L_{m-p,m} F_m = 0, \end{cases}$$

où les fonctions L, *développables à partir des valeurs initiales des variables, sont arbitrairement choisies sous la seule condition que les déterminants d'ordre $m-p$ extraits de leur Tableau n'aient pas tous des valeurs initiales nulles.*

I. Pour qu'un système de $m-p$ équations (dont les seconds membres sont nuls, et les premiers développables à partir des valeurs initiales des variables) soit une conséquence numérique du système réduit S, il faut et il suffit (n° 129, I) qu'il en soit une combinaison multiplicatoire, et qu'il ait, par suite, la forme (12).

II. Pour que le système (12) soit réduit, il faut et il suffit, comme on va le voir, que les déterminants d'ordre $m-p$ extraits du Tableau des fonctions L n'aient pas tous des valeurs initiales nulles.

Désignons en effet par

$$K_1,\quad K_2,\quad \ldots,\quad K_{m-p}$$

les premiers membres du système (12). En calculant, par la règle des fonctions composées, un élément quelconque du Tableau différentiel de (12), et observant que F_1, F_2, ..., F_m ont des valeurs initiales nulles, on verra, comme à l'alinéa II du n° 129, que, pour obtenir la valeur initiale du déterminant différentiel de (12) par rapport à $m-p$ variables quelconques, par exemple u_1, u_2, ..., u_{m-p}, il suffit de combiner par la règle de multiplication des déterminants généralisée le Tableau (rectangulaire)

$$(13)\quad \begin{cases} L_{1,1}, & L_{1,2} & \ldots, & L_{1,m}, \\ L_{2,1}, & L_{2,2} & \ldots, & L_{2,m}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots, \\ L_{m-p,1}, & L_{m-p,2}, & \ldots, & L_{m-p,m} \end{cases}$$

avec celui des dérivées premières de F_1, F_2, ..., F_m par rapport

à $u_1, u_2, \ldots, u_{m-p}$,

$$\begin{array}{cccc}
\dfrac{\partial F_1}{\partial u_1}, & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial F_m}{\partial u_1}, \\
\dfrac{\partial F_1}{\partial u_2}, & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial F_m}{\partial u_2}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\
\dfrac{\partial F_1}{\partial u_{m-p}}, & \dfrac{\partial F_2}{\partial u_{m-p}}, & \ldots, & \dfrac{\partial F_m}{\partial u_{m-p}}.
\end{array}$$

Le résultat de cette opération est égal, comme on sait, à la somme des produits obtenus en multipliant les déterminants d'ordre $m-p$ du premier Tableau par les déterminants homologues du second [1].

Cela posé, il est nécessaire, pour que le système (12) soit réduit, que les déterminants d'ordre $m-p$ du Tableau (13) n'aient pas tous des valeurs initiales nulles : car autrement, d'après ce qui vient d'être dit, les déterminants différentiels de (12) auraient tous des valeurs initiales nulles.

Réciproquement, supposons que l'un au moins des déterminants

---

[1] Considérons les deux Tableaux rectangulaires

$$\begin{array}{cccc}
a_1, & b_1, & \ldots, & l_1, \\
a_2, & b_2, & \ldots, & l_2, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
a_q, & b_q, & \ldots, & l_q
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccc}
\alpha_1, & \beta_1, & \ldots, & \lambda_1, \\
\alpha_2, & \beta_2, & \ldots, & \lambda_2, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
\alpha_q, & \beta_q, & \ldots, & \lambda_q,
\end{array}$$

qui contiennent chacun q lignes et $q+r$ colonnes ($q>0$, $r \geqq 0$). Si l'on pose

$$R_{i,j} = a_i\alpha_j + b_i\beta_j + \ldots + l_i\lambda_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, q \text{ et } j = 1, 2, \ldots, q),$$

le déterminant d'ordre q

$$\begin{vmatrix}
R_{1,1} & R_{1,2} & \ldots & R_{1,q} \\
R_{2,1} & R_{2,2} & \ldots & R_{2,q} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
R_{q,1} & R_{q,2} & \ldots & R_{q,q}
\end{vmatrix}$$

est égal à la somme des produits qu'on obtient en multipliant les déterminants d'ordre q extraits du premier Tableau par les déterminants homologues extraits du second.

d'ordre $m - p$ du Tableau (13) ait une valeur initiale différente de zéro, et soit

$$(14) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_m$$

l'un des groupes de m variables par rapport auxquels le système S est résoluble : je dis que le système (12) l'est nécessairement par rapport à quelque groupe de $m - p$ variables extrait de (14), ou, en d'autres termes, que les C_{m-p}^{m} déterminants différentiels de (12) relatifs aux divers groupes de $m - p$ variables extraits de (14) n'ont pas tous des valeurs initiales nulles. Admettons en effet pour un instant que les valeurs initiales dont il s'agit soient toutes nulles. Si on les calcule conformément aux indications ci-dessus, on obtient C_{m-p}^{m} expressions possédant la double propriété : 1° d'être linéaires et homogènes par rapport aux C_{m-p}^{m} déterminants d'ordre $m - p$ extraits du Tableau (13); 2° d'avoir pour coefficients les divers déterminants d'ordre $m - p$ extraits du déterminant différentiel de F_1, F_2, ..., F_m relatif à u_1, u_2, ..., u_m. Comme les déterminants d'ordre $m - p$ extraits du Tableau (13) n'ont pas tous des valeurs initiales nulles, il résulte de la théorie des équations linéaires et homogènes que le déterminant des coefficients a une valeur initiale nulle, et par suite aussi le déterminant différentiel de F_1, F_2, ..., F_m par rapport à u_1, u_2, ..., u_m [1], ce qui est contraire à l'hypothèse.

III. Le simple rapprochement des alinéas I et II suffit à établir l'exactitude de notre énoncé.

135. *Étant donnés deux systèmes réduits,* S *et* S′, *composés respectivement de m et de m — p équations, et dont le second soit conséquence numérique du premier, si le système* S *est résoluble par rapport à un groupe déterminé de m variables, le système* S′ *l'est nécessairement par rapport à quelque groupe de m — p variables extrait du précédent.*

Si l'on désigne en effet par

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_m = 0$$

---

[1] On sait, en effet, que la nullité du déterminant formé avec les mineurs d'un même ordre d'un déterminant donné entraîne la nullité de ce dernier.

les m équations du système S, le système S' peut se mettre sous la forme (12), où les multiplicateurs L satisfont à la condition que les déterminants d'ordre $m-p$ extraits de leur Tableau n'aient pas tous des valeurs initiales nulles (n° 134) : cela étant, la possibilité, pour le système S, d'être résolu par rapport à un groupe déterminé de m variables, entraîne, pour le système (12), ainsi que nous l'avons prouvé (n° 134, II), la possibilité d'être résolu par rapport à quelque groupe de $m-p$ variables extrait du précédent.

136. *Étant donné un système réduit,* S, *composé de* $m-p$ *équations, et où se trouvent engagées m variables au moins, considérons, d'une part, les systèmes réduits de m équations qui ont pour conséquence numérique le proposé, d'autre part, les systèmes obtenus en adjoignant aux équations,*

$$(15) \qquad F_1=0, \quad F_2=0, \quad \ldots, \quad F_{m-p}=0,$$

du système S, *p équations,*

$$F_{m-p+1}=0, \quad \ldots, \quad F_m=0,$$

arbitrairement choisies sous les seules conditions : 1° *que leurs premiers membres,* $F_{m-p+1}, \ldots, F_m$, *développables à partir des valeurs initiales des variables, aient des valeurs initiales nulles;* 2° *que les divers déterminants différentiels des m fonctions*

$$F_1, \quad F_2, \quad \ldots, \quad F_{m-p}, \quad F_{m-p+1}, \quad \ldots, \quad F_m$$

n'aient pas tous des valeurs initiales nulles.

Cela étant, tout système du second groupe figure aussi dans le premier; inversement, tout système du premier groupe possède dans le second quelque équivalent numérique.

La première partie de notre conclusion est évidente : reste à établir la seconde.

Supposons donc que le système réduit

$$(16) \qquad G_1=0, \quad G_2=0, \quad \ldots, \quad G_m=0$$

ait pour conséquence numérique le proposé S, formé des $m-p$

équations (15). En vertu du n° 134, on a alors des identités de la forme

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} F_1 \quad = L_{1,1} \quad G_1 + \ldots + L_{1,m-p} \quad G_{m-p} + L_{1,m-p+1} \quad G_{m-p+1} + \ldots + L_{1,m} \quad G_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_{m-p} = L_{m-p,1} G_1 + \ldots + L_{m-p,m-p} G_{m-p} + L_{m-p,m-p+1} G_{m-p+1} + \ldots + L_{m-p,m} G_m, \end{array}\right.$$

les déterminants d'ordre $m-p$ du Tableau formé par les L n'ayant pas tous des valeurs initiales nulles. Si, pour fixer les idées, on suppose que le déterminant

$$\begin{vmatrix} L_{1,1} & \ldots & L_{1,m-p} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ L_{m-p,1} & \ldots & L_{m-p,m-p} \end{vmatrix}$$

ait une valeur initiale différente de zéro et qu'on adjoigne alors aux $m-p$ identités (17) les p identités

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} G_{m-p+1} = G_{m-p+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ G_m \quad = G_m, \end{array}\right.$$

la seule inspection du groupe résultant,

[(17), (18)],

montre que le passage du système (16) au système

$$(19)\quad F_1 = 0, \quad \ldots, \quad F_{m-p} = 0, \quad G_{m-p+1} = 0, \quad \ldots, \quad G_m = 0$$

peut s'effectuer à l'aide de multiplicateurs formant un déterminant à valeur initiale non nulle : le système (19) est donc réduit, comme (16), lui équivaut numériquement (n° 132), et peut d'ailleurs se déduire de S par le mécanisme décrit dans notre énoncé.

137. *Étant donnés deux systèmes réduits*, S *et* S', *composés respectivement de* $m-p$ *et de* m *équations, et dont le second ait pour conséquence numérique le premier, si le premier*, S, *est résoluble par rapport à un groupe déterminé de* $m-p$ *variables, il existe dans le second*, S', *quelque groupe de* $m-p$ *équations résoluble par rapport à ces* $m-p$ *variables, et l'on peut, par l'adjonction à ces* $m-p$ *variables de* p *autres convenablement choisies, former un groupe par rapport auquel le système* S' *soit résoluble.*

I. Désignons par

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad \ldots, \quad F_m = 0$$

les m équations du système réduit S' : il résulte alors du n° 134 que le système réduit S est de la forme (12), où les déterminants d'ordre $m-p$ extraits du Tableau des fonctions L n'ont pas tous des valeurs initiales nulles. Cela étant, si le système S est résoluble par rapport aux $m-p$ variables

$$(20) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_{m-p},$$

il existe, dans le système S', quelque groupe de $m-p$ équations résoluble par rapport à ces mêmes variables (20) ; en d'autres termes, si l'on désigne par δ, ... les C_{m-p}^{m} déterminants d'ordre $m-p$ extraits du Tableau différentiel de S' relatif aux seules variables (20), les déterminants δ, ... n'ont pas tous des valeurs initiales nulles : car, en calculant, conformément aux indications du n° 134, la valeur initiale, différente de zéro, du déterminant différentiel de S relatif aux variables (20), l'expression résultante est linéaire et homogène par rapport aux déterminants δ, ...

II. On peut d'ailleurs, par l'adjonction aux $m-p$ variables (20) de p autres convenablement choisies, former un groupe par rapport auquel le système S' soit résoluble ; en d'autres termes, si l'on adjoint au groupe (20) p variables qui lui soient étrangères, et qu'on répète l'opération de toutes les manières possibles, les déterminants différentiels de S' par rapport aux divers groupes résultants n'ont pas tous des valeurs initiales nulles.

Effectivement, supposons pour un instant que les valeurs initiales dont il s'agit soient toutes nulles. Si l'on considère, comme tout à l'heure (I), le Tableau différentiel des m équations de S' par rapport aux $m-p$ variables (20) ; si, de plus, désignant par

$$(21)$$

un groupe *arbitrairement choisi* de m variables, on forme successivement les C_{m-p}^{m} Tableaux différentiels de ces mêmes équations par rapport aux divers groupes de p variables extraits de (21), ces Tableaux, en nombre total $1 + C_{m-p}^{m}$, comprennent, le premier $m-p$ lignes, les suivants p lignes, et tous comprennent d'ailleurs m

colonnes, de telle façon qu'en écrivant au-dessous du premier l'un quelconque des suivants, on forme un déterminant d'ordre m. On peut dès lors former ainsi C_{m-p}^{m} déterminants d'ordre m, et tous ont des valeurs initiales nulles, les uns en vertu de ce que nous supposons, les autres comme ayant plusieurs lignes identiques. En leur appliquant un développement connu, on obtient pour eux C_{m-p}^{m} expressions possédant la double propriété : 1° d'être linéaires et homogènes par rapport aux C_{m-p}^{m} déterminants d'ordre $m-p$ que nous avons nommés plus haut $\delta, \ldots$ (I) ; 2° d'avoir pour coefficients les divers déterminants d'ordre p extraits du déterminant différentiel des m équations S′ relatif aux m variables (21). Comme les déterminants $\delta, \ldots$, en vertu de I, n'ont pas tous des valeurs initiales nulles, il résulte de la théorie des équations linéaires et homogènes que le déterminant des coefficients a une valeur initiale nulle, par suite aussi le déterminant différentiel des m équations S′ relatif aux m variables (21). Le déterminant différentiel de S′ relatif à un groupe *quelconque* de m variables a donc une valeur initiale nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse.

138. *Dans un système réduit de m équations,*

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_m = 0, \tag{22}$$

aux $m+q$ variables

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_{m+q},$$

la solution générale peut s'obtenir à l'aide d'un système de $m+q$ formules exprimant les variables dont il s'agit en fonctions olotropes de q arbitraires, et telles que q de ces formules (convenablement choisies) soient résolubles par rapport aux arbitraires.

De plus, si, le système réduit (22) étant donné, on en suppose la solution générale exprimée à l'aide d'un système de $m+q$ formules satisfaisant à cette condition,

$$\tag{23} \left\{ \begin{aligned} u_1 \quad &= f_1 \quad (t_1, \ldots, t_q), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m \quad &= f_m \quad (t_1, \ldots, t_q), \\ u_{m+1} &= f_{m+1}(t_1, \ldots, t_q), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{m+q} &= f_{m+q}(t_1, \ldots, t_q), \end{aligned} \right.$$

il faut et il suffit, pour que le système (22) soit résoluble par rapport à m variables déterminées, les m premières par exemple, que les q dernières formules (23) soient résolubles par rapport aux q arbitraires.

I. Considérant le système réduit (22), supposons, pour fixer les idées, qu'il soit résoluble par rapport aux m premières variables, u_1, u_2, ..., u_m : la solution générale en sera alors fournie par m formules,

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_1 = \upsilon_1\,(u_{m+1}, \ldots, u_{m+q}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m = \upsilon_m(u_{m+1}, \ldots, u_{m+q}), \end{array}\right.$$

exprimant les m variables dont il s'agit à l'aide des q variables restantes dont les valeurs sont arbitraires. Si donc on égale les q dernières variables à des arbitraires t_1, ..., t_q, la solution générale sera tout aussi bien fournie par les $m+q$ formules

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 \;\;\; = \upsilon_1\,(t_1, \ldots, t_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m \;\;\; = \upsilon_m(t_1, \ldots, t_q), \end{array}\right.$$
$$\left\{\begin{array}{l} u_{m+1} = t_1, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ u_{m+q} = t_q, \end{array}\right.$$

dont les seconds membres ne contiennent que les arbitraires, et dont les q dernières sont évidemment résolubles par rapport à ces arbitraires.

Plus généralement, posons

$$(25)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_{m+1} = f_{m+1}(t_1, \ldots, t_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{m+q} = f_{m+q}(t_1, \ldots, t_q), \end{array}\right.$$

les seconds membres de ces q formules étant arbitrairement choisis sous les seules conditions d'être développables à partir de certaines valeurs initiales des arbitraires t_1. ..., t_q, d'avoir pour valeurs initiales celles que possèdent, dans le système (22), les variables u_{m+1}, ..., u_{m+q}, et enfin d'avoir un déterminant différentiel dont la valeur initiale ne soit pas nulle, de telle façon que le système (25) soit résoluble par rapport à t_1, ..., t_q. En remplaçant, dans (24), u_{m+1}, ..., u_{m+q}

par leurs valeurs tirées de (25), il vient

$$(26)\qquad \begin{cases} u_1 = \upsilon_1(f_{m+1}, \ldots, f_{m+q}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m = \upsilon_m(f_{m+1}, \ldots, f_{m+q}). \end{cases}$$

Or, il est facile de voir que l'ensemble des formules (25) et (26) fournit la solution générale du système (22). Effectivement, si l'on résout le système (25) par rapport à $t_1, \ldots, t_q$, ce qui donne

$$(27)\qquad \begin{cases} t_1 = \tau_1(u_{m+1}, \ldots, u_{m+q}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t_q = \tau_q(u_{m+1}, \ldots, u_{m+q}), \end{cases}$$

l'équivalence numérique des systèmes (25) et (27) montre qu'en faisant varier les arbitraires $t_1, \ldots, t_q$ du système (25) dans le voisinage de leurs valeurs initiales, les premiers membres $u_{m+1}, \ldots, u_{m+q}$ prennent, dans un voisinage suffisamment rapproché de leurs propres valeurs initiales, *tous* les systèmes possibles de valeurs : il est clair, dès lors, qu'en faisant varier arbitrairement $t_1, \ldots, t_q$ autour de leurs valeurs initiales dans le système [(25), (26)], on obtiendra, pour les $m+q$ variables u, les mêmes systèmes de valeurs numériques qu'en faisant varier arbitrairement $u_{m+1}, \ldots, u_{m+q}$ autour de leurs valeurs initiales dans le système (24).

Ainsi se trouve établie la première partie de notre énoncé.

II. Supposons maintenant, pour établir la seconde, que la solution générale du système (22) soit fournie par les $m+q$ formules (23), dont q convenablement choisies sont résolubles par rapport aux arbitraires $t_1, \ldots, t_q$.

Cela étant, si les q dernières formules (23) sont résolubles comme il vient d'être dit, il est clair qu'en effectuant la résolution dont il s'agit, et remplaçant dans les m premières formules (23) les arbitraires $t_1, \ldots, t_q$ par les valeurs ainsi obtenues, le groupe résultant,

$$(28)\qquad \begin{cases} t_1 = \tau_1(u_{m+1}, \ldots, u_{m+q}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t_q = \tau_q(u_{m+1}, \ldots, u_{m+q}), \\ u_1 = f_1(\tau_1, \ldots, \tau_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m = f_m(\tau_1, \ldots, \tau_q), \end{cases}$$

est numériquement équivalent à (23) : le groupe réduit formé par les m dernières équations (28), où ne figurent que les $m+q$ variables u, est, dès lors, une conséquence numérique du système réduit formé par les m équations (22), et, par suite, lui équivaut numériquement (nº 131) ; le système (22) est donc, comme le groupe réduit en question, résoluble par rapport aux m premières variables u (nº 133).

Réciproquement, supposons les m équations (22) résolubles par rapport aux m premières variables u. En adjoignant à ces m équations les q dernières formules (23), le système résultant, Σ, composé de $m+q$ équations, est évidemment résoluble par rapport aux $m+q$ variables

$$u_1, \quad \ldots, \quad u_m, \quad u_{m+1}, \quad \ldots, \quad u_{m+q},$$

et, par suite, est réduit ; il est, d'autre part, identiquement vérifié par la substitution à ces variables de leurs valeurs tirées des $m+q$ formules (23), et, par suite, est une conséquence numérique de (23) : ces deux systèmes réduits, composés l'un et l'autre de $m+q$ équations, sont donc numériquement équivalents (nº 131), et, dès lors, résolubles par rapport aux mêmes groupes de $m+q$ variables (nº 133). Or, puisque le système (23) contient, en vertu de notre hypothèse, q équations résolubles par rapport aux q arbitraires, il est lui-même évidemment résoluble par rapport à ces q arbitraires et aux m variables u figurant dans les m équations restantes : le système Σ, composé des m équations (22) et des q dernières formules (23), est donc résoluble par rapport aux mêmes quantités, et, comme les m équations (22) sont indépendantes des q arbitraires, il faut bien que les q dernières formules (23) soient résolubles par rapport à elles.

139. Dans ce qui précède, on se donne un système réduit de m équations à $m+q$ variables $u_1, u_2, \ldots, u_{m+q}$, et l'on montre qu'il existe, pour en exprimer la solution générale, quelque système de $m+q$ formules égalant les $m+q$ variables dont il s'agit à autant de fonctions olotropes de q arbitraires, de telle façon que q d'entre ces formules soient résolubles par rapport aux arbitraires.

Réciproquement, étant donné un pareil système de $m+q$ formules, on en tire, par l'élimination des q arbitraires, un système réduit de m équations, aux $m+q$ variables u_1, u_2, ..., u_{m+q},

dont la solution générale se trouve exprimée par les $m+q$ formules données.

Supposons, en effet, que le système (23) soit donné, et que les q dernières équations de ce système soient résolubles par rapport à $t_1, \ldots, t_q$. En effectuant cette résolution, ce qui donne les formules

$$(29)\quad \begin{cases} t_1 = \tau_1(u_{m+1}, \ldots, u_{m+q}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t_q = \tau_q(u_{m+1}, \ldots, u_{m+q}), \end{cases}$$

et portant les valeurs ainsi obtenues dans les m premières équations (23), il vient

$$(30)\quad \begin{cases} u_1 = f_1(\tau_1, \ldots, \tau_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m = f_m(\tau_1, \ldots, \tau_q). \end{cases}$$

Ce système (30) est évidemment un système réduit, aux $m+q$ variables $u_1, u_2, \ldots, u_{m+q}$, résoluble par rapport aux m premières : si donc on pose

$$(31)\quad \begin{cases} u_{m+1} = f_{m+1}(t_1, \ldots, t_q), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{m+q} = f_{m+q}(t_1, \ldots, t_q), \end{cases}$$

et qu'on remplace, dans (30), $u_{m+1}, \ldots, u_{m+q}$ par les seconds membres de (31), il résulte du raisonnement fait à l'alinéa I du numéro précédent que le groupe des $m+q$ formules résultantes fournit la solution générale du système (30). Or, en vertu de l'équivalence numérique qui existe entre (29) et (31), la substitution dont il s'agit, effectuée dans les fonctions $\tau_1, \ldots, \tau_q$, les rend identiquement égales à $t_1, \ldots, t_q$, et, par suite, rend le système (30) identique au groupe des m premières formules (23). La solution générale du système (30) se trouve donc exprimée par les $m+q$ formules (23).

140. Enfin, *si les $m+q$ formules olotropes (23), dont q sont supposées résolubles par rapport aux arbitraires $t_1, \ldots, t_q$, vérifient constamment le système réduit des m équations (22), aux $m+q$ variables $u_1, u_2, \ldots, u_{m+q}$, elles ne peuvent manquer d'en fournir la solution générale.*

Effectivement, les $m+q$ formules (23) fournissent (n° 139) la

solution générale du système réduit de m équations (aux seules variables u) auquel conduit l'élimination des q arbitraires ; toute solution numérique de ce dernier figure donc dans quelque solution numérique de (23), et par suite, en vertu de notre hypothèse, est une solution numérique de (22). Le système réduit (22) se trouve ainsi être conséquence numérique d'un système, également réduit, composé d'équations en même nombre ; il lui est, dès lors, numériquement équivalent (n° 131), et la solution générale en est fournie par les mêmes formules.

Systèmes d'équations olotropes où certaines indéterminées sont assujetties à être fonctions des autres.

141. *Si le système*

$$(1) \qquad \begin{cases} f_1(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0, \\ f_2(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_M(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0, \end{cases}$$

où

$$\begin{matrix} u, & v, & \ldots, \\ x, & y, & \ldots \end{matrix}$$

désignent deux groupes d'indéterminées, admet quelque solution numérique,

$$(2) \qquad \begin{cases} u_0, & v_0, & \ldots, \\ x_0, & y_0, & \ldots, \end{cases}$$

à partir de laquelle ses premiers membres soient tous développables, on peut, sous le bénéfice d'une certaine restriction qui sera formulée plus loin, lui substituer un système de même forme jouissant de la double propriété : 1° d'admettre, à l'intérieur d'un domaine suffisamment petit de centre $(u_0, v_0, \ldots, x_0, y_0, \ldots)$, *les mêmes solutions numériques que* (1); *2° de comprendre deux groupes d'équations, dont le premier soit résoluble, à partir des valeurs* (2), *par rapport à certaines variables convenablement choisies du groupe* $u, v, \ldots$, *tandis que les équations restantes ne contiennent que les seules variables du groupe* $x, y, \ldots$.

Soit n le nombre des variables du groupe $u, v, \ldots$.

Si les dérivées premières de $f_1, f_2, \ldots, f_M$ par rapport à $u, v, \ldots$ sont toutes identiquement nulles, les équations (1) ne contiennent que les seules variables $x, y, \ldots$ (n° 94), et la proposition est vraie d'elle-même, avec cette circonstance particulière que le premier des deux groupes d'équations spécifiés par notre énoncé n'existe pas.

Abstraction faite de ce cas singulier, il arrive nécessairement de deux choses l'une :

Ou bien il existe n des fonctions

$$(3) \qquad f_1, \ f_2, \ \ldots, \ f_M$$

dont le déterminant différentiel relatif à $u, v, \ldots$ n'est pas identiquement nul ;

Ou bien, μ désignant un certain entier moindre que n, il existe μ des fonctions (3) dont les déterminants différentiels relatifs à $u, v, \ldots$ ne sont pas tous identiquement nuls, tandis qu'au contraire l'adjonction aux μ fonctions dont il s'agit de l'une quelconque des fonctions restantes (s'il y en a) fournit un système dont les déterminants différentiels relatifs à $u, v, \ldots$ sont tous identiquement nuls.

En désignant donc par μ un entier, soit inférieur, soit égal à n, on peut répartir les équations du système (1) en deux groupes,

$$(4) \qquad \begin{cases} f_1(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0, \\ f_2(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_\mu(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0 \end{cases}$$

et

$$(5) \qquad \begin{cases} f_{\mu+1}(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_M \ (u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0, \end{cases}$$

jouissant respectivement des propriétés suivantes :

1° Dans le système (4), les déterminants différentiels (d'ordre μ) relatifs à $u, v, \ldots$ ne sont pas tous identiquement nuls; *nous supposerons en outre,* ce qui n'arrive pas nécessairement, *que l'un au moins de ces déterminants différentiels a une valeur initiale différente de zéro.*

2° Dans le système (5), les premiers membres satisfont, en vertu

de 126 (B ou C), à des identités de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} f_{\mu+1} = F_{\mu+1}(f_1, f_2, \ldots, f_\mu, x, y, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_M \quad = F_M \quad (f_1, f_2, \ldots, f_\mu, x, y, \ldots). \end{array}\right.$$

Finalement donc, le système proposé (1) peut être remplacé par le système numériquement équivalent

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0, \\ f_2(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_\mu(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} F_{\mu+1}(0, 0, \ldots, 0, x, y, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_M \quad (0, 0, \ldots, 0, x, y, \ldots) = 0, \end{array}\right.$$

qui jouit bien des propriétés spécifiées par l'énoncé.

142. Désignons par u, v, ... diverses fonctions inconnues, en nombre n, des variables indépendantes x, y, ..., et proposons-nous d'intégrer le système différentiel d'ordre zéro

$$(6) \qquad \left\{\begin{array}{l} f_1(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0, \\ f_2(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_M(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0, \end{array}\right.$$

dont les premiers membres, développables à partir de certaines valeurs initiales de u, v, ..., x, y, ..., s'annulent numériquement pour ces valeurs.

Au système proposé (6) nous substituerons, comme au numéro précédent, et sous le bénéfice des mêmes restrictions, un système numériquement équivalent,

$$S = (R, T),$$

tel : 1° que le groupe R soit résoluble par rapport à certaines variables, convenablement choisies, du groupe u, v, ...; 2° que le groupe T contienne exclusivement les variables x, y, ...

Cela étant, deux cas sont à distinguer :

I. *Les équations du groupe* T *ne se réduisent pas toutes à des identités.*

Le système proposé (6) n'admet alors aucun groupe d'intégrales :

car la substitution de pareilles intégrales à u, v, ... dans le système S, numériquement équivalent à (6), doit transformer chaque relation de S en une identité ayant lieu quels que soient x, y, ...

II. *Les équations du groupe* T *se réduisent toutes à des identités.*

En désignant par $\mu (\leqq n)$ le nombre des équations du groupe R, on peut à ce dernier substituer un système numériquement équivalent, résolu par rapport à μ fonctions inconnues convenablement choisies, u', v', ..., qui se trouveront exprimées à l'aide de x, y, ... et des $n - \mu$ inconnues restantes u'', v'', ... Si l'on convient alors de restreindre le champ de variation de $x, y, \ldots, u', v', \ldots, u'', v'', \ldots$ à un certain domaine autour des valeurs numériques initiales de ces quantités, on pourra, dans ces limites, disposer arbitrairement des fonctions inconnues u'', v'', ... ; on aura ainsi, pour le système proposé, une infinité de groupes d'intégrales si μ est $< n$, et un seul groupe si $\mu = n$.

CHAPITRE IX.

SIMPLIFICATION ET EXTENSION DES RÉSULTATS OBTENUS SUR LES SYSTÈMES ORTHONOMES : PROPOSITIONS PRÉLIMINAIRES.

Corrélation multiplicatoire entre les systèmes différentiels.

143. Considérons deux systèmes différentiels, S, T, impliquant les mêmes fonctions inconnues u, v, ... des mêmes variables x, y, ... ; sur chacune des équations de S exécutons, suivant la règle des fonctions composées, toutes les différentiations possibles des ordres 0, 1, 2, ..., m, puis opérons de même sur T; assimilons enfin, dans toutes ces relations, les variables x, y, ..., les inconnues u, v, ... et leurs dérivées à autant de variables indépendantes distinctes. Cela étant, *si les deux systèmes* S, T *sont en corrélation multiplicatoire* (n° 122), *les deux systèmes qui s'en déduisent respectivement par toutes les différentiations possibles des ordres* 0, 1, 2, ..., m *jouissent de la même propriété.*

Notre proposition étant vraie d'elle-même pour $m = 0$ (puisque la conclusion est alors identique à l'hypothèse), il suffit de faire voir qu'en la supposant vraie pour une valeur quelconque de m, elle l'est encore pour la valeur suivante $m + 1$.

A cet effet, nommons S′ et T′ les groupes respectivement déduits de S et T par toutes les différentiations possibles du premier ordre; S″ et T″ les groupes respectivement déduits de S et T par toutes les différentiations possibles du second ordre; et ainsi de suite. On suppose que chacun des deux systèmes

(1) $$(S, S', \ldots, S^{(m)}),$$

(2) $$(T, T', \ldots, T^{(m)})$$

est une combinaison multiplicatoire de l'autre, et il s'agit de prouver

que la même chose a lieu pour les deux systèmes

$$(3) \qquad (S, S', \ldots, S^{(m)}, S^{(m+1)}),$$

$$(4) \qquad (T, T', \ldots, T^{(m)}, T^{(m+1)}),$$

que le système (4), par exemple, est une combinaison multiplicatoire du système (3).

Effectivement, le système (4) se compose du système (2) et du groupe $T^{(m+1)}$. Or, toute équation du système (2), étant, d'après l'hypothèse, une combinaison multiplicatoire de (1), est, par là même, une combinaison multiplicatoire de (3).

Considérons maintenant une équation quelconque du groupe $T^{(m+1)}$, ou, ce qui revient au même, une équation quelconque déduite de $T^{(m)}$ par différentiation première. En désignant par

$$L_1 = 0, \qquad L_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad L_k = 0$$

les équations du système (1), et par

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_k$$

des multiplicateurs convenablement choisis, toute équation du groupe $T^{(m)}$ est de la forme

$$A_1 L_1 + A_2 L_2 + \ldots + A_k L_k = 0.$$

En la différentiant par rapport à une variable quelconque, x par exemple, l'équation résultante peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} &\Omega_x(A_1).L_1 + \Omega_x(A_2).L_2 + \ldots + \Omega_x(A_k).L_k \\ &\quad + A_1.\Omega_x(L_1) + A_2.\Omega_x(L_2) + \ldots + A_k.\Omega_x(L_k) = 0, \end{aligned}$$

où le symbole Ω_x désigne une différentiation première relative à x exécutée suivant la règle des fonctions composées. Cela étant, il suffit d'observer que les équations

$$\begin{matrix} L_1 = 0, & L_2 = 0, & \ldots, & L_k = 0, \\ \Omega_x(L_1) = 0, & \Omega_x(L_2) = 0, & \ldots, & \Omega_x(L_k) = 0 \end{matrix}$$

appartiennent toutes au système (3).

144. Dans un système différentiel quelconque, attribuons à chacune des variables indépendantes et des fonctions inconnues une cote

unique (nº 102), *les cotes des diverses variables indépendantes étant toutes égales à* 1, et celles des diverses fonctions inconnues étant quelconques (positives, nulles ou négatives). Relativement à un pareil système, nous adopterons, une fois pour toutes, les conventions d'écriture suivantes. *Le système différentiel étant désigné par une lettre majuscule,* S :

1º *La notation* s_C (lettre minuscule affectée de l'indice C) *désignera l'ensemble des équations qui, dans le système* S (*non prolongé*), *possèdent une cote égale à l'entier* (*algébrique*) C.

2º *La notation* S_C (lettre majuscule affectée de l'indice C, qui y figure, comme dans 1º, en bas et à droite) *désignera l'ensemble des équations qui, dans le système* S *prolongé* (nº 99), *possèdent une cote égale à* C.

3º *La notation* ${}^{(C)}S$ (lettre majuscule affectée de l'indice C, qui y figure entre parenthèses en haut et à gauche) *désignera l'ensemble des équations qui, dans le système* S *prolongé, possèdent une cote inférieure ou égale à* C.

145. Soient S et T deux systèmes différentiels impliquant les mêmes fonctions inconnues des mêmes variables indépendantes. Attribuant *aux variables indépendantes des cotes respectives toutes égales à* 1, et aux fonctions inconnues des cotes respectives quelconques, désignons par δ et Δ les cotes respectivement minima et maxima des relations figurant dans les deux systèmes, puis par C un entier algébrique quelconque (au moins égal à δ).

Cela étant, *pour que les systèmes*

$${}^{(C)}S, \quad {}^{(C)}T$$

(nº 144) *soient en corrélation multiplicatoire quel que soit* C, *il suffit que cela ait lieu pour*

$$C = \delta, \quad \delta + 1, \quad \ldots, \quad \Delta.$$

Désignons, en effet, par λ la différence (positive ou nulle) $\Delta - \delta$, et par

$$s^{(n)}_{\delta+p}, \quad t^{(n)}_{\delta+p} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, \lambda)$$

les ensembles de relations respectivement déduits de

$$s_{\delta+p}, \quad t_{\delta+p}$$

(n° 144) à l'aide de toutes les différentiations possibles de l'ordre n; désignons en outre par k un entier positif quelconque, et, donnant à C la valeur $\Delta + k$ ou $\delta + \lambda + k$, considérons le Tableau

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{llllllll}
s_\delta, & s'_\delta, & \ldots, & s_\delta^{(\lambda)}, & s_\delta^{(\lambda+1)}, & \ldots, & s_\delta^{(\lambda+k)}, \\
 & s_{\delta+1}, & \ldots, & s_{\delta+1}^{(\lambda-1)}, & s_{\delta+1}^{(\lambda)}, & \ldots, & s_{\delta+1}^{(\lambda+k-1)}, \\
 & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\
 & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots; \\
 & & & s_{\delta+\lambda}, & s'_{\delta+\lambda}, & \ldots, & s_{\delta+\lambda}^{(k)}.
\end{array}\right.$$

Pour former, à l'aide du Tableau ci-dessus, les systèmes respectifs

$$^{(\delta)}S,\quad ^{(\delta+1)}S,\quad \ldots,\quad ^{(\delta+\lambda)}S,\quad ^{(\delta+\lambda+1)}S,\quad \ldots,\quad ^{(\delta+\lambda+k)}S,$$

il suffit d'en extraire les portions respectivement obtenues en prenant sur sa gauche les

$$1,\quad 2,\quad \ldots,\quad \lambda+1,\quad \lambda+2,\quad \ldots,\quad \lambda+k+1$$

premières colonnes verticales. On voit en outre qu'en effectuant sur les équations $^{(\delta+\lambda)}S$ toutes les différentiations possibles des ordres 0, 1, 2, ..., k, on obtient $^{(\delta+\lambda+k)}S$.

Les mêmes remarques sont applicables au Tableau

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{llllllll}
t_\delta, & t'_\delta, & \ldots, & t_\delta^{(\lambda)}, & t_\delta^{(\lambda+1)}, & \ldots, & t_\delta^{(\lambda+k)}, \\
 & t_{\delta+1}, & \ldots, & t_{\delta+1}^{(\lambda-1)}, & t_{\delta+1}^{(\lambda)}, & \ldots, & t_{\delta+1}^{(\lambda+k-1)}, \\
 & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\
 & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, \\
 & & & t_{\delta+\lambda}, & t'_{\delta+\lambda}, & \ldots, & t_{\delta+\lambda}^{(k)}
\end{array}\right.$$

et aux systèmes

$$^{(\delta)}T,\quad ^{(\delta+1)}T,\quad \ldots,\quad ^{(\delta+\lambda)}T,\quad ^{(\delta+\lambda+1)}T,\quad \ldots,\quad ^{(\delta+\lambda+k)}T.$$

Cela étant, puisque les systèmes

$$^{(\delta+\lambda)}S,\quad ^{(\delta+\lambda)}T$$

sont, par hypothèse, en corrélation multiplicatoire, les systèmes

$$^{(\delta+\lambda+k)}S,\quad ^{(\delta+\lambda+k)}T$$

jouissent de la même propriété (n° 143).

146. *Les mêmes notations étant adoptées qu'au numéro précédent, si l'on suppose que, pour*

$$C = \delta, \quad \delta + 1, \quad \ldots, \quad \Delta,$$

les deux systèmes

$$(s_\delta, s_{\delta+1}, \ldots, s_C)$$

et

$$(t_\delta, t_{\delta+1}, \ldots, t_C)$$

soient en corrélation multiplicatoire, la même chose a lieu, quel que soit C, *pour les deux systèmes*

$$^{(C)}S, \quad ^{(C)}T.$$

Il suffit, en vertu du numéro précédent, de vérifier l'exactitude de notre conclusion pour $C = \delta, \delta + 1, \ldots, \Delta$.

Pour $C = \delta$, elle résulte immédiatement de l'hypothèse, puisque les deux systèmes $^{(\delta)}S$, $^{(\delta)}T$ se déduisent respectivement des Tableaux (5) et (6) en prenant sur leur gauche la première colonne.

Pour $C = \delta + 1$, on remarquera, d'une part, qu'en vertu de notre hypothèse, combinée avec la proposition du n° 143, les deux systèmes

$$(s_\delta, s'_\delta) \quad \text{et} \quad (t_\delta, t'_\delta)$$

sont en corrélation multiplicatoire ; d'autre part, qu'en vertu de notre hypothèse, les deux systèmes

$$(s_\delta, s_{\delta+1}) \quad \text{et} \quad (t_\delta, t_{\delta+1})$$

jouissent de la même propriété. Les systèmes $^{(\delta+1)}S$, $^{(\delta+1)}T$, respectivement déduits des Tableaux (5) et (6) en prenant sur leur gauche les deux premières colonnes, ont donc entre eux la corrélation voulue.

Pour $C = \delta + 2$, on observera de même que les trois systèmes

$$(s_\delta, s'_\delta, s''_\delta),$$
$$(s_\delta, s_{\delta+1}, s'_\delta, s'_{\delta+1}),$$
$$(s_\delta, s_{\delta+1}, s_{\delta+2})$$

sont respectivement en corrélation multiplicatoire avec les trois sys-

tèmes

$$(t_\delta, t'_\delta, t''_\delta),$$
$$(t_\delta, t_{\delta+1}, t'_\delta, t'_{\delta+1}),$$
$$(t_\delta, t_{\delta+1}, t_{\delta+2}).$$

Les systèmes

$$^{(\delta+2)}S, \quad ^{(\delta+2)}T,$$

respectivement déduits des Tableaux (5) et (6) en prenant sur leur gauche les trois premières colonnes, ont donc entre eux la corrélation voulue.

Pour $C = \delta + 3$, on observera que les quatre systèmes

$$(s_\delta, s'_\delta, s''_\delta, s'''_\delta),$$
$$(s_\delta, s_{\delta+1}, s'_\delta, s'_{\delta+1}, s''_\delta, s''_{\delta+1}),$$
$$(s_\delta, s_{\delta+1}, s_{\delta+2}, s'_\delta, s'_{\delta+1}, s'_{\delta+2}),$$
$$(s_\delta, s_{\delta+1}, s_{\delta+2}, s_{\delta+3})$$

sont respectivement en corrélation multiplicatoire avec les quatre systèmes

$$(t_\delta, t'_\delta, t''_\delta, t'''_\delta),$$
$$(t_\delta, t_{\delta+1}, t'_\delta, t'_{\delta+1}, t''_\delta, t''_{\delta+1}),$$
$$(t_\delta, t_{\delta+1}, t_{\delta+2}, t'_\delta, t'_{\delta+1}, t'_{\delta+2}),$$
$$(t_\delta, t_{\delta+1}, t_{\delta+2}, t_{\delta+3}).$$

Et ainsi de suite jusques et y compris $C = \delta + \lambda = \Delta$.

147. Considérons actuellement un système différentiel, S, satisfaisant aux trois conditions A, B, C formulées ci-après :

A. Le système S *est résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et les seconds membres sont indépendants de toute dérivée principale.*

B. En attribuant, dans toutes les équations du système, aux variables indépendantes des cotes respectives toutes égales à 1, *et aux inconnues des cotes respectives convenablement choisies, chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées) dont la cote ne surpasse pas celle du premier membre correspondant.*

Désignons maintenant par δ la cote minima des équations de S, par Δ leur cote maxima, par Θ un entier (algébrique) déterminé, au moins égal à Δ, et, des groupes

$$S_\delta, \quad S_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad S_\Theta$$

(n° 144), extrayons respectivement des groupes,

$$t_\delta, \quad t_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad t_\Theta, \tag{7}$$

possédant la double propriété de se composer d'équations en nombres respectivement égaux à ceux des dérivées principales de cotes

$$\delta, \quad \delta+1, \quad \ldots, \quad \Theta,$$

et *de contenir les groupes*

$$s_\delta, \quad s_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad s_\Delta \tag{8}$$

(n° 144) (la chose est possible, dans tous les cas, d'une manière au moins, et, dans l'immense majorité des cas, de plusieurs manières).

Cela étant, nous adjoindrons aux hypothèses A et B, déjà énoncées, l'hypothèse suivante :

C. Il existe quelque suite, (7), *remplissant les conditions ci-dessus indiquées, et telle que les groupes* $t_\delta, t_{\delta+1}, \ldots, t_\Theta$ *soient successivement résolubles par rapport aux dérivées principales de cotes* $\delta, \delta+1, \ldots, \Theta$.

En d'autres termes, nous supposons que le déterminant différentiel de l'ensemble de ces groupes par rapport aux dérivées dont il s'agit n'est pas identiquement nul, et nous nous astreignons à ne considérer les diverses quantités dont il dépend que dans les limites où sa valeur numérique reste différente de zéro.

Toutes ces conditions étant supposées satisfaites, il est clair que la résolution successive des groupes (7), effectuée par rapport aux dérivées principales de cotes $\delta, \delta+1, \ldots, \Theta$, fournira pour chacune d'elles une expression à la fois indépendante et de toute dérivée principale quelle qu'elle soit, et de toute dérivée paramétrique ou fonction inconnue dont la cote surpasserait celle du premier membre correspondant. En outre, les divers groupes (8), qui, par hypothèse,

figurent dans (7), ne contenant dans leurs seconds membres aucune dérivée principale, ne peuvent manquer de figurer *tels qu'ils sont* dans les formules de résolution, en sorte que *ces dernières comprennent nécessairement toutes les équations du système* S. Nous désignerons alors par

$$(9) \qquad \psi_\delta, \ \psi_{\delta+1}, \ \ldots, \ \psi_\Theta$$

les formules de résolution dont il s'agit, par W un système extrait de (9) sous la seule condition *de contenir les groupes* (8), et par C un entier algébrique quelconque (au moins égal à δ).

Cela étant, *les deux systèmes*

$$^{(C)}S, \quad ^{(C)}W$$

(n° **144**) *sont en corrélation multiplicatoire quel que soit* C.

I. Soient

$$(10) \qquad F(z, s, \ldots, t, \ldots)$$

une fonction développable à partir des valeurs

$$z_0, \ s_0, \ \ldots, \ t_0, \ \ldots,$$

considérées comme initiales;

$$(11) \qquad \zeta(t, \ldots), \ \ \sigma(t, \ldots), \ \ldots$$

des fonctions développables à partir de t_0, ... et ayant pour valeurs initiales respectives z_0, s_0, ...; $H(t, \ldots)$ la fonction composée

$$F[\zeta(t, \ldots), \sigma(t, \ldots), \ldots, t, \ldots]$$

obtenue par la combinaison des fonctions (10) et (11), et développable, comme les fonctions (11), à partir de t_0, ..., en vertu du n° 59.

Cela étant, *si l'on considère les deux équations*

$$\begin{aligned} F(z, s, \ldots, t, \ldots) &= 0, \\ H(t, \ldots) &= 0, \end{aligned}$$

l'une quelconque d'entre elles est une combinaison multiplica-

toire de l'autre et des relations

$$\begin{cases} z - \zeta(t, \ldots) = 0, \\ s - \sigma(t, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots \ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Il suffit, pour s'en convaincre, de se reporter à l'alinéa II du n° 120.

II. Désignant par C un entier algébrique *inférieur à* Θ (et au moins égal à δ), remplaçons dans le groupe t_{C+1} (entier par rapport aux dérivées principales) les dérivées principales de cote inférieure à $C+1$ par leurs valeurs tirées de

$$(12) \qquad \psi_\delta, \quad \psi_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad \psi_C,$$

et nommons φ_{C+1} le groupe résultant. Cela étant, *l'un quelconque des deux groupes*

$$t_{C+1}, \quad \varphi_{C+1}$$

est une combinaison multiplicatoire de l'autre et du système (12).

Car si, dans ces deux groupes, on considère deux relations *correspondantes,* il résulte immédiatement de l'alinéa I que l'une quelconque d'entre elles est une combinaison multiplicatoire de l'autre et du système (12).

III. *Pour*

$$C = \delta, \quad \delta+1, \quad \ldots, \quad \Theta,$$

les deux systèmes

$$(13) \qquad (t_\delta, t_{\delta+1}, \ldots, t_C)$$

et

$$(14) \qquad (\psi_\delta\, \psi_{\delta+1}, \ldots, \psi_C)$$

sont en corrélation multiplicatoire.

La chose est évidente pour $C = \delta$, puisque t_δ et ψ_δ sont l'un et l'autre identiques à s_δ. Il suffit donc de faire voir qu'en supposant C moindre que Θ, la corrélation spécifiée, si elle a lieu entre les systèmes (13) et (14), a nécessairement lieu entre les systèmes

$$(15) \qquad (t_\delta, t_{\delta+1}, \ldots, t_C, t_{C+1})$$

et

(16) $$(\psi_\delta, \psi_{\delta+1}, \ldots, \psi_C, \psi_{C+1}).$$

1° Le système (16) est une combinaison multiplicatoire de (15).

Effectivement, le système (16) se compose du système (14) et du groupe ψ_{C+1}.

Or, en vertu de ce qui est admis pour la valeur C, le système (14) est une combinaison multiplicatoire de (13), et, par là même, de (15).

Quant au groupe ψ_{C+1}, qui provient du groupe φ_{C+1}, défini à l'alinéa précédent, par la simple application de l'algorithme de Cramer, il en est, comme cela résulte d'un calcul élémentaire ([1]), une combinaison multiplicatoire; à son tour, le groupe φ_{C+1} est, en vertu de l'alinéa II, une combinaison multiplicatoire de

(17) $$(\psi_\delta, \psi_{\delta+1}, \ldots, \psi_C, t_{C+1});$$

finalement, le système

$$(\psi_\delta, \psi_{\delta+1}, \ldots, \psi_C)$$

est, comme nous l'avons dit, une combinaison multiplicatoire de

$$(t_\delta, t_{\delta+1}, \ldots, t_C),$$

d'où il résulte que (17) est une combinaison multiplicatoire de (15). On voit donc, de proche en proche, que le groupe ψ_{C+1} est, lui aussi, une combinaison multiplicatoire de (15).

2° Le système (15) est une combinaison multiplicatoire de (16).

Effectivement, le système (15) se compose du système (13) et du groupe t_{C+1}.

Or, en vertu de ce qui est admis pour la valeur C, le système (13) est une combinaison multiplicatoire de (14), et, par là même, de (16).

([1]) Lorsqu'un système de m équations, linéaire par rapport à m des variables qui s'y trouvent engagées, est résoluble par rapport à ces m variables conformément à l'algorithme de Cramer, il est en corrélation multiplicatoire avec le système constitué par les m formules de résolution : il suffit, pour s'en convaincre, de se reporter au calcul élémentaire à l'aide duquel on passe du système donné aux formules de résolution et inversement.

Quant au groupe t_{C+1}, il est, en vertu de l'alinéa précédent, une combinaison multiplicatoire de

$$(18) \qquad (\psi_\delta, \psi_{\delta+1}, \ldots, \psi_C, \varphi_{C+1});$$

à son tour, le groupe φ_{C+1} en est une de ψ_{C+1}, d'où il résulte que (18) est une combinaison multiplicatoire de (16). On voit donc, de proche en proche, que t_{C+1} est, lui aussi, une combinaison multiplicatoire de (16).

IV. Revenons à notre énoncé général.

Le système S faisant partie de W, le système ${}^{(C)}S$ fait partie de ${}^{(C)}W$, et, par suite, en est une combinaison multiplicatoire.

Réciproquement, désignons par Ψ et T les systèmes respectifs (9) et (7). Le système W faisant partie de Ψ, le système ${}^{(C)}W$ fait partie de ${}^{(C)}\Psi$, et, par suite, en est une combinaison multiplicatoire. D'ailleurs, les systèmes Ψ et T satisfaisant, en vertu de l'alinéa III, à toutes les conditions requises par notre énoncé du n° 146, l'un quelconque des deux systèmes ${}^{(C)}\Psi$, ${}^{(C)}T$, le premier, par exemple, ${}^{(C)}\Psi$, est une combinaison multiplicatoire de l'autre, ${}^{(C)}T$. Enfin, ${}^{(C)}T$ comprend manifestement les mêmes équations que ${}^{(C)}S$. On voit donc, de proche en proche, que ${}^{(C)}W$ est une combinaison multiplicatoire de ${}^{(C)}S$.

148. Il nous faut, avant de poursuivre, dire quelques mots du changement des variables indépendantes : nous nous bornerons au cas où le changement est *linéaire*.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait trois variables indépendantes, x, y, z, et soient x', y', z' trois nouvelles variables liées aux anciennes par un groupe de trois relations, linéaires par rapport aux six quantités : ces trois relations, supposées indifféremment résolubles par rapport à x, y, z et par rapport à x', y', z', établissent, entre l'espace $\big[[x, y, z]\big]$ et l'espace $\big[[x', y', z']\big]$, une correspondance point par point. Soient

$$(x_0, y_0, z_0)$$

et

$$(x'_0, y'_0, z'_0)$$

deux points correspondants de ces deux espaces : si, dans une fonc-

tion de x, y, z développable à partir de x_0, y_0, z_0, on remplace les trois variables par leurs valeurs en x', y', z' tirées des formules de transformation, il résulte du principe général des fonctions composées qu'on obtient une fonction de x', y', z' développable à partir de x'_0, y'_0, z'_0. Réciproquement. Il est clair, d'ailleurs, que si, après avoir ainsi transformé une fonction, on exécute sur le résultat la transformation inverse, on retombe sur la fonction d'où l'on était parti, et que les deux fonctions déduites l'une de l'autre par ce mécanisme prennent, en deux points correspondants, la même valeur numérique. Cela étant, proposons-nous de rechercher par quelles relations se trouvent liées, en ces deux mêmes points, les valeurs des dérivées de tous ordres des deux fonctions.

I. *Expressions des dérivées anciennes à l'aide des dérivées nouvelles.*

Pour former de semblables expressions, supposons les formules de transformation résolues par rapport aux variables nouvelles, et soient

$$(19)\qquad \begin{cases} x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \lambda_1, \\ y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \lambda_2, \\ z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + \lambda_3 \end{cases}$$

les formules de résolution. En désignant par

$$u(x, y, z)$$

et

$$u'(x', y', z')$$

deux fonctions déduites l'une de l'autre, la relation

$$u(x, y, z) = u'(x', y', z')$$

est une identité en x, y, z quand on remplace dans son second membre x', y', z' par les valeurs tirées des formules (19). On peut donc, pour calculer les dérivées successives de $u(x, y, z)$, opérer sur $u'(x', y', z')$, à condition d'y considérer x', y', z' comme des fonctions de x, y, z définies par (19); l'algorithme des fonctions composées suffit, dès lors, à nous fournir les relations cherchées, et l'on voit immédiatement que les anciennes dérivées de l'ordre k sont des fonctions linéaires et homogènes des dérivées nouvelles du

même ordre, les coefficients de ces fonctions linéaires étant eux-mêmes des fonctions entières et homogènes de degré k des éléments du déterminant

$$(20) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Enfin, si l'on considère les éléments du déterminant (20) et les dérivées nouvelles de l'ordre k comme autant de variables indépendantes distinctes, toute dérivée ancienne de l'ordre k, considérée comme une fonction de ces variables, n'est susceptible que d'une seule expression. Choisissons, en effet, pour les éléments du déterminant (20), des valeurs numériques quelconques (sous la seule restriction qu'elles n'annulent pas ce déterminant), puis, pour les dérivées nouvelles de l'ordre k, des valeurs numériques entièrement arbitraires : il existe une infinité de fonctions de x', y', z' dont les dérivées de l'ordre k prennent, pour quelque système de valeurs numériques, x'_0, y'_0, z'_0, des variables, les valeurs assignées d'avance. Considérons alors une fonction déterminée satisfaisant à cette condition, et effectuons sur elle la transformation (19) : nous obtiendrons ainsi une fonction déterminée de x, y, z, dont les dérivées de l'ordre k prendront dès lors, pour les valeurs x_0, y_0, z_0 de x, y, z qui correspondent à x'_0, y'_0, z'_0, des valeurs numériques déterminées. Deux expressions d'une même dérivée ancienne de l'ordre k seront donc numériquement égales entre elles pour les valeurs particulières assignées d'avance aux quantités qui y figurent, d'où résulte, à cause de l'arbitraire qui préside au choix de ces valeurs, qu'elles sont identiquement égales entre elles.

II. *Expression des dérivées nouvelles à l'aide des dérivées anciennes.*

On raisonnera de même, mais en sens inverse. On supposera les formules de transformation résolues par rapport aux variables anciennes,

$$(21) \qquad \begin{cases} x = \alpha'_1 x' + \beta'_1 y' + \gamma'_1 z' + \lambda'_1, \\ y = \alpha'_2 x' + \beta'_2 y' + \gamma'_2 z' + \lambda'_2, \\ z = \alpha'_3 x' + \beta'_3 y' + \gamma'_3 z' + \lambda'_3, \end{cases}$$

et l'on verra que chaque dérivée nouvelle de l'ordre k admet une expression (unique) linéaire et homogène par rapport aux dérivées anciennes du même ordre, et ayant pour coefficients des fonctions entières et homogènes de degré k des éléments du déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha'_1 & \beta'_1 & \gamma'_1 \\ \alpha'_2 & \beta'_2 & \gamma'_2 \\ \alpha'_3 & \beta'_3 & \gamma'_3 \end{vmatrix}.$$

III. *Si l'on considère, d'une part, les formules,* G_k, *qui expriment les dérivées anciennes de l'ordre k à l'aide des dérivées nouvelles du même ordre* (I), *d'autre part, les formules,* G'_k, *qui expriment les dérivées nouvelles de l'ordre k à l'aide des dérivées anciennes du même ordre* (II), *l'un quelconque de ces deux groupes de formules se déduit de l'autre par une simple résolution.*

Considérons, en effet, une transformation linéaire déterminée. Nos deux groupes d'équations sont évidemment réduits (n° 128), puisqu'ils sont résolus. L'un quelconque d'entre eux est d'ailleurs une conséquence numérique de l'autre : le second, par exemple, est une conséquence numérique du premier. Effectivement, une solution numérique quelconque du groupe G_k s'obtient en choisissant arbitrairement les valeurs numériques des dérivées nouvelles de l'ordre k, et calculant les valeurs numériques correspondantes que ce groupe assigne aux dérivées anciennes. Or, considérons une fonction de x', y', z' dont les dérivées de l'ordre k prennent, pour quelque système de valeurs numériques, x'_0, y'_0, z'_0, des variables, les valeurs choisies d'avance, et effectuons sur elle la transformation (19) : nous obtiendrons ainsi une fonction de x, y, z dont les dérivées de l'ordre k prendront, pour les valeurs numériques, x_0, y_0, z_0, qui correspondent à x'_0, y'_0, z'_0, les valeurs numériques correspondantes fournies par G_k. Les valeurs numériques associées des dérivées de l'ordre k, tant anciennes que nouvelles, ne peuvent d'ailleurs manquer de vérifier aussi le groupe G'_k, puisque, nonobstant l'arbitraire qui a présidé au choix des dernières, elles se rapportent respectivement à deux fonctions transformées l'une de l'autre. Ainsi, G'_k est une conséquence numérique de G_k, et l'on établirait de même la réciproque.

Enfin, ces deux groupes réduits, étant numériquement équivalents, sont résolubles par rapport aux mêmes groupes de variables (n° 133). Le groupe G_k est donc, comme G'_k, résoluble par rapport aux dérivées nouvelles de l'ordre k, et cette résolution fait retomber sur G'_k; réciproquement.

IV. *Si l'on considère deux fonctions, l'une de x, y, z, l'autre de x', y', z', se déduisant l'une de l'autre par transformation linéaire, et si, dans les formules* G_k (*ou* G'_k), *on remplace les dérivées d'ordre k respectivement anciennes et nouvelles par celles de ces deux fonctions respectives, les formules résultantes, eu égard aux relations* (19) *ou* (21), *qui lient les anciennes variables aux nouvelles, sont des identités, soit en x, y, z, soit en x', y', z'.*

Car, avant qu'on tienne compte des relations (19) ou (21), les deux membres d'une même relation G_k (ou G'_k) prennent la même valeur numérique en deux points correspondants des espaces $\big[[x, y, z]\big]$ et $\big[[x', y', z']\big]$; ils deviennent donc, ensuite, identiquement égaux entre eux.

V. Dans un système différentiel quelconque, S, effectuons un changement linéaire des variables indépendantes, c'est-à-dire remplaçons les anciennes, $x, y, \ldots$, par leurs expressions linéaires à l'aide des nouvelles, $x', y', \ldots$, puis les dérivées anciennes d'ordres $1, 2, \ldots$ des inconnues par leurs expressions à l'aide des dérivées nouvelles des mêmes ordres; et soit S' le système différentiel résultant de cette transformation.

Cela étant, *à tout groupe d'intégrales de* S *correspond un groupe d'intégrales de* S', *et réciproquement.*

Effectivement, les relations de S deviennent, par la substitution aux inconnues d'un groupe quelconque d'intégrales, autant d'identités en $x, y, \ldots$, et ensuite, si l'on remplace $x, y, \ldots$ par leurs valeurs en fonctions de $x', y', \ldots$, autant d'identités en $x', y', \ldots$, ce qui revient à dire, en vertu de IV, que le système S' est identiquement vérifié par les fonctions transformées des intégrales de S.

Réciproquement.

Il est d'ailleurs manifeste que *les groupes correspondants d'inté-*

grales sont en même temps ordinaires ou non (n° 98) *dans les deux systèmes.*

149. Aux conventions d'écritures posées plus haut (n° 144) nous adjoindrons désormais la suivante :

Si sur un système différentiel (ou sur une fonction composée différentielle) on effectue un changement *linéaire et homogène* des variables indépendantes, le nouveau système (ou la nouvelle fonction) obtenu par l'*application pure et simple des formules de la transformation* sera désigné par la même notation, mise deux fois entre crochets ([1]).

Supposons, notamment, qu'il s'agisse d'un système, S, où les variables indépendantes aient été affectées de cotes respectives toutes égales à 1 et les fonctions inconnues de cotes respectives quelconques; puis que, sur le système S, on effectue le changement de variables dont il s'agit, en attribuant de même aux nouvelles variables des cotes respectives toutes égales à 1, et en conservant aux fonctions inconnues les cotes respectives qu'elles avaient avant la transformation. Cela étant, la notation ${}^{(C)}\big[[S]\big]$, par exemple, désignera, parmi les relations appartenant au système transformé $\big[[S]\big]$ ou s'en déduisant par de simples différentiations d'ordres quelconques (relatives aux nouvelles variables), l'ensemble de celles dont la cote ne surpasse pas C; la notation $\big[[{}^{(C)}S]\big]$ désignera le groupe obtenu en considérant, parmi les relations qui appartiennent au système primitif S ou qui s'en déduisent par de simples différentiations d'ordres quelconques (relatives aux anciennes variables), l'ensemble de celles dont la cote ne surpasse pas C, et en effectuant sur elles le changement de variables ; etc.

150. *Si deux systèmes différentiels,* S, T, *impliquant les mêmes fonctions inconnues des mêmes variables indépendantes, sont en*

([1]) Nous nous sommes déjà servi de doubles crochets pour désigner l'espace à la considération duquel on est conduit par celle de variables réelles ou imaginaires en nombre quelconque : mais il n'y a pas de confusion possible entre les deux choses.

corrélation multiplicatoire, les deux systèmes qui s'en déduisent respectivement par un même changement de variables linéaire et homogène jouissent aussi de cette propriété.

Effectivement, si l'on désigne par

$$L_1 = 0, \qquad L_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad L_g = 0$$

les équations de S, il résulte de la corrélation supposée entre S et T que toute équation de T est de la forme

$$A_1 L_1 + A_2 L_2 + \ldots + A_g L_g = 0,$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_g$ sont des multiplicateurs convenablement choisis. Après le changement de variables, cette équation prendra donc la forme

$$\big[[A_1]\big]\big[[L_1]\big] + \big[[A_2]\big]\big[[L_2]\big] + \ldots + \big[[A_g]\big]\big[[L_g]\big] = 0.$$

Ainsi, toute équation de $\big[[T]\big]$ est une combinaison multiplicatoire de $\big[[S]\big]$, et l'on prouverait de même la réciproque.

151. Soient S et T deux systèmes différentiels impliquant les mêmes fonctions inconnues des mêmes variables indépendantes.

Considérant les équations du système S, *effectuons sur elles toutes les différentiations des ordres* 0, 1, 2, ..., *m*, *puis, sur le système résultant, un changement de variables linéaire et homogène.*

Considérant à leur tour les équations du système T, opérons dans l'ordre inverse, c'est-à-dire *effectuons d'abord sur elles le changement de variables dont il s'agit, puis, sur les équations résultantes, toutes les différentiations des ordres* 0, 1, 2, ..., *m* (relativement aux nouvelles variables).

Cela étant, si les deux systèmes S, T *sont en corrélation multiplicatoire, les deux systèmes qui s'en déduisent respectivement par les deux suites d'opérations ci-dessus définies jouissent aussi de cette propriété.*

I. Étant donnée une relation différentielle, effectuons sur elle toutes les différentiations premières, puis sur les équations résultantes un changement de variables linéaire et homogène. Renversons maintenant l'ordre des deux opérations, c'est-à-dire effectuons d'abord sur la relation proposée le changement de variables dont il s'agit, puis sur l'équation transformée toutes les différentiations premières (relativement aux variables nouvelles). Je dis que *les deux systèmes ainsi obtenus* (dans lesquels il est inutile de comprendre l'équation transformée elle-même) *sont en corrélation multiplicatoire* (le passage de l'un à l'autre s'effectuant à l'aide de multiplicateurs constants).

Supposons, pour fixer les idées, qu'il y ait trois variables indépendantes, et que les anciennes, x, y, z, soient liées aux nouvelles, x', y', z', par les relations

$$(22) \qquad \begin{cases} x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z. \end{cases}$$

Soit, d'autre part,

$$(23) \qquad \mathrm{F}\left(x, y, z, u, \ldots, \frac{\partial^{g+h+k} u}{\partial x^g \, \partial y^h \, \partial z^k}, \ldots\right) = 0$$

la relation différentielle proposée entre les inconnues u, ... Soit, enfin,

$$(24) \qquad \frac{\partial^{g+h+k} u}{\partial x^g \, \partial y^h \, \partial z^k} = \sum \mathrm{A}_{p',q',r'} \frac{\partial^{p'+q'+r'} u}{\partial x'^{p'} \, \partial y'^{q'} \, \partial z'^{r'}}$$

la formule qui exprime la dérivée ancienne $\frac{\partial^{g+h+k} u}{\partial x^g \partial y^h \partial z^k}$ à l'aide des dérivées nouvelles du même ordre : dans le second membre de cette formule, la sommation doit être étendue à toutes les valeurs des entiers p', q', r' pour lesquelles on a

$$p' + q' + r' = g + h + k,$$

et $\mathrm{A}_{p',q',r'}$ désigne une fonction entière et homogène, de degré $g + h + k$, des coefficients de la transformation.

Effectuons d'abord sur l'équation proposée (23) les différentia-

tions premières relatives à x, y, z, puis sur les trois équations résultantes la transformation (22). En posant, pour abréger,

$$\frac{\partial^{g+h+k} u}{\partial x^g \,\partial y^h \,\partial z^k} = u_{g,h,k},$$

il vient, par les différentiations,

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial u_{g,h,k}} \frac{\partial^{(g+1)+h+k} u}{\partial x^{g+1} \,\partial y^h \,\partial z^k} + \ldots = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial u_{g,h,k}} \frac{\partial^{g+(h+1)+k} u}{\partial x^{g} \,\partial y^{h+1} \,\partial z^k} + \ldots = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial u_{g,h,k}} \frac{\partial^{g+h+(k+1)} u}{\partial x^{g} \,\partial y^{h} \,\partial z^{k+1}} + \ldots = 0.
\end{aligned}\right.$$

D'autre part, la formule qui exprime la dérivée ancienne $\dfrac{\partial^{(g+1)+h+k} u}{\partial x^{g+1} \,\partial y^h \,\partial z^k}$ à l'aide des dérivées nouvelles du même ordre peut s'écrire

$$\frac{\partial^{(g+1)+h+k} u}{\partial x^{g+1} \,\partial y^h \,\partial z^k} = \frac{\partial u_{g,h,k}}{\partial x} = \alpha_1 \frac{\partial u_{g,h,k}}{\partial x'} + \alpha_2 \frac{\partial u_{g,h,k}}{\partial y'} + \alpha_3 \frac{\partial u_{g,h,k}}{\partial z'},$$

ou, si l'on a égard à la formule (24),

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{(g+1)+h+k} u}{\partial x^{g+1} \,\partial y^h \,\partial z^k} = \sum A_{p',q',r'} \Bigg(&\alpha_1 \frac{\partial^{(p'+1)+q'+r'} u}{\partial x'^{p'+1} \,\partial y'^{q'} \,\partial z'^{r'}} + \alpha_2 \frac{\partial^{p'+(q'+1)+r'} u}{\partial x'^{p'} \,\partial y'^{q'+1} \,\partial z'^{r'}} \\ &+ \alpha_3 \frac{\partial^{p'+q'+(r'+1)} u}{\partial x'^{p'} \,\partial y'^{q'} \,\partial z'^{r'+1}} \Bigg);\end{aligned}$$

et l'on aura, par un calcul semblable,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{g+(h+1)+k} u}{\partial x^{g} \,\partial y^{h+1} \,\partial z^k} = \sum A_{p',q',r'} \Bigg(&\beta_1 \frac{\partial^{(p'+1)+q'+r'} u}{\partial x'^{p'+1} \,\partial y'^{q'} \,\partial z'^{r'}} + \beta_2 \frac{\partial^{p'+(q'+1)+r'} u}{\partial x'^{p'} \,\partial y'^{q'+1} \,\partial z'^{r'}} \\ &+ \beta_3 \frac{\partial^{p'+q'+(r'+1)} u}{\partial x'^{p'} \,\partial y'^{q'} \,\partial z'^{r'+1}} \Bigg),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{g+h+(k+1)} u}{\partial x^{g} \,\partial y^{h} \,\partial z^{k+1}} = \sum A_{p',q',r'} \Bigg(&\gamma_1 \frac{\partial^{(p'+1)+q'+r'} u}{\partial x'^{p'+1} \,\partial y'^{q'} \,\partial z'^{r'}} + \gamma_2 \frac{\partial^{p'+(q'+1)+r'} u}{\partial x'^{p'} \,\partial y'^{q'+1} \,\partial z'^{r'}} \\ &+ \gamma_3 \frac{\partial^{p'+q'+(r'+1)} u}{\partial x'^{p'} \,\partial y'^{q'} \,\partial z'^{r'+1}} \Bigg),\end{aligned}$$

les sommations des seconds membres étant étendues aux mêmes valeurs de p', q', r' que précédemment. Cela étant, la transformation (22),

appliquée aux formules (25), donnera

$$(26)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial u}\left(\alpha_1\frac{\partial u}{\partial x'}+\alpha_2\frac{\partial u}{\partial y'}+\alpha_3\frac{\partial u}{\partial z'}\right)+\ldots\\
&\quad+\frac{\partial F}{\partial u_{g,h,k}}\sum A_{p',q',r'}\left(\alpha_1\frac{\partial^{(p'+1)+q'+r'}u}{\partial x'^{p'+1}\,\partial y'^{q'}\,\partial z'^{r'}}+\alpha_2\frac{\partial^{p'+(q'+1)+r'}u}{\partial x'^{p'}\,\partial y'^{q'+1}\,\partial z'^{r'}}\right.\\
&\qquad\left.+\alpha_3\frac{\partial^{p'+q'+(r'+1)}u}{\partial x'^{p'}\,\partial y'^{q'}\,\partial z'^{r'+1}}\right)+\ldots=0,\\
&\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}\left(\beta_1\frac{\partial u}{\partial x'}+\beta_2\frac{\partial u}{\partial y'}+\beta_3\frac{\partial u}{\partial z'}\right)+\ldots\\
&\quad+\frac{\partial F}{\partial u_{g,h,k}}\sum A_{p',q',r'}\left(\beta_1\frac{\partial^{(p'+1)+q'+r'}u}{\partial x'^{p'+1}\,\partial y'^{q'}\,\partial z'^{r'}}+\beta_2\frac{\partial^{p'+(q'+1)+r'}u}{\partial x'^{p'}\,\partial y'^{q'+1}\,\partial z'^{r'}}\right.\\
&\qquad\left.+\beta_3\frac{\partial^{p'+q'+(r'+1)}u}{\partial x'^{p'}\,\partial y'^{q'}\,\partial z'^{r'+1}}\right)+\ldots=0,\\
&\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial u}\left(\gamma_1\frac{\partial u}{\partial x'}+\gamma_2\frac{\partial u}{\partial y'}+\gamma_3\frac{\partial u}{\partial z'}\right)+\ldots\\
&\quad+\frac{\partial F}{\partial u_{g,h,k}}\sum A_{p',q',r'}\left(\gamma_1\frac{\partial^{(p'+1)+q'+r'}u}{\partial x'^{p'+1}\,\partial y'^{q'}\,\partial z'^{r'}}+\gamma_2\frac{\partial^{p'+(q'+1)+r'}u}{\partial x'^{p'}\,\partial y'^{q'+1}\,\partial z'^{r'}}\right.\\
&\qquad\left.+\gamma_3\frac{\partial^{p'+q'+(r'+1)}u}{\partial x'^{p'}\,\partial y'^{q'}\,\partial z'^{r'+1}}\right)+\ldots=0,
\end{aligned}\right.$$

formules dans lesquelles x, y, z, $u_{g,h,k}$, ... doivent être remplacés par leurs valeurs provenant de la transformation.

Opérons maintenant dans l'ordre inverse, c'est-à-dire effectuons sur l'équation proposée (23) la transformation (22), puis sur l'équation transformée les différentiations premières relatives à x', y', z'. Il vient ainsi

$$(27)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x'}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x'}+\ldots\\
&\quad+\frac{\partial F}{\partial u_{g,h,k}}\sum A_{p',q',r'}\frac{\partial^{(p'+1)+q'+r'}u}{\partial x'^{p'+1}\,\partial y'^{q'}\,\partial z'^{r'}}+\ldots=0,\\
&\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y'}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y'}+\ldots\\
&\quad+\frac{\partial F}{\partial u_{g,h,k}}\sum A_{p',q',r'}\frac{\partial^{p'+(q'+1)+r'}u}{\partial x'^{p'}\,\partial y'^{q'+1}\,\partial z'^{r'}}+\ldots=0,\\
&\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z'}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z'}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z'}+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z'}+\ldots\\
&\quad+\frac{\partial F}{\partial u_{g,h,k}}\sum A_{p',q',r'}\frac{\partial^{p'+q'+(r'+1)}u}{\partial x'^{p'}\,\partial y'^{q'}\,\partial z'^{r'+1}}+\ldots=0,
\end{aligned}\right.$$

formules dans lesquelles x, y, z, $u_{g,h,k}$, ... doivent encore être remplacés par leurs valeurs provenant de la transformation.

Cela étant, il suffit, pour obtenir la première formule (27), de multiplier les équations (26) respectivement par les constantes $\frac{\partial x}{\partial x'}$, $\frac{\partial y}{\partial x'}$, $\frac{\partial z}{\partial x'}$, et d'ajouter membre à membre en tenant compte des relations

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial x'} + \beta_1 \frac{\partial y}{\partial x'} + \gamma_1 \frac{\partial z}{\partial x'}, \\ 0 &= \alpha_2 \frac{\partial x}{\partial x'} + \beta_2 \frac{\partial y}{\partial x'} + \gamma_2 \frac{\partial z}{\partial x'}, \\ 0 &= \alpha_3 \frac{\partial x}{\partial x'} + \beta_3 \frac{\partial y}{\partial x'} + \gamma_3 \frac{\partial z}{\partial x'} \end{aligned}$$ (1).

Un calcul semblable ferait retomber sur la deuxième formule (27), puis sur la troisième.

Inversement, il suffit, pour obtenir la première formule (26), de multiplier les équations (27) respectivement par α_1, α_2, α_3, et d'ajouter membre à membre en tenant compte des relations

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial x'} + \alpha_2 \frac{\partial x}{\partial y'} + \alpha_3 \frac{\partial x}{\partial z'} &= 1, \\ \alpha_1 \frac{\partial y}{\partial x'} + \alpha_2 \frac{\partial y}{\partial y'} + \alpha_3 \frac{\partial y}{\partial z'} &= 0, \\ \alpha_1 \frac{\partial z}{\partial x'} + \alpha_2 \frac{\partial z}{\partial y'} + \alpha_3 \frac{\partial z}{\partial z'} &= 0 \end{aligned} \right.$$ (2).

On obtiendra semblablement la deuxième et la troisième formule (26).

---

(1) Il suffit, pour obtenir ces relations, de considérer, dans les formules (22), x, y, z comme fonctions de x', y', z', et de différentier par rapport à x'.

(2) Comme on a, en vertu de (22),

$$\begin{aligned} x &= \frac{A_1}{\Delta} x' + \frac{A_2}{\Delta} y' + \frac{A_3}{\Delta} z', \\ y &= \frac{B_1}{\Delta} x' + \frac{B_2}{\Delta} y' + \frac{B_3}{\Delta} z', \\ z &= \frac{\Gamma_1}{\Delta} x' + \frac{\Gamma_2}{\Delta} y' + \frac{\Gamma_3}{\Delta} z', \end{aligned}$$

où Δ désigne le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

et

$$\begin{matrix} A_1, & B_1, & \Gamma_1, \\ A_2, & B_2, & \Gamma_2, \\ A_3, & B_3, & \Gamma_3 \end{matrix}$$

II. *La proposition formulée au début du présent numéro* 151 *est vraie pour* $m = 0$.

C'est ce qui a été démontré au n° 150.

III. *Si la proposition formulée au début du présent n°* 151 *est vraie pour une valeur de* m, *elle l'est pour la valeur suivante* $m+1$.

Considérons successivement les cinq suites d'opérations définies ci-après :

Première suite. — Effectuer sur S toutes les différentiations des ordres $0, 1, 2, \ldots, m, m+1$, puis sur le système résultant un changement de variables linéaire et homogène.

Deuxième suite. — Effectuer sur S toutes les différentiations des ordres $0, 1, 2, \ldots, m$, sur le système résultant toutes les différentiations des ordres $0, 1$, et sur le système obtenu en dernier lieu le changement de variables.

Troisième suite. — Effectuer sur S toutes les différentiations des ordres $0, 1, 2, \ldots, m$, sur le système résultant le changement de variables, et sur le système obtenu en dernier lieu toutes les différentiations des ordres $0, 1$.

Quatrième suite. — Effectuer sur T le changement de variables, sur le système résultant toutes les différentiations des ordres $0, 1, 2, \ldots, m$, et sur le système obtenu en dernier lieu toutes les différentiations des ordres $0, 1$.

Cinquième suite. — Effectuer sur T le changement de variables, et sur le système résultant toutes les différentiations des ordres $0, 1, 2, \ldots, m, m+1$.

---

les coefficients respectifs de ses éléments, on a aussi

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{A_1}{\Delta}, \quad \frac{\partial x}{\partial y'} = \frac{A_2}{\Delta}, \quad \frac{\partial x}{\partial z'} = \frac{A_3}{\Delta},$$
$$\frac{\partial y}{\partial x'} = \frac{B_1}{\Delta}, \quad \frac{\partial y}{\partial y'} = \frac{B_2}{\Delta}, \quad \frac{\partial y}{\partial z'} = \frac{B_3}{\Delta},$$
$$\frac{\partial z}{\partial x'} = \frac{\Gamma_1}{\Delta}, \quad \frac{\partial z}{\partial y'} = \frac{\Gamma_2}{\Delta}, \quad \frac{\partial z}{\partial z'} = \frac{\Gamma_3}{\Delta},$$

d'où l'on déduit les relations (28).

Des cinq systèmes différentiels respectivement obtenus par ces cinq suites d'opérations, le premier est visiblement identique au deuxième.

Si, au système

$$(S, S', S'', \ldots, S^{(m)}),$$

déduit de S par toutes les différentiations des ordres

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad m,$$

on applique les conclusions de l'alinéa I, on voit que le deuxième de nos cinq systèmes est en corrélation multiplicatoire avec le troisième.

Considérons maintenant la troisième et la quatrième des cinq suites d'opérations décrites ci-dessus, et, pour les comparer entre elles, faisons d'abord abstraction, dans chacune, de la dernière partie, qui consiste à effectuer sur le système qu'on vient d'obtenir toutes les différentiations des ordres 0, 1. Il résulte alors de ce qui est admis pour la valeur m que les deux systèmes, Q, R, respectivement obtenus avant cette dernière partie de l'opération, sont en corrélation multiplicatoire, puis, du n° 143, que les deux systèmes respectivement déduits de Q et R par toutes les différentiations des ordres 0, 1 jouissent de la même propriété.

Enfin, le quatrième de nos cinq systèmes différentiels est visiblement identique au cinquième.

De ces comparaisons, faites de proche en proche, il résulte, en définitive, que le premier et le cinquième système sont en corrélation multiplicatoire : c'est ce qu'il s'agissait de prouver.

IV. Le simple rapprochement des alinéas II et III suffit à établir l'exactitude de notre énoncé.

152. Supposons actuellement que, dans deux systèmes différentiels, S et T, on ait attribué *aux variables indépendantes des cotes respectives toutes égales à* 1, et aux fonctions inconnues des cotes respectives quelconques ; désignons alors par δ la cote minima des relations figurant dans les deux systèmes, par Δ leur cote maxima, et par C un entier algébrique quelconque (au moins égal à δ); reportons-nous enfin aux conventions des n°s 144 et 149.

Cela étant, pour que les systèmes

$$\left[\left[{}^{(C)}S\right]\right], \quad {}^{(C)}\left[\left[T\right]\right]$$

soient en corrélation multiplicatoire quel que soit C, *il suffit que cela ait lieu pour*

$$C = \delta, \quad \delta + 1, \quad \ldots, \quad \Delta.$$

Désignons, en effet, par λ la différence (positive ou nulle) $\Delta - \delta$, par

$$s_{\delta+p}^{(n)}, \quad \left[\left[t_{\delta+p}\right]\right]^{(n)} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, \lambda)$$

les ensembles de relations respectivement déduits de

$$s_{\delta+p}, \quad \left[\left[t_{\delta+p}\right]\right]$$

à l'aide de toutes les différentiations possibles de l'ordre n, et par k un entier positif quelconque; puis, donnant à C la valeur $\delta + \lambda + k$, considérons le Tableau

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{llllllll} \left[\left[s_\delta\right]\right], & \left[\left[s'_\delta\right]\right], & \ldots, & \left[\left[s_\delta^{(\lambda)}\right]\right], & \left[\left[s_\delta^{(\lambda+1)}\right]\right], & \ldots, & \left[\left[s_\delta^{\lambda+k}\right]\right], \\ & \left[\left[s_{\delta+1}\right]\right], & \ldots, & \left[\left[s_{\delta+1}^{(\lambda-1)}\right]\right], & \left[\left[s_{\delta+1}^{(\lambda)}\right]\right], & \ldots, & \left[\left[s_{\delta+1}^{(\lambda+k-1)}\right]\right], \\ & & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots, \\ & & & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots, \\ & & & \left[\left[s_{\delta+\lambda}\right]\right], & \left[\left[s'_{\delta+\lambda}\right]\right], & \ldots, & \left[\left[s_{\delta+\lambda}^{(k)}\right]\right]. \end{array} \right.$$

Pour former, à l'aide du Tableau ci-dessus, les systèmes

$$\left[\left[{}^{(\delta)}S\right]\right], \quad \left[\left[{}^{\delta(+1)}S\right]\right], \quad \ldots, \quad \left[\left[{}^{(\delta+\lambda)}S\right]\right], \quad \left[\left[{}^{(\delta+\lambda+1)}S\right]\right], \quad \ldots, \quad \left[\left[{}^{(\delta+\lambda+k)}S\right]\right]$$

il suffit d'en extraire les portions respectives obtenues en prenant sur sa gauche les

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad \lambda + 1, \quad \lambda + 2, \quad \ldots, \quad \lambda + k + 1$$

premières colonnes verticales. On voit en outre que, pour obtenir $\left[\left[{}^{(\delta+\lambda+k)}S\right]\right]$, il suffit d'effectuer sur ${}^{(\delta+\lambda)}S$ toutes les différentiations des ordres $0, 1, 2, \ldots, k$ (relatives aux anciennes variables), puis sur le système résultant le changement de variables linéaire et homogène.

Les systèmes

$$^{(\delta)}\Big[[\mathrm{T}]\Big],\quad ^{(\delta+1)}\Big[[\mathrm{T}]\Big],\quad \ldots,\quad ^{(\delta+\lambda)}\Big[[\mathrm{T}]\Big],\quad ^{(\delta+\lambda+1)}\Big[[\mathrm{T}]\Big],\quad \ldots,\quad ^{(\delta+\lambda+k)}\Big[[\mathrm{T}]\Big]$$

se formeront de la même manière à l'aide du Tableau

$$(30)\quad \left\{\begin{array}{llllll} \Big[[t_\delta]\Big], & \Big[[t_\delta]\Big]', & \ldots, & \Big[[t_\delta]\Big]^{(\lambda)}, & \Big[[t_\delta]\Big]^{(\lambda+1)}, \ldots, & \Big[[t_\delta]\Big]^{(\lambda+k)}, \\ & \Big[[t_{\delta+1}]\Big], & \ldots, & \Big[[t_{\delta+1}]\Big]^{(\lambda-1)}, & \Big[[t_{\delta+1}]\Big]^{(\lambda)}, \ldots, & \Big[[t_{\delta+1}]\Big]^{(\lambda+k-1)}, \\ & & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots, \\ & & & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots, \\ & & & \Big[[t_{\delta+\lambda}]\Big], & \Big[[t_{\delta+\lambda}]\Big]', \ldots, & \Big[[t_{\delta+\lambda}]\Big]^{(k)}. \end{array}\right.$$

On voit en outre que, pour obtenir $^{(\delta+\lambda+k)}\Big[[\mathrm{T}]\Big]$, il suffit d'effectuer sur $^{(\delta+\lambda)}\Big[[\mathrm{T}]\Big]$ toutes les différentiations des ordres 0, 1, 2, ..., k (relatives aux nouvelles variables).

Cela étant, puisque les systèmes

$$\Big[[{}^{(\delta+\lambda)}\mathrm{S}]\Big],\quad ^{(\delta+\lambda)}\Big[[\mathrm{T}]\Big]$$

sont, par hypothèse, en corrélation multiplicatoire, les systèmes qui s'en déduisent respectivement par toutes les différentiations des ordres 0, 1, 2, ..., k sont eux-mêmes en corrélation multiplicatoire (n° 143). Or, en effectuant ces différentiations sur $^{(\delta+\lambda)}\Big[[\mathrm{T}]\Big]$, on obtient, comme nous venons de le dire, $^{(\delta+\lambda+k)}\Big[[\mathrm{T}]\Big]$: le système $^{(\delta+\lambda+k)}\Big[[\mathrm{T}]\Big]$ se trouve donc en corrélation multiplicatoire avec celui qu'on obtient en transformant *d'abord* $^{(\delta+\lambda)}\mathrm{S}$, et effectuant *ensuite* sur le système transformé toutes les différentiations des ordres 0, 1, 2, ..., k. D'ailleurs, en vertu du n° 151, le système obtenu en dernier lieu est, à son tour, en corrélation multiplicatoire avec celui qui provient de l'interversion des deux opérations précédentes, c'est-à-dire avec celui qui provient : 1° des différentiations des ordres 0, 1, 2, ..., k exécutées sur $^{(\delta+\lambda)}\mathrm{S}$; 2° de la transformation exécutée sur le système résultant. Or, comme nous l'avons dit plus haut, on tombe, en opérant de cette dernière façon, sur $\Big[[{}^{(\delta+\lambda+k)}\mathrm{S}]\Big]$.

Finalement donc, les systèmes

$$\Big[[{}^{(\delta+\lambda+k)}\mathrm{S}]\Big],\quad ^{(\delta+\lambda+k)}\Big[[\mathrm{T}]\Big]$$

sont en corrélation multiplicatoire, ce qu'il s'agissait d'établir.

153. *Les mêmes notations étant adoptées qu'au numéro précédent, si l'on suppose que, pour*

$$C = \delta, \quad \delta + 1, \quad \ldots, \quad \Delta,$$

les deux systèmes

$$(s_\delta, s_{\delta+1}, \ldots, s_C)$$

et

$$(t_\delta, t_{\delta+1}, \ldots, t_C)$$

soient en corrélation multiplicatoire, la même chose ne peut manquer d'avoir lieu, quel que soit C, *pour les deux systèmes*

$$\left[\left[{}^{(C)}S\right]\right], \quad {}^{(C)}\left[\left[T\right]\right].$$

Il suffit, en vertu du numéro précédent, de vérifier l'exactitude de notre proposition pour

$$C = \delta, \quad \delta + 1, \quad \ldots, \quad \Delta.$$

Pour $C = \delta$, elle résulte immédiatement de l'hypothèse, combinée avec la proposition du n° 150, puisque les systèmes $\left[\left[{}^{(\delta)}S\right]\right]$, ${}^{(\delta)}\left[\left[T\right]\right]$ se déduisent respectivement des Tableaux (29) et (30) en prenant sur leur gauche la première colonne.

Pour $C = \delta + 1$, on remarquera, d'une part, qu'en vertu de notre hypothèse, combinée avec la proposition du n° 151, les deux systèmes

$$\left(\left[\left[s_\delta\right]\right], \; \left[\left[s'_\delta\right]\right]\right) \quad \text{et} \quad \left(\left[\left[t_\delta\right]\right], \; \left[\left[t_\delta\right]\right]'\right)$$

sont en corrélation multiplicatoire ; d'autre part, qu'en vertu de notre hypothèse, combinée avec la proposition du n° 150, les deux systèmes

$$\left(\left[\left[s_\delta\right]\right], \; \left[\left[s_{\delta+1}\right]\right]\right) \quad \text{et} \quad \left(\left[\left[t_\delta\right]\right], \; \left[\left[t_{\delta+1}\right]\right]\right)$$

jouissent de la même propriété. Les deux systèmes $\left[\left[{}^{(\delta+1)}S\right]\right]$, ${}^{(\delta+1)}\left[\left[T\right]\right]$, respectivement déduits des Tableaux (29) et (30) en prenant sur leur gauche les deux premières colonnes, ont donc entre eux la corrélation voulue.

Pour $C = \delta + 2$, on observera de même que les trois systèmes

$$\left(\left[\left[s_\delta\right]\right], \; \left[\left[s'_\delta\right]\right], \; \left[\left[s''_\delta\right]\right]\right),$$
$$\left(\left[\left[s_\delta\right]\right], \; \left[\left[s_{\delta+1}\right]\right], \; \left[\left[s'_\delta\right]\right], \; \left[\left[s'_{\delta+1}\right]\right]\right),$$
$$\left(\left[\left[s_\delta\right]\right], \; \left[\left[s_{\delta+1}\right]\right], \; \left[\left[s_{\delta+2}\right]\right]\right)$$

sont respectivement en corrélation multiplicatoire avec les trois systèmes

$$\left(\left[\left[t_\delta\right]\right],\ \left[\left[t_\delta\right]\right]',\ \left[\left[t_\delta\right]\right]''\right),$$
$$\left(\left[\left[t_\delta\right]\right],\ \left[\left[t_{\delta+1}\right]\right],\ \left[\left[t_\delta\right]\right]',\ \left[\left[t_{\delta+1}\right]\right]'\right),$$
$$\left(\left[\left[t_\delta\right]\right],\ \left[\left[t_{\delta+1}\right]\right],\ \left[\left[t_{\delta+2}\right]\right]\right).$$

Les deux systèmes

$$\left[\left[{}^{(\delta+2)}\mathrm{S}\right]\right],\quad {}^{(\delta+2)}\left[\left[\mathrm{T}\right]\right],$$

respectivement déduits des Tableaux (29) et (30) en prenant sur leur gauche les trois premières colonnes, ont donc entre eux la corrélation voulue.

Pour $C = \delta + 3$, on observera que les quatre systèmes

$$\left(\left[\left[s_\delta\right]\right],\ \left[\left[s'_\delta\right]\right],\ \left[\left[s''_\delta\right]\right],\ \left[\left[s'''_\delta\right]\right]\right),$$
$$\left(\left[\left[s_\delta\right]\right],\ \left[\left[s_{\delta+1}\right]\right],\ \left[\left[s'_\delta\right]\right],\ \left[\left[s'_{\delta+1}\right]\right],\ \left[\left[s''_\delta\right]\right],\ \left[\left[s''_{\delta+1}\right]\right]\right),$$
$$\left(\left[\left[s_\delta\right]\right],\ \left[\left[s_{\delta+1}\right]\right],\ \left[\left[s_{\delta+2}\right]\right],\ \left[\left[s'_\delta\right]\right],\ \left[\left[s'_{\delta+1}\right]\right],\ \left[\left[s'_{\delta+2}\right]\right]\right),$$
$$\left(\left[\left[s_\delta\right]\right],\ \left[\left[s_{\delta+1}\right]\right],\ \left[\left[s_{\delta+2}\right]\right],\ \left[\left[s_{\delta+3}\right]\right]\right)$$

sont respectivement en corrélation multiplicatoire avec les quatre systèmes

$$\left(\left[\left[t_\delta\right]\right],\ \left[\left[t_\delta\right]\right]',\ \left[\left[t_\delta\right]\right]'',\ \left[\left[t_\delta\right]\right]'''\right),$$
$$\left(\left[\left[t_\delta\right]\right],\ \left[\left[t_{\delta+1}\right]\right],\ \left[\left[t_\delta\right]\right]',\ \left[\left[t_{\delta+1}\right]\right]',\ \left[\left[t_\delta\right]\right]'',\ \left[\left[t_{\delta+1}\right]\right]''\right),$$
$$\left(\left[\left[t_\delta\right]\right],\ \left[\left[t_{\delta+1}\right]\right],\ \left[\left[t_{\delta+2}\right]\right],\ \left[\left[t_\delta\right]\right]',\ \left[\left[t_{\delta+1}\right]\right]',\ \left[\left[t_{\delta+2}\right]\right]'\right),$$
$$\left(\left[\left[t_\delta\right]\right],\ \left[\left[t_{\delta+1}\right]\right],\ \left[\left[t_{\delta+2}\right]\right],\ \left[\left[t_{\delta+3}\right]\right]\right).$$

Et ainsi de suite jusques et y compris $C = \delta + \lambda = \Delta$.

Réduction au grade 1.

154. Étant donné un système différentiel résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, nous nommerons *grade* du système l'ordre maximum de ses premiers membres : il va sans dire que le grade peut être, soit inférieur, soit égal à *l'ordre* du système. Quand le grade est égal à 1, on peut, comme nous l'avons vu au n° 90, disposer les équations du système

dans les cases d'un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux variables indépendantes et les colonnes aux fonctions inconnues.

Nous allons, dans ce qui suit, indiquer une méthode pour réduire au grade 1 certains systèmes différentiels.

155. De la proposition relative aux coupures, qui se trouve formulée au nº 86, résulte la suivante, relative à la forme des conditions initiales dans un système différentiel.

Soit S *un système différentiel résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et tel qu'aucun des premiers membres n'y soit une dérivée de quelque autre : dans ce système, répartissons par la pensée les conditions initiales en groupes, suivant qu'elles se rapportent à telle ou telle inconnue. Cela posé, l'application d'un procédé tout élémentaire permet de mettre les conditions initiales sous une forme telle que les diverses circonstances suivantes s'y trouvent réalisées :*

Si l'on partage le groupe relatif à une inconnue quelconque, u par exemple, en sous-groupes successifs d'après les ordres croissants des premiers membres, ces ordres forment une progression arithmétique de raison 1 *commençant par* 0.

Si l'on considère l'un des sous-groupes ainsi formés, qu'on exécute sur l'un quelconque de ses premiers membres les diverses différentiations premières n'intéressant aucune des variables dont dépend (*schématiquement*) *le second membre correspondant, et qu'on répète l'opération sur tous les premiers membres du sous-groupe, l'ensemble des résultats ainsi obtenus ne contient d'autres dérivées paramétriques que les premiers membres du sous-groupe suivant, et il les contient tous.* (En particulier, les différentiations ainsi exécutées sur le dernier sous-groupe ne fournissent que des dérivées principales.)

Enfin, si, considérant l'ensemble de toutes les conditions initiales, on effectue sur le premier membre de chacune les différentiations indiquées, on retrouve parmi les résultats tous les premiers membres du système S.

Effectivement, le groupe de conditions initiales relatif à u s'obtient,

comme il a été dit plus haut (n° 90), en pratiquant une certaine coupure dans une fonction schématique des variables indépendantes $x, y, \ldots$; d'ailleurs, pour avoir les divers monomes de l'ensemble à l'aide duquel on doit effectuer la coupure, il suffit de prendre, parmi les premiers membres de S, ceux qui sont des dérivées de l'inconnue u, et d'en déduire respectivement, par la considération des ordres partiels de dérivation, certains monomes entiers par rapport aux différences $x-x_0$, $y-y_0$, ... Or, puisque, en vertu de notre hypothèse, aucun des premiers membres du système S n'est une dérivée de quelque autre, l'ensemble ainsi obtenu est irréductible. Cela étant, la proposition à démontrer est une conséquence immédiate de celle qui se trouve formulée au n° 86.

Il importe de faire l'observation suivante :

Si, attribuant à chacune des variables indépendantes du système S *une cote (unique) égale à* 1, *et à chacune de ses fonctions inconnues une cote (unique) quelconque, on désigne par* Γ *la cote maxima des premiers membres des conditions initiales (mises sous la forme que nous venons d'indiquer), la cote maxima des premiers membres de* S *ne peut,* en vertu de la dernière partie de notre énoncé, *surpasser* $\Gamma+1$.

156. Soit S un système différentiel remplissant les diverses conditions A, B, C, formulées ci-après :

A. Le système S *est résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, aucun des premiers membres n'y est une dérivée de quelque autre, et les seconds membres y sont indépendants de toute dérivée principale.*

B. En attribuant, dans le système S, *à chacune des variables indépendantes une cote égale à* 1, *et à chacune des fonctions inconnues une cote convenablement choisie, chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées) dont la cote ne surpasse pas celle du premier membre correspondant* (n° 102).

Mettons alors les conditions initiales du système S sous une forme telle que les circonstances énumérées au numéro précédent se trouvent réalisées; puis, désignons par δ et Δ les cotes respectivement

minima et maxima des premiers membres de S, par Γ la cote maxima des premiers membres des conditions initiales : on a forcément, en vertu d'une observation faite (n° 155), $\Delta \leqq \Gamma + 1$.

Cela étant, on peut, des groupes

$$S_\delta, \quad S_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad S_{\Gamma+1}$$

(n° 144) du système S prolongé (n° 99), extraire respectivement des groupes,

$$(1) \qquad t_\delta, \quad t_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad t_{\Gamma+1},$$

possédant la double propriété de se composer d'équations en nombres respectivement égaux à ceux des dérivées principales de cotes

$$\delta, \quad \delta_{+1}, \quad \ldots, \quad \Gamma+1,$$

et *de contenir les groupes*

$$(2) \qquad s_\delta, \quad s_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad s_\Delta$$

du système S (n° 144). (La chose est possible, dans tous les cas, d'une manière au moins, et, dans l'immense majorité des cas, de plusieurs manières.) Nous ferons alors l'hypothèse suivante :

C. Il existe quelque suite, (1), *remplissant les conditions ci-dessus indiquées, et telle que les groupes*

$$t_\delta, \quad t_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad t_{\Gamma+1}$$

soient successivement résolubles par rapport aux dérivées principales de cotes

$$\delta, \quad \delta+1, \quad \ldots, \quad \Gamma+1.$$

En d'autres termes, nous supposons que le déterminant différentiel de l'ensemble de ces groupes par rapport à l'ensemble de ces dérivées est une fonction non identiquement nulle (des variables, des inconnues, et des quelques dérivées paramétriques figurant dans les seconds membres de S) ; et nous nous astreignons à ne considérer les diverses quantités dont dépend cette fonction que dans les limites où sa valeur numérique reste différente de zéro.

Il importe d'observer que les trois hypothèses *A*, *B*, *C*, ci-dessus énoncées, ne se distinguent des trois hypothèses *A*, *B*, *C* du n° 147 que par l'adjonction des deux particularités suivantes : 1° aucun des

premiers membres de S n'est, ici, une dérivée de quelque autre (condition qui n'était pas imposée au n° 147); 2° l'entier algébrique Θ, que, au n° 147, nous supposions simplement supérieur ou égal à Δ, reçoit, ici, la valeur particulière $\Gamma + 1$.

Cela étant, *on peut, du système* S, *déduire un système,* Σ, *de grade* 1, *jouissant, par rapport à* S, *de propriétés remarquables que nous indiquons ci-après* (I et V).

I. *Formation du système* Σ.

Le système Σ, qu'il s'agit de former, étant de grade 1, nous en écrirons, conformément aux indications ci-après, les diverses équations dans les cases d'un quadrillage rectangulaire, en ne nous occupant tout d'abord que des premiers membres.

Les conditions initiales du système S ayant été mises sous la forme que nous avons indiquée plus haut (n° 155), désignons par x, y, ... les variables indépendantes, par u l'une des inconnues engagées dans S, par $\frac{\partial^{\alpha+\beta+\dots} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \dots}$ l'un des premiers membres qui figurent dans le groupe de conditions relatifs à u, et par $F_{\alpha,\beta,\dots}$ le second membre correspondant. Cela étant, nous prendrons, dans Σ, pour l'une de nos inconnues, la quantité $\frac{\partial^{\alpha+\beta+\dots} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \dots}$, que nous désignerons par $u_{\alpha,\beta,\dots}$; puis, en supposant, pour fixer les idées, qu'il y ait cinq variables indépendantes, x, y, z, s, t, et que la fonction schématique $F_{\alpha,\beta,\dots}$ dépende de s, t, nous écrirons, dans les cases (x), (y), (z) de la colonne $(u_{\alpha,\beta,\dots})$, les premiers membres

$$\frac{\partial u_{\alpha,\beta,\dots}}{\partial x} = \dots, \qquad \frac{\partial u_{\alpha,\beta,\dots}}{\partial y} = \dots, \qquad \frac{\partial u_{\alpha,\beta,\dots}}{\partial z} = \dots,$$

et nous laisserons vides les cases (s) et (t) de cette même colonne; au cas où $F_{\alpha,\beta,\dots}$ se réduirait à une simple constante schématique, les cases de la colonne considérée seraient ainsi toutes pleines. Ce que nous venons de faire pour l'une des conditions initiales faisant partie du groupe relatif à u, nous le ferons pour toutes les autres du même groupe; et ce que nous aurons fait pour l'inconnue u, nous le ferons successivement pour toutes. Nous aurons ainsi un quadrillage rectangulaire où les cases pleines et les cases vides présentent exactement la même disposition relative qu'offrent, dans le damier correspondant aux conditions initiales du système S (n° 90), les cases noires et les

cases blanches; dès lors, quelques seconds membres que nous écrivions ultérieurement dans les cases pleines, on voit dès maintenant que si l'on forme successivement, dans l'ancien système, puis dans le nouveau, un ensemble composé des inconnues et de leurs dérivées paramétriques, les deux ensembles ainsi obtenus se correspondront terme à terme, et que le second se déduira du premier par de simples changements de notations; de même, et toujours aux notations près, *l'économie des conditions initiales sera identique dans les deux systèmes.* Quant aux dérivées principales du nouveau système, elles coïncideront, aux notations près, les unes avec des dérivées principales, les autres avec des dérivées paramétriques de l'ancien.

Il va sans dire que *nous conservons aux variables indépendantes et aux anciennes inconnues les cotes respectives qu'elles avaient dans le système* S, et que *nous attribuons aux inconnues adjointes des cotes respectivement égales à celles des dérivées anciennes qu'elles admettent pour homonymes.*

Occupons-nous maintenant des seconds membres du système Σ.

A cet effet, nous désignerons par

$$(3) \qquad \psi_\delta, \quad \psi_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad \psi_{\Gamma+1}$$

les groupes obtenus par la résolution successive de (1), et qui possèdent, eux aussi, la propriété de contenir les groupes (2) (nº 147).

Cela étant, considérons, pour fixer les idées, l'équation qui, dans Σ, a pour premier membre $\frac{\partial u_{\alpha,\beta,\ldots}}{\partial x}$. A la notation près, ce premier membre coïncide avec une dérivée ancienne,

$$(4) \qquad \frac{\partial^{(\alpha+1)+\beta+\ldots} u}{\partial x^{\alpha+1}\, \partial y^{\beta}\ldots},$$

dont la cote ne surpasse pas Γ + 1, et qui, en vertu même de la forme donnée aux conditions initiales, est nécessairement identique, soit au premier membre de quelque condition initiale de S, soit à quelque dérivée principale de S. Dans le premier cas, elle coïncide, à la notation près, avec quelque inconnue adjointe de Σ, et nous égalerons alors $\frac{\partial u_{\alpha,\beta,\ldots}}{\partial x}$ à cette inconnue adjointe. Dans le second cas, elle admet, en vertu des relations (3), une certaine expression, à la fois indépendante, et de toute dérivée principale (de S) quelle qu'elle soit, et de toute dérivée paramétrique ou fonction inconnue (de S)

dont la cote surpasserait la sienne propre; en outre, dans le cas particulier où la dérivée (4) coïncide avec un premier membre de S, *l'expression dont il s'agit coïncide avec le second membre correspondant :* cela étant, dans l'expression considérée de la dérivée principale (4), nous remplacerons toutes les dérivées paramétriques de S par les dérivées paramétriques ou fonctions inconnues de Σ qui leur correspondent respectivement, et nous égalerons $\frac{\partial u_{\alpha,\beta,\dots}}{\partial x}$ à l'expression ainsi modifiée.

Tel est le système *de grade* 1, Σ, auquel fait allusion notre énoncé : on voit, par tout ce qui précède, que *l'économie des conditions initiales y est la même, aux notations près, que dans le système* S, que *les seconds membres y sont indépendants de toute dérivée principale (de* Σ*),* et que *la cote de chaque second membre y est au plus égale à celle du premier membre correspondant.*

II. *Toute équation de* S *figure dans* Σ, *aux notations près.*

Il résulte, en effet, de la forme donnée aux conditions initiales de S que chaque premier membre de S peut se déduire de l'une d'entre elles à l'aide d'une dérivation première effectuée sur le premier membre de celle-ci, et n'intéressant aucune des variables dont dépend la fonction schématique (dégénérée ou non) qui figure dans le second membre de la condition initiale considérée. Si donc on se reporte au mode de formation de Σ, on voit que tout premier membre de S coïncide, à la notation près, avec un premier membre de Σ, et, par suite, en vertu d'une remarque faite (I), que toute équation de S figure, aux notations près, dans Σ.

III. *Si l'on considère l'une quelconque des inconnues adjointes de* Σ, *il existe, dans le système* Σ, *une relation où l'inconnue dont il s'agit se trouve égalée à une quantité homonyme, dérivée première de quelque inconnue ancienne ou adjointe.*

Effectivement, les inconnues, tant anciennes que nouvelles, de Σ, ont pour homonymes respectifs les premiers membres des conditions initiales de S. Dès lors, à cause de la forme donnée à ces conditions initiales, toute inconnue nouvelle de Σ peut, à la notation près, se déduire de quelque autre inconnue, ancienne ou nouvelle, de Σ, à l'aide d'une dérivation première n'intéressant aucune des variables

dont dépend la fonction schématique qui, dans les conditions initiales, correspond à cette dernière inconnue. Cela étant, il suffit, pour s'assurer de l'exactitude du point que nous avons en vue, de se reporter au mode de formation de Σ.

IV. Dans le système Σ, partageons les équations en deux groupes, Σ', Σ'', suivant que leur premier membre coïncide (soit exactement, soit à la notation près) avec une dérivée *paramétrique* ou avec une dérivée *principale* du système S : aux notations près, les équations de Σ' sont des identités, et celles de Σ'' comprennent toutes celles de S (II). D'autre part, désignons par H l'ensemble des relations obtenues en égalant chaque inconnue adjointe de Σ à la dérivée ancienne qu'elle admet pour homonyme : aux notations près, les équations H sont encore des identités. Cela posé, *les systèmes* Σ'_C, H_C (n° 144) sont, comme je vais l'établir, *en corrélation multiplicatoire* (les multiplicateurs étant tous égaux, soit à zéro, soit à l'unité, au signe près).

En premier lieu, toute équation de Σ'_C est une combinaison multiplicatoire de H_C : car, chaque équation de Σ' ayant pour premier et pour second membre deux quantités homonymes (nécessairement de même cote), une équation quelconque de Σ'_C a pour premier et pour second membre deux quantités homonymes de cote C; dès lors, ou bien le système H_C contient l'équation considérée de Σ'_C, ou bien il contient deux équations égalant respectivement les deux quantités homonymes dont il s'agit à la quantité ancienne qu'elles ont pour homonyme commun, auquel cas une combinaison très simple des deux équations de H_C fait retomber sur l'équation considérée de Σ'_C.

Réciproquement, toute équation de H_C est une combinaison multiplicatoire de Σ'_C. Considérons, en effet, une relation de H_C; dans cette relation, dont la cote est C, figure une dérivée, d'ordre positif ou nul, de quelque inconnue nouvelle. En vertu de l'alinéa III, il existe, dans le groupe Σ', une relation égalant l'inconnue dont il s'agit à une quantité homonyme, dérivée première de quelque inconnue ancienne ou nouvelle. Si cette deuxième inconnue est elle-même nouvelle, il existe encore, dans le groupe Σ', une relation l'égalant à quelque quantité homonyme, dérivée première d'une troisième inconnue. En continuant de cette manière, on finira par tomber sur une inconnue nouvelle qui, en vertu d'une relation de Σ', se trouvera égalée à

quelque quantité homonyme, dérivée première d'une inconnue *ancienne*. Il est clair que les relations successivement considérées de Σ' ont des cotes qui décroissent progressivement d'une unité. Cela étant, il est très facile de voir que si, dans le groupe formé par ces relations et par celles qui s'en déduisent à l'aide de différentiations d'ordres quelconques, on considère celles de cote C, leur ensemble, qui fait partie de Σ'_C, régénère, moyennant une combinaison très simple, l'équation considérée de H_C.

V. *En attribuant à la notation* H *le même sens que dans l'alinéa* IV, *les deux systèmes*

$$^{(C)}\Sigma, \quad (^{(C)}H, {}^{(C)}S)$$

(n° 144) *sont en corrélation multiplicatoire.*

Nommons W le système déduit de Σ'' par la substitution aux nouvelles inconnues et à leurs dérivées de leurs synonymes anciens, et considérons les quatre systèmes successifs

$$\begin{aligned} {}^{(C)}\Sigma \quad \text{ou} \quad & (^{(C)}\Sigma', {}^{(C)}\Sigma''), \\ & (^{(C)}H, {}^{(C)}\Sigma''), \\ & (^{(C)}H, {}^{(C)}W), \\ & (^{(C)}H, {}^{(C)}S). \end{aligned}$$

Il résulte, en premier lieu, de l'alinéa IV que le premier et le second de ces systèmes sont en corrélation multiplicatoire.

Il résulte, en second lieu, de la définition de W que $^{(C)}W$ se déduit de $^{(C)}\Sigma''$ par la substitution aux nouvelles inconnues et à leurs dérivées de leurs synonymes anciens : en conséquence (n° 147, I), si l'on considère dans $^{(C)}\Sigma''$ et $^{(C)}W$ deux équations correspondantes, l'une quelconque est une combinaison multiplicatoire de l'autre et du système $^{(C)}H$. Le second et le troisième de nos quatre systèmes sont donc évidemment en corrélation multiplicatoire.

Enfin, puisque, aux notations près, Σ'' est extrait de (3) et contient toutes les équations de S (II), il est clair que, après le retour aux anciennes notations, W jouit des deux mêmes propriétés, et que, dès lors (n° 147), les systèmes $^{(C)}W$, $^{(C)}S$ sont en corrélation multiplicatoire; il en est donc de même de nos troisième et quatrième systèmes.

On voit ainsi, de proche en proche, que le premier système et le dernier sont en corrélation multiplicatoire.

157. Dans le cas où le système différentiel proposé S est *orthonome* (nº 104), *sans qu'aucun des premiers membres soit une dérivée de quelque autre,* les deux conditions A et B du nº 156 se trouvent satisfaites, et il suffit, pour que les groupes (1),

$$t_\delta,\quad t_{\delta+1},\quad \ldots,\quad t_{\Gamma+1},$$

respectivement extraits de

$$S_\delta,\quad S_{\delta+1},\quad \ldots,\quad S_{\Gamma+1},$$

satisfassent à la condition C, de supposer qu'ils sont formés d'équations en nombres respectivement égaux à ceux des dérivées principales de cotes

$$\delta,\quad \delta+1,\quad \ldots,\quad \Gamma+1,$$

et qu'ils ont pour premiers membres les dérivées dont il s'agit; car, en vertu de nos hypothèses actuelles : 1º les groupes ainsi formés comprennent nécessairement les groupes (2),

$$s_\delta,\quad s_{\delta+1},\quad \ldots,\quad s_\Delta,$$

du système S; 2º le déterminant spécifié dans l'hypothèse C est identiquement égal à 1, et la condition qui lui est imposée d'être différent de zéro se trouve satisfaite d'elle-même pour toutes valeurs numériques des quantités figurant dans les seconds membres de S.

Cela posé, *si l'on considère un système orthonome,* S, *tel qu'aucun des premiers membres n'y soit une dérivée de quelque autre, le système de grade* 1, Σ, *qu'on en déduit à l'aide du mécanisme décrit au numéro précédent, est lui-même,* comme nous allons le voir, *nécessairement orthonome.*

Tout d'abord, les groupes (1), qui comprennent les groupes (2), se composent exclusivement en pareil cas de relations *normales* (nº 107), et la même chose a lieu pour les groupes (3),

$$\psi_\delta,\quad \psi_{\delta+1},\quad \ldots,\quad \psi_{\Gamma+1},$$

obtenus en effectuant la résolution successive des groupes (1) par rapport aux dérivées principales de cotes premières

$$\delta,\quad \delta+1,\quad \ldots,\quad \Gamma+1.$$

Cela étant, si l'on applique le mécanisme décrit à l'alinéa I du

numéro précédent, le système de grade 1, Σ, ainsi obtenu, peut, comme nous l'avons dit, se partager en deux groupes, Σ', Σ'', suivant que ses équations ont pour premiers membres (soit exactement, soit aux notations près) des dérivées *paramétriques* ou des dérivées *principales* des inconnues de S : aux notations près, les équations Σ' sont des identités, et les relations Σ'', extraites de (3), sont des relations normales.

Conservons alors à chacune des variables indépendantes et des anciennes inconnues les p cotes successives qu'elle avait dans le système orthonome S, *et attribuons à chaque inconnue adjointe p cotes successives respectivement égales à celles de la dérivée ancienne qu'elle admet pour homonyme :* il est clair qu'avec un pareil choix, toutes les équations Σ'' sont normales; mais cela ne suffit pas pour les équations Σ', car, chacune d'elles étant, aux notations près, une identité, les p cotes successives de ses deux membres sont égales chacune à chacune, et l'adjonction de cotes supplémentaires convenablement choisies devient indispensable. Pour en opérer le choix, on observera que les premiers membres de Σ' sont de premier ordre et ses seconds membres d'ordre zéro ; il suffira, en conséquence, d'attribuer *à toutes les inconnues de* Σ *une cote* $(p+1)^{ième}$ *égale à zéro, et à toutes les variables indépendantes une cote* $(p+1)^{ième}$ *égale à* 1.

Réduction au premier ordre.

158. De la proposition relative aux coupures qui se trouve formulée au n° 88, résulte la suivante, relative à la forme des conditions initiales dans un système différentiel.

Soit S *un système différentiel résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et tel qu'aucun des premiers membres n'y soit une dérivée de quelque autre. Les conditions initiales de ce système ayant été mises sous la forme que nous avons spécifiée au n°* 155, *attribuons à chacune des variables indépendantes une cote (unique) égale à* 1, *à chacune des fonctions inconnues une cote (unique) quelconque, et désignons par* Γ *la cote maxima des premiers membres des conditions initiales.*

Cela posé, on peut, de cette première forme des conditions initiales, en déduire une deuxième, où les diverses circonstances suivantes se trouvent réalisées :

1° *La cote maxima des premiers membres y est, comme dans la première forme, égale à* Γ, *et toute condition initiale dont le premier membre est de cote inférieure à* Γ *a pour second membre une constante schématique.*

2° *Si, sur chaque premier membre des conditions initiales (nouvelles), on exécute successivement les différentiations premières n'intéressant aucune des variables dont dépend la fonction schématique (dégénérée ou non) qui figure dans le second membre correspondant, on obtient, entre autres résultats, d'une part, les divers premiers membres qui, dans les conditions initiales (nouvelles), sont d'ordre supérieur à zéro, d'autre part, les divers premiers membres de* S.

I. Si, dans un système différentiel résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues u, v, ... qui s'y trouvent engagées, on se propose de fixer l'économie des conditions initiales, chacun des groupes de conditions qui doivent respectivement correspondre aux diverses inconnues du système se déduit fort simplement, comme on sait (n° 90), d'une somme schématique irréductible représentant le résidu d'une coupure; et les divers monomes de l'ensemble à l'aide duquel on effectue la coupure se déduisent mécaniquement, s'il s'agit, par exemple, de l'inconnue u, des diverses dérivées de u qui figurent dans les premiers membres de S : nous nommerons E_u, E_v, ... les ensembles qui correspondent ainsi respectivement aux inconnues u, v, ...

Cela étant, *pour que les conditions initiales obtenues possèdent, relativement à une inconnue quelconque, u par exemple, la propriété spécifiée dans la dernière partie* (2°) *de notre énoncé général, il faut et il suffit que la somme schématique correspondante jouisse elle-même de la propriété ci-après :*

Si l'on considère les divers produits obtenus en multipliant l'un quelconque des facteurs monomes de cette somme schématique par l'une quelconque des différences étrangères au facteur schématique (dégénéré ou non) qui lui correspond, on y retrouve,

entre autres résultats, d'une part, les divers facteurs monomes qui, dans la somme schématique, ont un degré supérieur à zéro, d'autre part, les divers monomes de l'ensemble E_u.

II. Revenant à notre énoncé général, nous désignerons par E_u, E_v, ... les ensembles à l'aide desquels ont été obtenues les sommes schématiques qui, dans la première forme des conditions initiales, correspondent aux inconnues respectives u, v, ... (les ensembles E_u, E_v, ... sont, ici, irréductibles, puisque aucun des premiers membres du système S n'est une dérivée de quelque autre). Dans chacune de ces sommes, nous évaluerons le degré maximum des facteurs monomes, et nous désignerons ce degré maximum par N_u, N_v, ..., suivant qu'il s'agit de l'une ou de l'autre des inconnues u, v, ... Si nous désignons en outre par c_u, c_v, ... les cotes respectives de ces inconnues, il résulte de la définition même de Γ que l'une au moins des sommes $N_u + c_u$, $N_v + c_v$, ... est égale à Γ, et qu'aucune d'elles ne surpasse Γ; en d'autres termes, on a

$$N_u + c_u \leqq \Gamma, \qquad N_v + c_v \leqq \Gamma, \qquad \ldots,$$

l'une au moins de ces relations ayant lieu avec le signe d'égalité.

Cela étant, puisque l'ancienne forme des conditions initiales possède, par hypothèse, les diverses propriétés spécifiées au n° 155, l'ancienne somme schématique correspondant à une inconnue quelconque, u par exemple, possède, entre autres, la suivante (I) :

Si l'on considère les divers produits obtenus en multipliant l'un quelconque des facteurs monomes de la somme schématique par l'une quelconque des différences étrangères au facteur schématique (dégénéré ou non) qui lui correspond, on y retrouve, entre autres résultats : d'une part, les divers facteurs monomes qui, dans la somme schématique, ont un degré supérieur à zéro; d'autre part, les divers monomes dont se compose l'ensemble irréductible E_u.

Si cette somme ne contient que des facteurs schématiques dégénérés, nous la laisserons telle qu'elle est, et, par suite aussi, le groupe de conditions initiales relatif à u : la nouvelle forme de ces conditions initiales étant identique à l'ancienne, la cote maxima des premiers membres y restera égale à $N_u + c_u$, la dernière partie (2°) de notre

énoncé ne cessera pas d'y être satisfaite en ce qui concerne l'inconnue u, et enfin, tous les seconds membres s'y réduisant à des constantes schématiques, il en sera ainsi, notamment, de ceux d'entre eux qui correspondent à des premiers membres de cote inférieure à Γ.

Si la somme schématique correspondant à u contient quelque facteur schématique non dégénéré, nous la mettrons sous la forme nouvelle spécifiée aux nos 87 et 88, en prenant pour P la valeur $\Gamma - c_u$, au moins égale à N_u : dans le groupe correspondant des nouvelles conditions initiales, l'ordre maximum des premiers membres sera alors $\Gamma - c_u$, et leur cote maxima $(\Gamma - c_u) + c_u$ ou Γ; à tous les premiers membres d'ordre inférieur à $\Gamma - c_u$, c'est-à-dire de cote inférieure à Γ, correspondront, comme seconds membres, des constantes schématiques; enfin, il résulte du n° 87 et de l'alinéa I que la dernière partie (2°) de notre énoncé, vérifiée par hypothèse dans les anciennes conditions initiales, l'est aussi dans les nouvelles en ce qui concerne l'inconnue u.

Ce qui vient d'être dit pour l'inconnue u doit être répété pour toutes les autres.

Il nous reste, pour achever notre démonstration, à faire voir que, dans les nouvelles conditions initiales, la cote maxima des premiers membres est égale à Γ. Or, il résulte de ce qui précède que, dans le groupe partiel relatif à u, la cote maxima des premiers membres est égale à $N_u + c_u$ ou à Γ, suivant que les seconds membres du groupe se réduisent tous ou non à des constantes schématiques. Considérant alors l'ensemble des groupes, on voit que, si quelqu'un de leurs seconds membres est une fonction schématique non dégénérée, la cote maxima des premiers membres est Γ, et que, si tous leurs seconds membres sans exception se réduisent à des constantes schématiques, la cote maxima des premiers membres est le plus grand des entiers $N_u + c_u$, $N_v + c_v$, $\ldots$, c'est-à-dire encore Γ.

159. *Lorsqu'un système différentiel,* S, *remplit les trois conditions* A, B, C *formulées au n°* 156, *on en peut déduire un système du premier ordre,* Σ, *jouissant, par rapport à* S, *de propriétés remarquables que nous indiquons ci-après* (I et V).

I. *Formation du système* Σ [1].

---

[1] Il va sans dire que la notation Σ n'a pas ici le même sens qu'au n° 156.

Les conditions initiales de S ayant été mises sous la forme spécifiée au n° 155, on en peut, par un mécanisme fort simple, déduire pour elles une forme nouvelle jouissant des propriétés spécifiées au numéro précédent. *Nous supposerons désormais les conditions initiales de* S *écrites sous cette nouvelle forme.*

Le système Σ étant du premier ordre et résolu par rapport à certaines dérivées (premières) des inconnues, nous en écrirons les diverses équations dans les cases d'un quadrillage rectangulaire conformément aux indications ci-après, en ne nous occupant tout d'abord que des premiers membres.

Désignons par $x, y, \ldots$ les variables indépendantes, par u l'une des inconnues engagées dans S, par $\frac{\partial^{\alpha+\beta+\ldots} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \ldots}$ l'un des premiers membres qui figurent dans le groupe de conditions relatif à u, et par $F_{\alpha,\beta,\ldots}$ le second membre correspondant. Cela étant, nous prendrons dans Σ, pour l'une de nos inconnues, la quantité $\frac{\partial^{\alpha+\beta+\ldots} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \ldots}$, que nous désignerons par $u_{\alpha,\beta,\ldots}$; puis, en supposant, pour fixer les idées, qu'il y ait cinq variables indépendantes, x, y, z, s, t, et que la fonction schématique $F_{\alpha,\beta,\ldots}$ dépende de s, t, nous écrirons dans les cases (x), (y), (z) de la colonne $(u_{\alpha,\beta,\ldots})$ les premiers membres

$$\frac{\partial u_{\alpha,\beta,\ldots}}{\partial x} = \ldots, \qquad \frac{\partial u_{\alpha,\beta,\ldots}}{\partial y} = \ldots, \qquad \frac{\partial u_{\alpha,\beta,\ldots}}{\partial z} = \ldots,$$

et nous laisserons vides les cases (s) et (t) de cette même colonne; au cas où $F_{\alpha,\beta,\ldots}$ se réduirait à une simple constante schématique, les cases de la colonne considérée seraient ainsi toutes pleines. Ce que nous venons de faire pour l'une des conditions initiales appartenant au groupe relatif à u, nous le ferons pour toutes les autres du même groupe; et ce que nous aurons fait pour l'inconnue u, nous le ferons successivement pour toutes. Nous aurons ainsi un quadrillage rectangulaire contenant des cases pleines et des cases vides; d'ailleurs, quelques seconds membres que nous écrivions ultérieurement dans les cases pleines, on voit, dès maintenant, que si l'on forme successivement, dans l'ancien système, puis dans le nouveau, un ensemble composé des inconnues et de leurs dérivées paramétriques, les deux ensembles ainsi obtenus se correspondront terme à terme, et que le second se déduira du premier par de simples changements de notations; de même, et toujours aux notations près, *l'économie des con-*

ditions initiales sera identique dans les deux systèmes. Quant aux dérivées principales du nouveau système, elles coïncideront, aux notations près, les unes avec des dérivées principales, les autres avec des dérivées paramétriques de l'ancien.

Il va sans dire que *nous conservons aux variables indépendantes et aux anciennes inconnues les cotes respectives qu'elles avaient dans le système* S, et que *nous attribuons aux inconnues adjointes des cotes respectivement égales à celles des dérivées anciennes qu'elles admettent pour homonymes*. Cela étant, il convient d'observer que les fonctions inconnues du système Σ dont la cote tombe au-dessous de Γ n'ont, dans le système Σ, aucune dérivée paramétrique, puisqu'elles se trouvent, dans les conditions initiales, égalées à de simples constantes schématiques, et que, par suite, toutes les cases de leurs colonnes sont pleines. En conséquence, toute dérivée paramétrique du système Σ possède une cote au moins égale à $\Gamma + 1$, et toute dérivée paramétrique de cote $\Gamma + 1$ ne peut appartenir qu'à une fonction inconnue de cote Γ, par suite, est du premier ordre.

Occupons-nous maintenant des seconds membres du système Σ.

Reportons-nous, à cet effet, aux hypothèses A, B, C du n° 156, et considérant, d'une part, les groupes

$$t_\delta,\quad t_{\delta+1},\quad \ldots,\quad t_{\Gamma+1} \tag{1}$$

qui s'y trouvent spécifiés, d'autre part, les groupes

$$s_\delta,\quad s_{\delta+1},\quad \ldots,\quad s_\Delta \tag{2}$$

dont se compose le système S, désignons par

$$\psi_\delta,\quad \psi_{\delta+1},\quad \ldots,\quad \psi_{\Gamma+1} \tag{3}$$

les groupes obtenus par la résolution successive de (1), et qui possèdent, eux aussi, la propriété de contenir les groupes (2) (n° 147).

Cela étant, considérons, pour fixer les idées, l'équation qui, dans Σ, a pour premier membre $\frac{\partial u_{\alpha,\beta,\ldots}}{\partial x}$. A la notation près, ce premier membre coïncide avec une dérivée ancienne,

$$\frac{\partial^{(\alpha+1)+\beta+\ldots} u}{\partial x^{\alpha+1}\, \partial y^{\beta}\ldots}, \tag{4}$$

dont la cote ne surpasse pas $\Gamma + 1$, et qui peut être, relativement à S, ou paramétrique, ou principale.

1° Si la dérivée (4) est paramétrique par rapport à S, il existe, dans le nouveau système, une dérivée paramétrique ou fonction inconnue, et une seule, qui, à la notation près, coïncide avec elle : nous égalerons alors $\frac{\partial u_{\alpha,\beta,\ldots}}{\partial x}$ à cette quantité, et nous aurons une relation dont les deux membres auront la même cote que la dérivée (4). Si cette dernière est de cote inférieure ou égale à Γ, le second membre de notre relation sera une inconnue adjointe; si elle est de cote $\Gamma + 1$, le second membre sera une dérivée paramétrique première du système Σ.

2° Si la dérivée (4) est principale par rapport à S, elle admet, en vertu des équations (3), une certaine expression à la fois indépendante, et de toute dérivée principale (de S) quelle qu'elle soit, et de toute dérivée paramétrique ou fonction inconnue (de S) dont la cote surpasserait la sienne propre; en outre, dans le cas particulier où la dérivée (4) coïncide avec un premier membre de S, *l'expression dont il s'agit coïncide avec le second membre correspondant*. Cela étant, dans l'expression considérée de la dérivée principale (4), nous remplacerons toutes les dérivées paramétriques de S par les dérivées paramétriques ou fonctions inconnues de Σ qui leur correspondent respectivement, et nous égalerons $\frac{\partial u_{\alpha,\beta,\ldots}}{\partial x}$ à l'expression ainsi modifiée. Or, il est facile de voir que, après cette modification d'écriture, l'expression est, ou d'ordre zéro, ou du premier ordre, suivant que la dérivée (4) a une cote inférieure ou égale à $\Gamma + 1$. Dans le premier cas, en effet, elle ne peut contenir (outre les variables indépendantes) que les inconnues anciennes et les expressions nouvelles de leurs dérivées paramétriques de cote inférieure ou égale à Γ, ou, en d'autres termes, que les inconnues anciennes et nouvelles. Dans le second cas, elle ne peut contenir que les inconnues anciennes et les expressions nouvelles de leurs dérivées paramétriques de cote inférieure ou égale à $\Gamma + 1$, ou, en d'autres termes, que les inconnues anciennes et nouvelles avec des dérivées paramétriques premières. Dans l'un et l'autre cas d'ailleurs, s'il arrive que (4) coïncide avec un premier membre de S, l'équation considérée du système Σ coïncide, aux notations près, avec l'équation du système S qui a pour premier membre la dérivée (4).

Tel est le système *du premier ordre*, Σ, auquel fait allusion notre énoncé : on voit qu'il se trouve *résolu par rapport à certaines dérivées (premières) des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées*, que *l'économie des conditions initiales y est la même, aux notations près, que dans le système* S, et enfin que *la cote de chaque second membre est au plus égale à celle du premier membre correspondant.*

II. *Toute équation de* S *figure dans* Σ, *aux notations près.*

Effectivement, les conditions initiales de S étant mises, comme nous l'avons dit, sous la forme spécifiée au n° 158, les quantités qui y figurent comme premiers membres ont des cotes inférieures ou égales à Γ, et, d'autre part, chaque premier membre de S peut se déduire de l'une des quantités en question à l'aide d'une dérivation première, d'où résulte qu'il est de cote au plus égale à $\Gamma + 1$. Cela posé, considérons d'abord dans S un premier membre de cote inférieure à $\Gamma + 1$: la quantité dont il peut être considéré comme une dérivée première est alors de cote inférieure à Γ, et, comme les inconnues de Σ dont la cote tombe au-dessous de Γ n'ont dans Σ aucune dérivée paramétrique, on a été conduit, dans la formation de Σ, à écrire, comme premier membre, à la notation près, le premier membre considéré de S. Considérons, en second lieu, dans S, un premier membre de cote $\Gamma + 1$: ce premier membre peut alors être considéré comme une dérivée première d'une quantité de cote Γ figurant dans les conditions initiales de S, et, comme cette dérivation première n'intéresse aucune des variables dont dépend la fonction schématique qui correspond à cette quantité, on a été conduit, cette fois encore, dans la formation de Σ, à écrire comme premier membre, à la notation près, le premier membre considéré de S.

Ainsi, tout premier membre de S figure, à la notation près, parmi les premiers membres de Σ; par suite, en vertu d'une remarque faite à l'alinéa I, toute équation de S figure, aux notations près, dans Σ.

III. *Si l'on considère l'une quelconque des inconnues adjointes de* Σ, *il existe dans le système* Σ *une relation où l'inconnue dont il s'agit se trouve égalée à une quantité homonyme, dérivée première de quelque inconnue ancienne ou adjointe.*

Effectivement, les inconnues anciennes et nouvelles de Σ ont res-

pectivement pour homonymes les premiers membres des conditions initiales de S, et, dès lors, en vertu de la dernière partie (2°) de l'énoncé du n° 158, toute inconnue nouvelle de Σ a pour homonyme une dérivée première de quelque autre inconnue ancienne ou nouvelle; comme d'ailleurs cette dernière inconnue a une cote nécessairement inférieure à celle de la première, par suite inférieure à Γ, elle n'admet dans le système Σ aucune dérivée paramétrique; on a donc été conduit, dans la formation de ce système, à égaler entre elles les deux quantités dont il s'agit.

IV. Si l'on désigne par H l'ensemble des relations obtenues en égalant chaque inconnue adjointe de Σ à la dérivée ancienne qu'elle admet pour homonyme [1], et si l'on partage les équations Σ en deux groupes, Σ', Σ'', suivant que leur premier membre coïncide (soit exactement, soit à la notation près) avec une dérivée *paramétrique* ou avec une dérivée *principale* du système S, *les systèmes* Σ'_C, H_C *sont en corrélation multiplicatoire.*

Voir l'alinéa IV du n° 156.

V. En attribuant à la notation H le même sens que dans l'alinéa IV, *les deux systèmes*

$$^{(C)}\Sigma, \quad (^{(C)}H, {}^{(C)}S)$$

sont en corrélation multiplicatoire.

Voir l'alinéa V du n° 156.

160. Pour avoir une idée des différences que peuvent présenter entre elles les deux réductions (au grade 1 et à l'ordre 1 respectivement) qui font l'objet des n°s 156 et 159, considérons le système fort simple constitué par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = M,$$

où u désigne une fonction inconnue des variables indépendantes x,

---

[1] Le système Σ n'étant pas le même ici qu'au n° 156, l'ensemble des relations H n'y est pas non plus le même.

y, z, et M une fonction connue de x, y, z, u, des dérivées premières et secondes de u, et de ses diverses dérivées troisièmes autres que $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

En pratiquant dans une fonction schématique de x, y, z la coupure

$$(x - x_0)(y - y_0)(z - z_0),$$

on mettra d'abord le résidu sous la forme

$$F(y, z) + (x - x_0) H(x, z) + (x - x_0)(y - y_0) K(x, y),$$

où F, H, K désignent trois fonctions schématiques (n° 84, II); l'économie des conditions initiales (où se trouvent réalisées les diverses circonstances spécifiées au n° 155) sera alors

$$\begin{aligned} u &= \upsilon(y, z) && \text{pour} \quad x = x_0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \varphi(x, z) && \text{pour} \quad y = y_0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \psi(x, y) && \text{pour} \quad z = z_0, \end{aligned}$$

et l'on voit qu'en attribuant à x, y, z, u les cotes respectives 1, 1, 1, 0, le système proposé satisfait aux conditions A, B, C du n° 156. Cela étant, la réduction au grade 1 donnera

	u	u'_x	u''_{xy}
x	$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x$		
y		$\frac{\partial u'_x}{\partial y} = u''_{xy}$	
z			$\frac{\partial u''_{xy}}{\partial z} = M$

;

il faut naturellement supposer que, dans le second membre, M, de la dernière colonne, on a introduit les changements de notations

voulus, c'est-à-dire qu'on y a remplacé

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3},\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y},\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial z},\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2},\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial z^2}$$

respectivement par

$$u'_x,\quad \frac{\partial u'_x}{\partial x},\quad u''_{xy},\quad \frac{\partial u'_x}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 u'_x}{\partial x^2},\quad \frac{\partial u''_{xy}}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 u'_x}{\partial x\,\partial z},\quad \frac{\partial u''_{xy}}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 u'_x}{\partial z^2},$$

toutes les autres notations étant conservées.

Donnons maintenant au résidu de la coupure la forme

$$\begin{aligned} &A + B(z-z_0) + C(y-y_0) + D(x-x_0) \\ &\quad + (z-z_0)^2 L(z) + (y-y_0)(z-z_0)N(z) + (x-x_0)(z-z_0)R(z) \\ &\quad + (y-y_0)^2 P(y,z) + (x-x_0)^2 S(x,z) + (x-x_0)(y-y_0)K(x,y), \end{aligned}$$

où A, B, C, D désignent des constantes schématiques, et L, N, R, P, S, K, des fonctions schématiques (nº 88); l'économie des conditions initiales (où se trouvent réalisées les diverses circonstances spécifiées au nº 158) sera alors

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \beta \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \gamma \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \delta \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad x-x_0 = y-y_0 = z-z_0 = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \lambda(z) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} &= \nu(z) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z} &= \rho(z) \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad x-x_0 = y-y_0 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varpi(y,z) \quad \text{pour} \quad x = x_0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sigma(x,z) \quad \text{pour} \quad y = y_0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \omega(x,y) \quad \text{pour} \quad z = z_0.$$

Cela étant, la réduction au premier ordre donnera

	u	u'_z	u'_y	u'_x
x	$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x$	$\frac{\partial u'_z}{\partial x} = u''_{xz}$	$\frac{\partial u'_y}{\partial x} = u''_{xy}$	$\frac{\partial u'_x}{\partial x} = u''_{x^2}$
y	$\frac{\partial u}{\partial y} = u'_y$	$\frac{\partial u'_z}{\partial y} = u''_{yz}$	$\frac{\partial u'_y}{\partial y} = u''_{y^2}$	$\frac{\partial u'_x}{\partial y} = u''_{xy}$
z	$\frac{\partial u}{\partial z} = u'_z$	$\frac{\partial u'_z}{\partial z} = u''_{z^2}$	$\frac{\partial u'_y}{\partial z} = u''_{yz}$	$\frac{\partial u'_x}{\partial z} = u''_{xz}$

	u''_{z^2}	u''_{yz}	u''_{xz}	u''_{y^2}	u''_{x^2}	u''_{xy}
x	$\frac{\partial u''_{z^2}}{\partial x} = \frac{\partial u''_{xz}}{\partial z}$	$\frac{\partial u''_{yz}}{\partial x} = \mathrm{M}$	$\frac{\partial u''_{xz}}{\partial x} = \frac{\partial u''_{x^2}}{\partial z}$	$\frac{\partial u''_{y^2}}{\partial x} = \frac{\partial u''_{xy}}{\partial y}$		
y	$\frac{\partial u''_{z^2}}{\partial y} = \frac{\partial u''_{yz}}{\partial z}$	$\frac{\partial u''_{yz}}{\partial y} = \frac{\partial u''_{y^2}}{\partial z}$	$\frac{\partial u''_{xz}}{\partial y} = \mathrm{M}$		$\frac{\partial u''_{x^2}}{\partial y} = \frac{\partial u''_{xy}}{\partial x}$	
z						$\frac{\partial u''_{xy}}{\partial z} = \mathrm{M}$

;

il faut naturellement supposer que dans le second membre, M, de trois de nos équations, on a introduit les changements de notations voulus, c'est-à-dire qu'on y a remplacé

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3},\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y},\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial z},\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2},\quad \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial z^2},\quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3},\quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^2\,\partial z},\quad \frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z^2},\quad \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}$$

respectivement par

$$u'_x,\quad u'_y,\quad u'_z,$$

$$u''_{x^2},\quad u''_{y^2},\quad u''_{z^2},\quad u''_{xy},\quad u''_{xz},\quad u''_{yz},$$

$$\frac{\partial u''_{x^2}}{\partial x},\quad \frac{\partial u''_{xy}}{\partial x},\quad \frac{\partial u''_{x^2}}{\partial z},\quad \frac{\partial u''_{xy}}{\partial y},\quad \frac{\partial u''_{xz}}{\partial z},\quad \frac{\partial u''_{y^2}}{\partial y},\quad \frac{\partial u''_{y^2}}{\partial z},\quad \frac{\partial u''_{yz}}{\partial z},\quad \frac{\partial u''_{z^2}}{\partial z}.$$

161. Considérons actuellement un système différentiel, S, où se trouvent vérifiées les hypothèses générales A, B et C du n° 156, et désignons par Σ le système du premier ordre que l'on déduit de S à l'aide du mécanisme indiqué plus haut (n° 159, I); imaginons ensuite qu'on effectue sur le système Σ un changement linéaire et homogène des variables indépendantes, et, dans le système transformé, convenons, d'une part, d'attribuer aux nouvelles variables des cotes respectives toutes égales à 1 (comme nous l'avions fait dans Σ pour les anciennes), d'autre part, de conserver aux fonctions inconnues les cotes qu'elles avaient avant la transformation.

Cela posé, *si, dans le système du premier ordre* Σ, *les valeurs initiales des variables, des inconnues et des dérivées paramétriques premières satisfont à certaines restrictions d'inégalité, on peut, par un changement linéaire et homogène des variables indépendantes, suivi d'une résolution convenable* (par rapport à certaines dérivées premières), *le transformer en un autre,* Ω, *jouissant des deux propriétés suivantes :*

1° *Les cotes* (*premières*) *des variables et des inconnues étant fixées, dans le système* Ω, *comme nous venons de l'indiquer* (*voir* les quelques lignes qui précèdent le présent énoncé), *et des cotes secondes convenablement choisies leur étant adjointes au besoin, le système* Ω *satisfait à la définition de l'orthonomie.*

2° *Le nombre des quantités paramétriques* (*inconnues et dérivées*) *de cote* C *est, quel que soit* C, *exactement le même dans* Ω *que dans* Σ (¹).

I. Étant donné un système de grade 1 (n° 154), nous dirons que son Tableau, construit d'après les indications du n° 90, est *régulier*, si l'on peut adopter pour les lignes de ce Tableau, c'est-à-dire pour les variables du système, un ordre tel que les cases vides de chaque colonne se trouvent situées au bas de cette colonne. Il est clair que, lorsqu'on parcourt de bas en haut les lignes successives d'un pareil Tableau, le nombre des cases vides ne va jamais en augmentant; on peut d'ailleurs, l'ordre des lignes étant ainsi fixé, adopter en même temps pour les colonnes un ordre tel, qu'en parcourant de droite à

(¹) Pour la commodité de notre énoncé, nous assimilons les inconnues du système Σ à des dérivées paramétriques (d'ordre zéro).

gauche ces colonnes successives, le nombre des cases vides n'aille pas non plus en augmentant : nous supposerons, dans ce qui suit, cette double condition satisfaite.

Considérons actuellement *un système régulier de grade* 1 (*ne contenant dans ses seconds membres aucune dérivée principale*) : *si, moyennant l'attribution aux diverses variables de cotes premières toutes égales à* 1, *et aux diverses inconnues de cotes premières convenablement choisies, on peut faire en sorte que les cotes premières des inconnues et dérivées figurant dans chaque second membre ne surpassent pas celle du premier membre correspondant, le système dont il s'agit est nécessairement orthonome.*

Il suffit, pour le prouver, d'établir qu'il est toujours possible de trouver pour les variables et les inconnues des cotes secondes telles, que la cote seconde minima des dérivées (principales) figurant dans l'ensemble des premiers membres soit supérieure à la cote seconde maxima des inconnues et dérivées (paramétriques) figurant dans l'ensemble des seconds membres.

Distribuons à cet effet les variables indépendantes en groupes successifs d'après les nombres décroissants de cases vides contenues dans les lignes correspondantes, et pareillement les fonctions inconnues en groupes successifs d'après les nombres décroissants de cases vides contenues dans les colonnes correspondantes. S'il existe des lignes entièrement vides, à ce groupe de lignes correspondra un groupe de variables auxquelles j'attribuerai une cote seconde positive, par exemple $c_0 = 1$; de même, s'il existe des colonnes entièrement vides, à ce groupe de colonnes correspondra un groupe d'inconnues auxquelles j'attribuerai une cote seconde quelconque, par exemple $\gamma_0 = 0$. Abstraction étant faite de ces groupes, dont l'existence est éventuelle, il est facile de voir que le nombre des groupes restants de variables est exactement égal à celui des groupes restants d'inconnues; nous supposerons, pour fixer les idées, qu'il y en a cinq, et nous nommerons

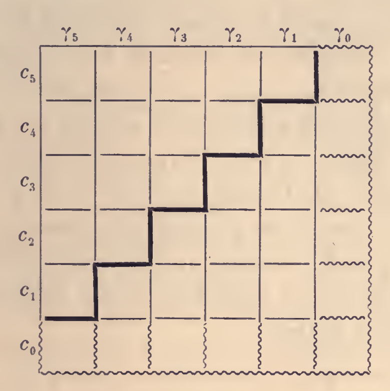
$$(5) \qquad c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad c_4, \quad c_5$$

les cotes secondes respectives des cinq groupes successifs de variables (considérés dans l'ordre que nous venons d'indiquer),

$$(6) \qquad \gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \gamma_3, \quad \gamma_4, \quad \gamma_5$$

les cotes secondes respectives des cinq groupes successifs d'inconnues (considérés également dans l'ordre que nous venons d'indiquer).

Pour faciliter l'intelligence de ce qui va suivre, on peut représenter à l'aide de la figure schématique ci-dessous les divers groupes de variables et d'inconnues, avec les cotes secondes qui leur sont respectivement attribuées.



Dans cette figure, à un groupe de variables correspond une seule ligne, à un groupe d'inconnues une seule colonne, et la cote seconde se trouve indiquée, dans le premier cas à gauche de la ligne, dans le second cas au-dessus de la colonne. Les traits tremblés ont été réservés au groupe de variables et au groupe d'inconnues dont l'existence est éventuelle. Enfin, le trait plus gros, en forme d'escalier, qui partage la figure en deux régions, indique quelles sont, pour chaque groupe d'inconnues, les variables auxquelles se rapportent les dérivées paramétriques : par exemple, pour une inconnue appartenant au groupe (γ_2), les dérivées paramétriques sont celles qui intéressent, à l'exclusion de toute autre, les variables des groupes (c_3), (c_2), (c_1) et éventuellement (c_0).

Fixons maintenant les valeurs des diverses cotes (5) et (6). A cet effet, nous désignerons par q un entier positif, arbitrairement choisi sous la seule condition d'être au moins égal à l'ordre maximum des dérivées figurant effectivement dans les seconds membres du système, et nous choisirons les entiers (5) et (6) sous les seules conditions

$$(7) \qquad c_1 > c_0 q, \quad c_2 > c_1 q, \quad c_3 > c_2 q, \quad c_4 > c_3 q, \quad c_5 > c_4 q;$$

$$(8) \qquad \gamma_0 + q c_5 = \gamma_1 + q c_4 = \gamma_2 + q c_3 = \gamma_3 + q c_2 = \gamma_4 + q c_1 = \gamma_5 + q c_0.$$

Les entiers q, $c_0 = 1$ et $\gamma_0 = 0$ étant connus, il est clair qu'on pourra, à l'aide de (7), déterminer successivement c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, puis, à l'aide de (8), déterminer successivement γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, γ_5.

Cela étant, je dis que la cote seconde maxima des dérivées paramétriques des ordres $0, 1, 2, \ldots, q$ (et, par suite, des inconnues et dérivées figurant dans les seconds membres du système) est inférieure à la cote seconde minima des premiers membres. Pour l'établir, nous désignerons par θ la valeur commune des quantités (8), et nous prouverons : 1° que la cote seconde d'une dérivée paramétrique appartenant aux ordres $0, 1, 2, \ldots, q$ est au plus égale à θ; 2° que la cote seconde d'un premier membre est supérieure à θ.

Remarquons en effet que, pour les groupes successifs de variables, parcourus de bas en haut, la cote seconde va toujours en croissant. Il résulte de là que, pour les groupes d'inconnues (γ_0), (γ_1), (γ_2), (γ_3), (γ_4), les plus grandes valeurs que puisse prendre la cote seconde d'une dérivée paramétrique appartenant aux ordres $0, 1, 2, \ldots, q$ seront respectivement égales à

$$\gamma_0 + qc_5, \qquad \gamma_1 + qc_4, \qquad \gamma_2 + qc_3, \qquad \gamma_3 + qc_2, \qquad \gamma_4 + qc_1,$$

c'est-à-dire à θ. Pour le groupe d'inconnues (γ_5), deux cas sont à distinguer, suivant que les colonnes correspondantes contiennent quelque case vide ou n'en contiennent aucune : dans le premier cas, on trouvera de même, comme limite supérieure, $\gamma_5 + qc_0$, c'est-à-dire θ; dans le second cas, chacune de ces inconnues n'a qu'une seule dérivée paramétrique, appartenant à l'ordre zéro, et ayant pour cote seconde

$$\gamma_5 < \gamma_5 + qc_0 = \theta.$$

D'un autre côté, la plus petite valeur que puisse prendre la cote seconde d'un premier membre du système est évidemment égale à l'une ou à l'autre des quantités

$$\gamma_1 + c_5, \quad \gamma_2 + c_4, \quad \gamma_3 + c_3, \quad \gamma_4 + c_2, \quad \gamma_5 + c_1,$$

suivant qu'il s'agit de l'un ou de l'autre des groupes d'inconnues (γ_1), (γ_2), (γ_3), (γ_4), (γ_5) : or, en vertu de (7), ces quantités sont respectivement supérieures à

$$\gamma_1 + qc_4, \quad \gamma_2 + qc_3, \quad \gamma_3 + qc_2, \quad \gamma_4 + qc_1, \quad \gamma_5 + qc_0,$$

c'est-à-dire à θ.

II. Nous allons actuellement faire voir qu'en imposant aux valeurs initiales dont parle l'énoncé certaines restrictions d'inégalité, on peut, à l'aide des opérations indiquées, *transformer le système* Σ *en un système à Tableau régulier*, Ω, *dont les colonnes comprennent respectivement les mêmes nombres d'équations que celles de* Σ. Nous ferons voir en même temps que, *dans ce système* Ω, *la cote première* (évaluée conformément aux indications ci-dessus) *de chaque second membre est au plus égale à celle du premier membre correspondant.*

Observons à cet effet que, dans le système Σ, les premiers membres sont de cote au plus égale à $\Gamma+1$, et chaque second membre de cote au plus égale au premier membre correspondant; que les équations de cote inférieure à $\Gamma+1$ correspondent à certaines colonnes, entièrement pleines, du Tableau, et que leurs seconds membres sont indépendants de toute dérivée; enfin, que les équations de cote $\Gamma+1$ ne peuvent contenir d'autres dérivées que celles de cote $\Gamma+1$ (n° 159).

Cela posé, effectuons sur Σ la transformation linéaire et homogène

$$(9)\qquad \begin{cases} x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \ldots, \\ y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

où x, y, ... désignent les anciennes variables indépendantes, x', y', ... les nouvelles, et α_1, β_1, ..., α_2, β_2, ..., etc., des constantes numériques provisoirement indéterminées.

Si l'on considère d'abord les diverses équations *de cote inférieure à* $\Gamma+1$ contenues dans *une même colonne* (entièrement pleine) du Tableau de Σ, ces équations ont pour premiers membres les diverses dérivées premières (anciennes) d'une même fonction inconnue, avec des seconds membres indépendants de toute dérivée; dès lors (pourvu que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \ldots \\ \alpha_2 & \beta_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

de la transformation soit différent de zéro), les équations dont il s'agit pourront, après leur transformation, être résolues par rapport aux nouvelles dérivées premières de la même fonction (cela, quelles que soient les valeurs numériques que l'on attribue aux variables et

aux inconnues); d'ailleurs, les seconds membres des formules de résolution ne contiendront, outre les nouvelles variables, que des inconnues de cote (première) au plus égale à la cote (première) commune des premiers membres.

Reste donc à considérer, dans le système Σ, le groupe, $\sigma_{\Gamma+1}$, formé par les équations de cote $\Gamma+1$. Pour que ce groupe puisse, par l'application des formules (9), suivie d'une résolution convenable, être transformé en un système à Tableau régulier dont les colonnes contiennent respectivement les mêmes nombres d'équations que les colonnes correspondantes de $\sigma_{\Gamma+1}$, il faut que le système déduit de $\sigma_{\Gamma+1}$ par l'application pure et simple des formules de la transformation (sans résolution ultérieure) possède des solutions numériques n'annulant pas un certain déterminant.

Ce déterminant, D, peut être considéré comme une fonction :

Soit des constantes indéterminées de la transformation, des anciennes variables $x, y, \ldots$, des inconnues de Σ, et de leurs anciennes dérivées paramétriques premières (qui sont toutes de cote $\Gamma+1$);

Soit des constantes indéterminées de la transformation, des nouvelles variables $x', y', \ldots$, des inconnues de Σ, et de leurs nouvelles dérivées premières de cote $\Gamma+1$.

En le considérant, tout d'abord, comme une fonction du premier groupe de quantités, il est facile de voir qu'il est entier et homogène par rapport aux constantes de la transformation, et qu'il a pour coefficients certaines fonctions de $x, y, \ldots$, des inconnues de Σ, et de leurs anciennes dérivées paramétriques premières. Si l'une, au moins, de ces fonctions n'est pas identiquement nulle, on pourra trouver pour les constantes de la transformation des valeurs numériques telles que D ne soit pas identiquement nul, et qu'en même temps le déterminant de la transformation soit différent de zéro. Les valeurs de ces constantes étant fixées comme il vient d'être dit, et le déterminant D étant considéré comme une fonction de $x, y, \ldots$, des inconnues de Σ, et des anciennes dérivées paramétriques premières, le groupe $\sigma_{\Gamma+1}$ possède des solutions numériques n'annulant pas ce déterminant. Si donc on considère D comme une fonction de $x', y', \ldots$, des inconnues de Σ, et de leurs nouvelles dérivées premières de cote $\Gamma+1$, le groupe déduit de $\sigma_{\Gamma+1}$ par l'application pure et simple des formules de la transformation possède des solutions numériques n'annulant pas le déterminant dont il s'agit, ce qui permet d'effectuer a résolu-

tion voulue : il est clair d'ailleurs que, dans le groupe, $\omega_{\Gamma+1}$, finalement obtenu, chaque premier membre est une dérivée de cote $\Gamma+1$, et que le second membre correspondant est de cote inférieure ou égale.

III. Le simple rapprochement des alinéas I et II montre que le système Ω, déduit de Σ à l'aide du mécanisme ci-dessus décrit, satisfait à la première des deux conditions formulées par notre énoncé général. Il satisfait, d'ailleurs, à la seconde, c'est-à-dire que le nombre des quantités paramétriques (inconnues et dérivées) de cote C est, dans Ω, exactement le même que dans Σ. Effectivement, la chose est évidente en ce qui concerne les seules inconnues. D'autre part, en vertu de ce qui précède, les dérivées paramétriques (d'ordre >0) ne peuvent appartenir qu'aux fonctions inconnues de cote Γ, c'est-à-dire à celles dont les dérivées principales premières (de cote $\Gamma+1$) figurent comme premiers membres dans le groupe $\sigma_{\Gamma+1}$ s'il s'agit du système Σ, ou dans le groupe $\omega_{\Gamma+1}$ s'il s'agit de Ω; or, ces inconnues étant les mêmes de part et d'autre, et les colonnes de $\omega_{\Gamma+1}$ contenant respectivement les mêmes nombres de cases vides que les colonnes de $\sigma_{\Gamma+1}$, on en déduit immédiatement le point que nous avons en vue.

Ainsi se trouve établie notre proposition. Pour que les restrictions d'inégalité qu'elle impose aux valeurs numériques des diverses quantités figurant dans les seconds membres de Σ puissent être vérifiées, il faut, d'après le raisonnement ci-dessus, que certaines fonctions de ces quantités ne soient pas toutes identiquement nulles, ce qui n'arrive pas nécessairement.

CHAPITRE X.

SIMPLIFICATION ET EXTENSION DES RÉSULTATS OBTENUS SUR LES SYSTÈMES ORTHONOMES : THÉORÈMES D'EXISTENCE.

Simplification de la règle de passivité d'un système orthonome.

162. Considérons un système différentiel, S, impliquant les fonctions inconnues u, v, ... des variables indépendantes x, y, ..., et satisfaisant (comme au n° 103) aux diverses conditions ci-après :

A. Le système S *est résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et les seconds membres y sont indépendants de toute dérivée principale.*

B. En attribuant, dans toutes les équations du système, aux variables indépendantes des cotes respectives toutes égales à 1, *et aux inconnues des cotes respectives convenablement choisies, chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues et dérivées) dont la cote ne surpasse pas celle du premier membre correspondant.*

C. En désignant par δ la cote minima des premiers membres de S, et en imposant éventuellement aux valeurs numériques des quantités qui figurent dans les seconds membres de S telles ou telles restrictions d'inégalité, *on peut, des groupes successifs* (en nombre illimité)

$$S_\delta,\quad S_{\delta+1},\quad \ldots,\quad S_C,\quad \ldots$$

(n° 144), *extraire respectivement des groupes,*

$$(1)\qquad t_\delta,\quad t_{\delta+1},\quad \ldots,\quad t_C,\quad \ldots,$$

tels que l'un quelconque d'entre eux, t_C, composé d'équations en nombre exactement égal à celui des dérivées principales de cote C, *soit résoluble par rapport à elles.* Les groupes partiels (1) sont

alors successivement résolubles par rapport aux dérivées principales de cotes

$$\delta, \quad \delta+1, \quad \ldots, \quad C, \quad \ldots,$$

et cela quelles que soient (sauf les restrictions éventuelles d'*inégalité* auxquelles il est fait allusion plus haut) les valeurs numériques attribuées aux variables x, y, ..., aux inconnues u, v, ..., et aux dérivées paramétriques de u, v, ...

Dans ce système, désignons par h le nombre des variables indépendantes x, y, ..., par ${}^{(C)}n$ le nombre des dérivées paramétriques et fonctions inconnues dont la cote ne surpasse pas C, par ${}^{(C)}p$ le nombre des dérivées principales dont la cote satisfait à la même condition, enfin par ${}^{(C)}q$ la somme $h + {}^{(C)}n$: les diverses quantités dont nous venons de parler sont donc, en tout, au nombre de

$$h + {}^{(C)}n + {}^{(C)}p = {}^{(C)}q + {}^{(C)}p.$$

Cela étant, *pour que le système proposé* S *soit passif, il faut et il suffit qu'en considérant* x, y, ... *et les diverses quantités* (*inconnues ou dérivées*) *dont la cote ne surpasse pas* C, *comme autant de variables indépendantes distinctes, la solution numérique générale du système* ${}^{(C)}$S *soit fournie, quel que soit* C, *par des formules exprimant les diverses variables dont il s'agit* (*en nombre* ${}^{(C)}q + {}^{(C)}p$) *à l'aide de* ${}^{(C)}q$ *arbitraires,* ${}^{(C)}q$ *d'entre ces formules étant résolubles par rapport aux arbitraires conformément au principe général des fonctions implicites* (n° 120).

La condition posée est nécessaire : car, le système S étant supposé passif, il résulte immédiatement du n° 103 que, pour toute valeur de C, la solution numérique générale du système ${}^{(C)}$S, à ${}^{(C)}q + {}^{(C)}p$ variables, est aussi celle du système réduit, extrait de ${}^{(C)}$S, que forment les ${}^{(C)}p$ équations

(2) $$t_\delta, \quad t_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad t_C;$$

elle peut, dès lors (n° 138), s'exprimer comme l'indique notre énoncé.

La condition posée est suffisante. Effectivement, si la solution générale de ${}^{(C)}$S est exprimable comme l'indique notre énoncé, les formules qui la fournissent ne peuvent manquer de vérifier constamment le système réduit des ${}^{(C)}p$ équations (2), et en donnent par suite (n° 140) la solution générale. Les systèmes ${}^{(C)}$S et (2) sont

donc numériquement équivalents, et, dès lors, l'élimination des dérivées principales de cotes

$$\delta, \quad \delta+1, \quad \ldots, \quad C,$$

effectuée entre les équations

$$S_\delta, \quad S_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad S_C,$$

conduit à des identités : il en résulte, puisque C est quelconque, que le système S est passif (n° 103).

163. Dans tout système orthonome, les conditions *A* et *B* du numéro précédent se trouvent satisfaites d'elles-mêmes, et il suffit, en ce qui concerne la condition *C*, de supposer que le groupe t_C a été extrait de S_C sous les seules conditions de comprendre exactement autant d'équations qu'il y a de dérivées principales de cote C, et d'avoir pour premiers membres les dérivées dont il s'agit : car alors le déterminant différentiel de t_C par rapport à ces dernières est identiquement égal à 1. On sait d'ailleurs qu'un système orthonome, s'il est passif, est complètement intégrable, et réciproquement (n°s 115 et 108).

Cela étant, on peut formuler comme il suit les théorèmes relatifs à l'existence des intégrales dans les systèmes orthonomes.

Premier théorème d'existence. — *Tout système orthonome dont les premiers membres appartiennent respectivement à des inconnues différentes est complètement intégrable.*

Car un pareil système est nécessairement passif (n° 110).

Deuxième théorème d'existence. — *Supposons que, dans un système orthonome,* S, *aucun des premiers membres ne soit une dérivée de quelque autre, et que deux au moins d'entre eux soient des dérivées d'une même inconnue;* désignons alors par δ la cote première minima des équations de S; puis, adoptant pour les conditions initiales du système l'écriture spécifiée au n° 155, désignons par Γ la cote première maxima des premiers membres de ces conditions. Cela étant, *pour que le système soit complètement intégrable, il faut et il suffit que l'élimination des dérivées principales de cotes premières*

$$\delta, \quad \delta+1, \quad \ldots, \quad \Gamma+2,$$

effectuée entre les équations

(3) $$S_\delta,\quad S_{\delta+1},\quad \ldots,\quad S_{\Gamma+2},$$

conduise à des identités.

I. Pour qu'un système orthonome soit complètement intégrable, il faut et il suffit, comme nous l'avons rappelé plus haut, qu'il soit passif, c'est-à-dire, en vertu du n° 103, que l'élimination des dérivées principales de cotes premières

$$\delta,\quad \delta_{+1},\quad \ldots,\quad C,$$

effectuée entre les équations

$$S_\delta,\quad S_{\delta+1},\quad \ldots,\quad S_C,$$

conduise, quel que soit C, à des identités. *La condition posée par notre énoncé* relativement aux groupes (3) *est* donc évidemment *nécessaire,* et il nous reste à prouver qu'elle est suffisante.

II. En vertu du n° 157, on peut, du système orthonome S, déduire un système de grade 1, Σ, jouissant des diverses propriétés indiquées au n° 156, et, de plus, orthonome comme S.

Je dis que *la condition posée par notre énoncé entraîne la passivité du système orthonome* Σ.

Considérons en effet, dans l'un quelconque des deux systèmes S, Σ, le total que forment le nombre des variables indépendantes et celui des quantités paramétriques (inconnues ou dérivées) dont la cote première ne surpasse pas C [1] : à cause des relations qui existent entre S et Σ (n° 156), ce total a la même valeur dans les deux systèmes, et nous le désignerons par ${}^{(C)}q$.

Cela étant, il résulte de notre hypothèse sur les groupes (3) que la solution numérique générale de ${}^{(\Gamma+2)}S$ ou (3) est fournie par des formules exprimant les variables indépendantes x, y, ... et les quantités (inconnues ou dérivées du système S) dont la cote première ne surpasse pas $\Gamma+2$, à l'aide de ${}^{(\Gamma+2)}q$ arbitraires, ${}^{(\Gamma+2)}q$ d'entre ces formules étant résolubles par rapport aux arbitraires (n° 138).

Si l'on passe de S à Σ, et qu'on désigne par H le groupe des rela-

---

[1] Nous assimilons ici, pour la commodité du langage, les inconnues de S ou de Σ à des dérivées paramétriques d'ordre zéro.

tions obtenues en égalant chaque inconnue adjointe de Σ à la dérivée ancienne qu'elle admet pour homonyme, le système ${}^{(\Gamma+2)}\Sigma$ est, comme nous savons (n° 156, V), numériquement équivalent à

$$({}^{(\Gamma+2)}H, {}^{(\Gamma+2)}S);$$

le groupe ${}^{(\Gamma+2)}H$ s'obtient d'ailleurs visiblement en extrayant, de l'ensemble illimité que forment les inconnues adjointes et leurs dérivées de tous ordres, les diverses quantités dont la cote première ne surpasse pas $\Gamma+2$, et en les égalant à leurs synonymes anciens. D'après ce qui vient d'être dit sur ${}^{(\Gamma+2)}S$, il est manifeste que la solution générale de

$$({}^{(\Gamma+2)}H, {}^{(\Gamma+2)}S) \quad \text{ou} \quad {}^{(\Gamma+2)}\Sigma$$

est fournie par des formules exprimant les variables indépendantes x, y, ... et les quantités (inconnues ou dérivées du système Σ) dont la cote première ne surpasse pas $\Gamma+2$, à l'aide de ${}^{(\Gamma+2)}q$ arbitraires, ${}^{(\Gamma+2)}q$ d'entre ces formules étant résolubles par rapport aux arbitraires.

Si l'on désigne alors par ${}^{(\Gamma+2)}\varpi$ le nombre des dérivées principales du système Σ dont la cote première ne surpasse pas $\Gamma+2$, et si l'on extrait de ${}^{(\Gamma+2)}\Sigma$ un groupe partiel ayant pour premiers membres, sans omission ni répétition, les ${}^{(\Gamma+2)}\varpi$ dérivées principales dont il s'agit, les formules, en nombre ${}^{(\Gamma+2)}q + {}^{(\Gamma+2)}\varpi$, qui donnent la solution générale de ${}^{(\Gamma+2)}\Sigma$ ne peuvent manquer de vérifier constamment le groupe partiel; et comme ce dernier, composé de ${}^{(\Gamma+2)}\varpi$ équations, est réduit, elles en fournissent aussi la solution *générale* (n° 140). Le système ${}^{(\Gamma+2)}\Sigma$ équivaut donc numériquement au groupe partiel, et, dès lors, si entre les équations ${}^{(\Gamma+2)}\Sigma$ on élimine les diverses dérivées principales de Σ dont la cote première ne surpasse pas $\Gamma+2$, on est conduit à des identités.

Cela étant, comme, dans le système Σ, orthonome et de grade 1, la cote première maxima des inconnues est Γ, et, par suite, celle des dérivées cardinales (toutes du second ordre) $\Gamma+2$, il résulte de la règle provisoire du n° 112 que le système Σ est passif : c'est ce qu'il s'agissait d'établir.

III. *La passivité du système Σ entraîne celle du système* S.

Le système Σ étant supposé passif, la solution numérique générale de ${}^{(C)}\Sigma$ est fournie, quel que soit C (n° 162), par des formules expri-

mant les variables indépendantes x, y, ... et les quantités (inconnues ou dérivées du système Σ) dont la cote première ne surpasse pas C, à l'aide de ${}^{(C)}q$ arbitraires, ${}^{(C)}q$ d'entre ces formules étant résolubles par rapport aux arbitraires.

Répartissons maintenant les formules dont il s'agit en deux groupes, ${}^{(C)}J$, ${}^{(C)}K$, suivant qu'elles ont ou non pour premier membre quelque dérivée (d'ordre positif ou nul) d'une inconnue adjointe. Le système $({}^{(C)}J, {}^{(C)}K)$ ayant pour conséquence numérique ${}^{(C)}\Sigma$, qui, à son tour, a pour conséquence numérique ${}^{(C)}H$, il est clair que $({}^{(C)}J, {}^{(C)}K)$ a pour conséquence numérique $({}^{(C)}H, {}^{(C)}K)$; et, comme ces deux derniers systèmes, visiblement réduits [1], comprennent le même nombre d'équations, ils sont numériquement équivalents (n° 131) : or, le premier d'entre eux contient ${}^{(C)}q$ équations résolubles par rapport aux arbitraires; il en est donc de même du second (n° 137), et, comme le groupe ${}^{(C)}H$ est indépendant des arbitraires, les ${}^{(C)}q$ équations dont il s'agit sont forcément contenues dans le groupe ${}^{(C)}K$.

Cela posé, observons qu'en vertu de l'équivalence numérique entre

$${}^{(C)}\Sigma \quad \text{et} \quad ({}^{(C)}H, {}^{(C)}S),$$

les formules $({}^{(C)}J, {}^{(C)}K)$, qui fournissent la solution générale de ${}^{(C)}\Sigma$, fournissent également celle de $({}^{(C)}H, {}^{(C)}S)$, et que, par suite, les formules ${}^{(C)}K$ ne peuvent manquer de vérifier constamment le système ${}^{(C)}S$. Si l'on désigne alors par ${}^{(C)}p$ le nombre des dérivées principales du système S dont la cote première ne surpasse pas C, et si l'on extrait de ${}^{(C)}S$ un groupe partiel ayant pour premiers membres, sans omission ni répétition, les ${}^{(C)}p$ dérivées principales dont il s'agit, les formules ${}^{(C)}K$, en nombre ${}^{(C)}q + {}^{(C)}p$, vérifieront en particulier le groupe partiel; et, comme ce dernier, composé de ${}^{(C)}p$ équations, est réduit, elles en fourniront (n° 140) la solution *générale*, à plus forte raison celle du groupe total ${}^{(C)}S$. Il en résulte, puisque C est quelconque, que le système S est passif (n° 162).

IV. Il résulte du simple rapprochement des alinéas II et III que *la condition posée par notre énoncé est suffisante*. Ainsi se trouve achevée la démonstration.

---

[1] Ils sont, en effet, résolubles l'un et l'autre par rapport aux variables indépendantes x, y, ... et aux quantités (inconnues et dérivées de Σ) dont la cote première ne surpasse pas C.

164. Considérons, comme application de ce qui précède, un système différentiel impliquant trois fonctions inconnues, u, v, w, des variables indépendantes x, y, ..., et supposons qu'il ait pour premiers membres *toutes* les dérivées d'ordre m de u, *toutes* celles d'ordre n de v, *toutes* celles d'ordre p de w, les seconds membres ne contenant, avec les variables x, y, ..., que les trois inconnues u, v, w, et leurs dérivées d'ordres respectivement inférieurs à m, n, p. En attribuant à x, y, ..., des cotes respectives toutes égales à 1, et à u, v, w, des cotes respectives, c_u, c_v, c_w, vérifiant les relations

$$c_u + m = c_v + n = c_w + p,$$

on voit immédiatement : 1° que le système dont il s'agit est orthonome, d'où résulte que, si le nombre des variables indépendantes se réduit à 1, il est complètement intégrable ; 2° qu'en désignant par δ la valeur commune des trois entiers $c_u + m$, $c_v + n$, $c_w + p$, il a pour premiers membres les diverses dérivées de cote δ, et que les dérivées paramétriques sont toutes celles de cote inférieure à δ, en nombre essentiellement limité. Les conditions initiales n'étant, dès lors, susceptibles que d'une seule écriture, l'entier désigné par Γ au n° 155 est ici égal à $\delta - 1$, et l'on a

$$\Gamma + 2 = \delta + 1;$$

on en déduit sans peine, dans le cas où le nombre des variables indépendantes est supérieur à 1, la règle suivante pour l'intégrabilité complète du système.

Si l'on considère une dérivée de cote $\delta + 1$ intéressant plusieurs variables distinctes, k par exemple ($k > 1$), il existe, dans le système proposé, k équations distinctes qui, différentiées chacune par rapport à la variable voulue, en fourniront des expressions où ne figurent, avec les variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées) de cote inférieure à $\delta + 1$: dans ces k expressions, on remplacera les dérivées de cote δ par leurs valeurs tirées des équations du système, et il faudra que les k expressions résultantes soient toutes identiquement égales. On procédera de même pour toutes les dérivées de cote $\delta + 1$ intéressant plusieurs variables distinctes, et l'on aura ainsi l'ensemble des conditions pour que le système soit complètement intégrable.

Cet exemple fort simple montre quel avantage la nouvelle règle de

passivité (n° 163) peut présenter sur l'ancienne (n° 112), tirée de la considération des dérivées cardinales. La nouvelle règle nous conduit en effet, dans le cas actuel, à ne considérer que des dérivées de cote $\delta + 1$; l'ancienne, au contraire, si l'on observe que les dérivées cardinales ont pour cote maxima $\delta + m$, $\delta + n$ ou $\delta + p$, suivant qu'il s'agit de u, v ou w, exigerait presque toujours un calcul beaucoup plus long, et, parmi les conditions obtenues, un grand nombre se trouveraient n'être que de simples conséquences des autres.

165. Le problème du Calcul inverse de la dérivation (Chap. VI) nous a conduit à considérer un système différentiel ayant pour premiers membres (tous distincts) diverses dérivées de la fonction inconnue u, et pour seconds membres des fonctions données de x, y, ..., toutes développables à partir de valeurs particulières données, x_0, y_0, ... : dans un pareil système, la recherche des *conditions d'intégrabilité* se trouve, comme nous allons le voir, notablement simplifiée par la connaissance de la règle exposée au n° 163.

Supposons tout d'abord que, dans le système proposé, aucun des premiers membres ne soit une dérivée de quelque autre. Si le système ne comprend qu'une seule équation, il est forcément intégrable. Pour former, dans le cas contraire, les conditions d'intégrabilité, qui ne sont autres, comme nous l'avons déjà fait remarquer (n° 112), que les conditions de passivité du système, nous attribuerons à l'inconnue u une cote nulle (et aux variables x, y, ..., des cotes respectives toutes égales à 1), nous mettrons les conditions initiales sous la forme spécifiée au n° 155, et nous désignerons par Γ l'ordre maximum des premiers membres de ces conditions : cela étant, pour que le système proposé soit intégrable, il est nécessaire et suffisant que, pour toute dérivée principale d'ordre inférieur ou égal à $\Gamma + 2$, les diverses expressions (fonctions de x, y, ...) déduites du système proposé soient identiques entre elles.

Supposons maintenant que, dans le système proposé, quelqu'un des premiers membres soit une dérivée de quelque autre. On commencera par faire abstraction de toute équation ayant un pareil premier membre, et l'on examinera si le système résultant, S, est intégrable. S'il ne l'est pas, le système proposé ne l'est pas non plus. S'il l'est, deux cas peuvent se présenter : ou bien, parmi les équations jusqu'ici négligées, il en est quelqu'une qui ne peut se déduire de S

par différentiation, auquel cas le système proposé n'est pas intégrable; ou bien chacune des équations jusqu'ici négligées peut se déduire de S par différentiation, auquel cas le système proposé peut être remplacé par le système intégrable S.

Extension des théorèmes d'existence.

166. Considérons un système différentiel, S, *où se trouvent satisfaites les trois hypothèses A, B, C du n° 162*, et à ces hypothèses adjoignons les particularités suivantes :

1° *Qu'aucun des premiers membres de* S *ne soit une dérivée de quelque autre;*

2° *Qu'en désignant par* Δ *la cote maxima des premiers membres de* S, *les groupes*

$$t_\delta, \quad t_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad t_\Delta$$

(les premiers de ceux que vise l'hypothèse C) *comprennent respectivement les groupes*

$$s_\delta, \quad s_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad s_\Delta$$

du système S (n° 144);

3° *Que le système du premier ordre*, Σ, *que l'on déduit en pareil cas de* S (n° 159), *puisse*, par un changement linéaire et homogène des variables indépendantes, suivi d'une résolution convenable, *être transformé en un autre*, Ω, *remplissant les conditions spécifiées au n°* 161.

Cela posé, et en attribuant à la notation Γ le même sens que dans les n°s 155 et 163, *pour que le système proposé* S *soit passif, ou, ce qui revient au même* (n° 103), *pour que l'élimination des dérivées principales de cotes*

$$\delta, \quad \delta+1, \quad \ldots, \quad C,$$

effectuée entre les équations

$$S_\delta, \quad S_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad S_C,$$

conduise, quel que soit C, *à des identités, il suffit que cela ait lieu pour* $C = \Gamma + 2$.

I. *La condition posée par notre énoncé relativement aux*

groupes

(1) $$S_\delta,\quad S_{\delta+1},\quad \ldots,\quad S_{\Gamma+1},\quad S_{\Gamma+2}$$

entraîne la passivité du système Ω.

Considérons, en effet, dans l'un quelconque des trois systèmes S, Σ, Ω, le total que forment le nombre des variables indépendantes et celui des quantités paramétriques (inconnues et dérivées) dont la cote (unique ou première) ne surpasse pas C : à cause des relations qui existent, d'une part entre S et Σ, d'autre part entre Σ et Ω, ce nombre est le même pour les trois systèmes, et nous le désignerons par ${}^{(C)}q$.

Cela étant, il résulte de la condition posée par notre énoncé que la solution numérique générale de ${}^{(\Gamma+2)}S$ ou (1) est fournie par des formules exprimant les variables indépendantes et les quantités (inconnues ou dérivées de S) dont la cote (unique) ne surpasse pas $\Gamma+2$, à l'aide de ${}^{(\Gamma+2)}q$ arbitraires, ${}^{(\Gamma+2)}q$ d'entre ces formules étant résolubles par rapport aux arbitraires (n° 138).

Si l'on passe de S à Σ, et que l'on désigne par H le groupe des relations obtenues en égalant chaque inconnue adjointe de Σ à la dérivée ancienne qu'elle admet pour homonyme, le système ${}^{(\Gamma+2)}\Sigma$ est, comme nous savons (n° 159, V), numériquement équivalent à

$$({}^{(\Gamma+2)}H,\ {}^{(\Gamma+2)}S);$$

le groupe ${}^{(\Gamma+2)}H$ s'obtient d'ailleurs visiblement en extrayant de l'ensemble illimité que forment les inconnues adjointes et leurs dérivées de tous ordres les diverses quantités dont la cote (unique) ne surpasse pas $\Gamma+2$, et en les égalant à leurs synonymes anciens. D'après ce qui vient d'être dit sur ${}^{(\Gamma+2)}S$, il est manifeste que la solution numérique générale de

$$({}^{(\Gamma+2)}H,\ {}^{(\Gamma+2)}S)\quad \text{ou}\quad {}^{(\Gamma+2)}\Sigma$$

est fournie par des formules exprimant les variables indépendantes et les quantités (inconnues et dérivées du système Σ) dont la cote (unique) ne surpasse pas $\Gamma+2$, à l'aide de ${}^{(\Gamma+2)}q$ arbitraires, ${}^{(\Gamma+2)}q$ d'entre ces formules étant résolubles par rapport aux arbitraires.

Si l'on passe maintenant de Σ à $\Big[[\Sigma]\Big]$ (n° 149), il résulte immédiatement du n° 153 que la solution numérique générale de ${}^{(\Gamma+2)}\Big[[\Sigma]\Big]$ est la même que celle de $\Big[[{}^{(\Gamma+2)}\Sigma]\Big]$: elle s'obtiendra

donc en remplaçant dans les formules précédentes les anciennes variables et dérivées par leurs valeurs tirées des formules de la transformation (n° 148), et en effectuant la résolution (évidemment possible) du système ainsi obtenu par rapport aux nouvelles variables et aux quantités (fonctions inconnues et nouvelles dérivées) dont la cote ne dépasse pas $\Gamma + 2$. Ces dernières variables, inconnues, et dérivées, se trouveront ainsi exprimées à l'aide de ${}^{(\Gamma+2)}q$ arbitraires, et il résulte du n° 137 que, parmi les formules obtenues, ${}^{(\Gamma+2)}q$ seront, comme précédemment, résolubles par rapport aux arbitraires.

Si l'on passe, enfin, de $\left[[\Sigma]\right]$ à Ω (et si l'on observe que $\Gamma + 1$ est au moins égal à Δ, n° 155), le mécanisme à l'aide duquel cette opération s'effectue (*voir* l'alinéa II du n° 161) entraîne, en vertu du n° 146, l'équivalence numérique de ${}^{(\Gamma+2)}\left[[\Sigma]\right]$ et ${}^{(\Gamma+2)}\Omega$: la solution numérique générale de ${}^{(\Gamma+2)}\Omega$ est donc fournie par les formules dont il a été question en dernier lieu.

Cela posé, si l'on désigne par ${}^{(\Gamma+2)}\varpi$ le nombre des dérivées principales du système Ω dont la cote première ne surpasse pas $\Gamma + 2$, et si l'on extrait de ${}^{(\Gamma+2)}\Omega$ un groupe partiel ayant pour premiers membres, sans omission ni répétition, les ${}^{(\Gamma+2)}\varpi$ dérivées principales dont il s'agit, les formules, en nombre ${}^{(\Gamma+2)}q + {}^{(\Gamma+2)}\varpi$, qui donnent la solution générale de ${}^{(\Gamma+2)}\Omega$ ne peuvent manquer de vérifier constamment le groupe partiel ; et comme ce dernier, composé de ${}^{(\Gamma+2)}\varpi$ équations, est réduit, elles en fournissent aussi la solution *générale* (n° 140). Le système ${}^{(\Gamma+2)}\Omega$ équivaut donc numériquement au groupe partiel, et, dès lors, si, entre les équations ${}^{(\Gamma+2)}\Omega$, on élimine les diverses dérivées principales de Ω dont la cote première ne surpasse pas $\Gamma + 2$, on est conduit à des identités.

Cela étant, comme, dans le système Ω, orthonome et du premier ordre, la cote première maxima des inconnues est Γ, et, par suite, celle des dérivées cardinales (toutes du second ordre) $\Gamma + 2$, il résulte de la règle provisoire du n° 112 que le système Ω est passif : c'est ce qu'il s'agissait d'établir.

II. *La passivité du système* Ω *entraîne celle du système* S.

Le système Ω étant supposé passif, la solution numérique générale de ${}^{(C)}\Omega$ est fournie (quel que soit C) par des formules exprimant les variables (nouvelles) et les quantités (inconnues et dérivées du

système Ω) dont la cote première ne surpasse pas C, à l'aide de ${}^{(C)}q$ arbitraires, ${}^{(C)}q$ d'entre ces formules étant résolubles par rapport aux arbitraires (n° 162). Cette solution générale de ${}^{(C)}\Omega$ est d'ailleurs en même temps celle de ${}^{(C)}\left[\left[\Sigma\right]\right]$, ainsi qu'il résulte du n° 146 et des relations qui existent entre les deux systèmes Ω et $\left[\left[\Sigma\right]\right]$; et elle est aussi, en vertu du n° 153, celle de $\left[\left[{}^{(C)}\Sigma\right]\right]$.

Cela étant, la solution numérique générale de ${}^{(C)}\Sigma$ s'obtiendra en remplaçant, dans les formules précédentes, les nouvelles variables et dérivées par leurs valeurs tirées des formules de transformation (n° 148), et en effectuant la résolution (évidemment possible) du système ainsi obtenu par rapport aux anciennes variables et aux quantités (fonctions inconnues et anciennes dérivées) dont la cote (unique) ne surpasse pas C. Ces dernières variables, inconnues, et dérivées, se trouveront ainsi exprimées à l'aide de ${}^{(C)}q$ arbitraires, et il résulte du n° 137 que, parmi les formules ainsi obtenues, ${}^{(C)}q$ seront, comme précédemment, résolubles par rapport aux arbitraires.

Répartissons maintenant les formules dont il s'agit en deux groupes, ${}^{(C)}J$, ${}^{(C)}K$, suivant qu'elles ont ou non pour premier membre quelque dérivée (d'ordre positif ou nul) d'une inconnue adjointe de Σ. Le système (${}^{(C)}J$, ${}^{(C)}K$) ayant pour conséquence numérique ${}^{(C)}\Sigma$, qui à son tour a pour conséquence numérique ${}^{(C)}H$, il est clair que le système (${}^{(C)}J$, ${}^{(C)}K$) a pour conséquence numérique (${}^{(C)}H$, ${}^{(C)}K$); et comme ces deux derniers systèmes, visiblement réduits [1], comprennent le même nombre d'équations, ils sont numériquement équivalents (n° 131) : or, le premier d'entre eux contient ${}^{(C)}q$ équations résolubles par rapport aux arbitraires; il en est donc de même du second (n° 137), et, comme le groupe ${}^{(C)}H$ est indépendant des arbitraires, les ${}^{(C)}q$ équations dont il s'agit sont forcément contenues dans le groupe ${}^{(C)}K$.

Cela posé, observons qu'en vertu de l'équivalence numérique entre

$$ {}^{(C)}\Sigma \quad \text{et} \quad ({}^{(C)}H, {}^{(C)}S), $$

les formules (${}^{(C)}J$, ${}^{(C)}K$), qui fournissent la solution générale de ${}^{(C)}\Sigma$, fournissent également celle de (${}^{(C)}H$, ${}^{(C)}S$), et que, par suite, les for-

---

(1) Ils sont, en effet, résolubles l'un et l'autre par rapport aux variables (anciennes) et aux quantités (inconnues et dérivées de Σ) dont la cote ne surpasse pas C.

mules ${}^{(C)}K$ ne peuvent manquer de vérifier constamment le système ${}^{(C)}S$. Si l'on désigne alors par ${}^{(C)}p$ le nombre des dérivées principales du système S dont la cote ne surpasse pas C, et si l'on extrait de ${}^{(C)}S$ (conformément à l'hypothèse C du n° 162) un groupe partiel résoluble par rapport aux ${}^{(C)}p$ dérivées dont il s'agit, les formules ${}^{(C)}K$, en nombre ${}^{(C)}q + {}^{(C)}p$, vérifieront en particulier le groupe partiel; et comme ce dernier, composé de ${}^{(C)}p$ équations, est réduit, elles en fourniront (n° 140) la solution *générale*, à plus forte raison celle du groupe total ${}^{(C)}S$. Il en résulte, puisque C est quelconque, que le système S est passif (n° 162).

III. L'exactitude de notre énoncé général résulte du simple rapprochement des alinéas I et II.

167. Considérons un système différentiel, S, satisfaisant aux trois conditions ci-après :

A. Le système S *est résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et les seconds membres y sont indépendants de toute dérivée principale.*

B. En attribuant, dans toutes les équations du système, aux variables indépendantes des cotes respectives toutes égales à 1, *et aux inconnues des cotes respectives convenablement choisies, chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues et dérivées) dont la cote ne surpasse pas celle du premier membre correspondant.*

Il est clair, d'ailleurs, que cette deuxième condition, supposée vérifiée, ne cesse pas de l'être lorsqu'on augmente d'un même entier quelconque, positif ou négatif, les cotes de toutes les inconnues.

C. En désignant par δ *et* Δ *les cotes respectivement minima et maxima des premiers membres de* S, *on peut, des groupes*

$$S_\delta,\quad S_{\delta+1},\quad \ldots,\quad S_\Delta$$

du système S *prolongé* (n° 144), *extraire respectivement des groupes,*

$$t_\delta,\quad t_{\delta+1},\quad \ldots,\quad t_\Delta,$$

possédant la double propriété de se composer d'équations en nombres respectivement égaux à ceux des dérivées principales

de cotes

$$\delta, \quad \delta+1, \quad \ldots, \quad \Delta,$$

et d'être successivement résolubles par rapport à ces dérivées.

En d'autres termes, nous supposons que le déterminant différentiel de l'ensemble de ces groupes par rapport à l'ensemble de ces dérivées n'est pas identiquement nul, et nous nous assujettissons à ne considérer les diverses quantités dont il dépend que dans les limites où sa valeur numérique reste différente de zéro.

Dans un système ainsi défini, considérons un groupe d'intégrales ordinaires *hypothétiques* répondant à des conditions initiales données. Cela étant, *si les valeurs numériques initiales choisies pour les quantités qui figurent dans les seconds membres de* S *satisfont* (en outre de celle qu'exige déjà la condition C) *à certaines restrictions d'inégalité :*

1° *Pour toute valeur de l'entier* (*algébrique*) C *supérieure à* Δ, *tout groupe partiel,* t_C, *extrait de* S_C *sous la seule condition d'avoir pour premiers membres* (*sans omission ni répétition*) *les diverses dérivées principales de cote* C, *est résoluble par rapport à ces dernières.*

2° *Les développements* (*bien déterminés*) *construits à l'aide des valeurs initiales données et de celles que fournit la résolution successive des groupes*

$$t_\delta, \quad t_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad t_\Delta, \quad t_{\Delta+1}, \quad t_{\Delta+2}, \quad \ldots$$

sont convergents.

I. Considérons un système de q équations du premier degré à q inconnues, par exemple, de trois équations du premier degré à trois inconnues, ayant la forme suivante :

$$(2) \qquad \begin{cases} x = ay + bz + c, \\ y = ex + fz + k, \\ z = mx + ny + p. \end{cases}$$

En même temps que (2), considérons le système

$$(3) \qquad \begin{cases} x = Ay + Bz + C \quad (^1), \\ y = Ex + Fz + K, \\ z = Mx + Ny + P, \end{cases}$$

---

(1) Le sens que nous attribuons ici à la notation C n'a, bien entendu, rien de commun avec celui qu'elle possède dans notre énoncé général.

et supposons :

1° Que le Tableau

$$(4)\qquad \begin{cases} A, & B, & C, \\ E, & F, & K, \\ M, & N, & P \end{cases}$$

ait tous ses éléments *positifs ou nuls*, ceux de la dernière colonne de droite étant tous *positifs;*

2° Que, dans le Tableau

$$\begin{matrix} a, & b, & c, \\ e, & f, & k, \\ m, & n, & p, \end{matrix}$$

les éléments aient leurs modules respectivement *inférieurs ou égaux* aux éléments correspondants du Tableau (4);

3° Que le système (3) admette une solution, (X, Y, Z), en nombres *positifs*.

Cela étant, *le système* (2) *est nécessairement résoluble par rapport à* x, y, z, *et les valeurs de ces variables qui le vérifient ont des modules respectivement inférieurs ou égaux à* X, Y, Z.

Je dis d'abord que le système (2) admet certainement quelque solution, (x', y', z'), satisfaisant aux relations

$$\operatorname{mod} x' \leqq X, \qquad \operatorname{mod} y' \leqq Y, \qquad \operatorname{mod} z' \leqq Z.$$

Considérons, en effet, les équations (3), et calculons pour x, y, z des systèmes de valeurs successifs,

$$(X_0, Y_0, Z_0), \quad (X_1, Y_1, Z_1), \quad (X_2, Y_2, Z_2), \quad \ldots,$$

de la façon suivante :

$$(5)\qquad \begin{cases} X_0 = C, \\ Y_0 = K, \\ Z_0 = P; \\ X_1 = AY_0 + BZ_0 + C, \\ Y_1 = EX_0 + FZ_0 + K, \\ Z_1 = MX_0 + NY_0 + P; \\ X_2 = AY_1 + BZ_1 + C, \\ Y_2 = EX_1 + FZ_1 + K, \\ Z_2 = MX_1 + NY_1 + P; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ X_{r+1} = AY_r + BZ_r + C, \\ Y_{r+1} = EX_r + FZ_r + K, \\ Z_{r+1} = MX_r + NY_r + P; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Je dis d'abord que les valeurs positives variables X_r, Y_r, Z_r tendent, *sans jamais décroître,* vers des limites, X', Y', Z', satisfaisant aux relations

$$(6) \qquad X' \leqq X, \qquad Y' \leqq Y, \qquad Z' \leqq Z.$$

Observons, en effet, que si l'on a, entre des valeurs positives, les relations

$$X'' \leqq X''', \qquad Y'' \leqq Y''', \qquad Z'' \leqq Z''',$$

on a forcément aussi, puisque les coefficients A, B, ... sont tous positifs,

$$\begin{aligned} AY'' + BZ'' + C &\leqq AY''' + BZ''' + C, \\ EX'' + FZ'' + K &\leqq EX''' + FZ''' + K, \\ MX'' + NY'' + P &\leqq MX''' + NY''' + P. \end{aligned}$$

Or, on a évidemment (puisque $X_0 = C$, $Y_0 = K$, $Z_0 = P$)

$$o \leqq X_0, \qquad o \leqq Y_0, \qquad o \leqq Z_0,$$

et, d'autre part, à cause des relations

$$\begin{aligned} X &= AY + BZ + C, \\ Y &= EX + FZ + K, \\ Z &= MX + NY + P \end{aligned}$$

et de la nature positive de toutes les quantités qui y figurent,

$$X \geqq C = X_0, \qquad Y \geqq K = Y_0, \qquad Z \geqq P = Z_0,$$

d'où

$$o \leqq X_0 \leqq X, \qquad o \leqq Y_0 \leqq Y, \qquad o \leqq Z_0 \leqq Z;$$

il en résulte, à cause de notre remarque,

$$C \leqq AY_0 + BZ_0 + C \leqq AY + BZ + C,$$

c'est-à-dire

$$X_0 \leqq X_1 \leqq X,$$

et de même

$$\begin{aligned} Y_0 &\leqq Y_1 \leqq Y, \\ Z_0 &\leqq Z_1 \leqq Z. \end{aligned}$$

Une nouvelle application de la remarque donnera

$$AY_0 + BZ_0 + C \leqq AY_1 + BZ_1 + C \leqq AY + BZ + C,$$

c'est-à-dire

$$X_1 \leqq X_2 \leqq X,$$

et de même

$$Y_1 \leqq Y_2 \leqq Y,$$
$$Z_1 \leqq Z_2 \leqq Z.$$

Ce raisonnement peut être continué indéfiniment, et l'on a, dès lors, quel que soit r,

$$X_r \leqq X_{r+1} \leqq X,$$
$$Y_r \leqq Y_{r+1} \leqq Y,$$
$$Z_r \leqq Z_{r+1} \leqq Z.$$

Donc, X_r, Y_r, Z_r tendent bien, sans jamais décroître, vers des limites positives, X', Y', Z', satisfaisant aux relations (6).

D'après cela, la série formée avec les différences successives

$$(X_0 - 0) + (X_1 - X_0) + (X_2 - X_1) + \ldots + (X_{r+1} - X_r) + \ldots$$

a ses termes tous positifs et une somme égale à X'; de même, les deux séries

$$(Y_0 - 0) + (Y_1 - Y_0) + (Y_2 - Y_1) + \ldots + (Y_{r+1} - Y_r) + \ldots,$$
$$(Z_0 - 0) + (Z_1 - Z_0) + (Z_2 - Z_1) + \ldots + (Z_{r+1} - Z_r) + \ldots$$

ont leurs termes tous positifs et des sommes respectivement égales à Y', Z'. Observons enfin qu'en vertu de (5) ces différences satisfont aux relations suivantes :

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l}
X_0 - 0 = C, \\
Y_0 - 0 = K, \\
Z_0 - 0 = P; \\
X_1 - X_0 = A(Y_0 - 0) + B(Z_0 - 0), \\
Y_1 - Y_0 = E(X_0 - 0) + F(Z_0 - 0), \\
Z_1 - Z_0 = M(X_0 - 0) + N(Y_0 - 0); \\
X_2 - X_1 = A(Y_1 - Y_0) + B(Z_1 - Z_0), \\
Y_2 - Y_1 = E(X_1 - X_0) + F(Z_1 - Z_0), \\
Z_2 - Z_1 = M(X_1 - X_0) + N(Y_1 - Y_0); \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\
X_{r+1} - X_r = A(Y_r - Y_{r-1}) + B(Z_r - Z_{r-1}), \\
Y_{r+1} - Y_r = E(X_r - X_{r-1}) + F(Z_r - Z_{r-1}), \\
Z_{r+1} - Z_r = M(X_r - X_{r-1}) + N(Y_r - Y_{r-1}); \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Considérons maintenant le système (2), et calculons pour x, y, z

des systèmes de valeurs successifs,

$$(x_0, y_0, z_0),\quad (x_1, y_1, z_1),\quad (x_2, y_2, z_2),\quad \ldots,$$

de la façon suivante :

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} x_0 = c, \\ y_0 = k, \\ z_0 = p; \\ x_1 = a y_0 + b z_0 + c, \\ y_1 = e x_0 + f z_0 + k, \\ z_1 = m x_0 + n y_0 + p; \\ x_2 = a y_1 + b z_1 + c, \\ y_2 = e x_1 + f z_1 + k, \\ z_2 = m x_1 + n y_1 + p; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ x_{r+1} = a y_r + b z_r + c, \\ y_{r+1} = e x_r + f z_r + k, \\ z_{r+1} = m x_r + n y_r + p; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \end{array}\right.$$

Aux équations (8) on peut évidemment substituer les suivantes :

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} x_0 - 0 = c, \\ y_0 - 0 = k, \\ z_0 - 0 = p; \\ x_1 - x_0 = a(y_0 - 0) + b(z_0 - 0), \\ y_1 - y_0 = e(x_0 - 0) + f(z_0 - 0), \\ z_1 - z_0 = m(x_0 - 0) + n(y_0 - 0); \\ x_2 - x_1 = a(y_1 - y_0) + b(z_1 - z_0), \\ y_2 - y_1 = e(x_1 - x_0) + f(z_1 - z_0), \\ z_2 - z_1 = m(x_1 - x_0) + n(y_1 - y_0); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ x_{r+1} - x_r = a(y_r - y_{r-1}) + b(z_r - z_{r-1}), \\ y_{r+1} - y_r = e(x_r - x_{r-1}) + f(z_r - z_{r-1}), \\ z_{r+1} - z_r = m(x_r - x_{r-1}) + n(y_r - y_{r-1}); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Si l'on compare, groupe par groupe, les relations (9) aux relations (7), on en tire successivement, puisque les modules de a,

b, ... sont respectivement inférieurs ou égaux à A, B, ...,

$$\begin{aligned}
&\bmod(x_0 - 0) \leqq X_0 - 0,\\
&\bmod(y_0 - 0) \leqq Y_0 - 0,\\
&\bmod(z_0 - 0) \leqq Z_0 - 0,
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
&\bmod(x_1 - x_0) \leqq X_1 - X_0,\\
&\bmod(y_1 - y_0) \leqq Y_1 - Y_0,\\
&\bmod(z_1 - z_0) \leqq Z_1 - Z_0,
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
&\bmod(x_2 - x_1) \leqq X_2 - X_1,\\
&\bmod(y_2 - y_1) \leqq Y_2 - Y_1,\\
&\bmod(z_2 - z_1) \leqq Z_2 - Z_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et, d'une manière générale,

$$\begin{aligned}
&\bmod(x_{r+1} - x_r) \leqq X_{r+1} - X_r,\\
&\bmod(y_{r+1} - y_r) \leqq Y_{r+1} - Y_r,\\
&\bmod(z_{r+1} - z_r) \leqq Z_{r+1} - Z_r.
\end{aligned}$$

Il en résulte que les trois séries ayant pour termes les différences

$$\begin{aligned}
&(x_0 - 0) + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_{r+1} - x_r) + \ldots,\\
&(y_0 - 0) + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_{r+1} - y_r) + \ldots,\\
&(z_0 - 0) + (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \ldots + (z_{r+1} - z_r) + \ldots
\end{aligned}$$

sont absolument convergentes, et que leurs sommes, x', y', z', vérifient les relations

$$\bmod x' \leqq X', \qquad \bmod y' \leqq Y', \qquad \bmod z' \leqq Z',$$

à plus forte raison les relations

$$\bmod x' \leqq X, \qquad \bmod y' \leqq Y, \qquad \bmod z' \leqq Z; \tag{10}$$

en d'autres termes, les variantes x_r, y_r, z_r sont convergentes, et leurs limites x', y', z' vérifient les relations (10).

Je dis enfin que les valeurs x', y', z' vérifient les relations (2). Si l'on considère, en effet, parmi les groupes (8), le groupe général

$$\begin{aligned}
x_{r+1} &= a y_r + b z_r + c,\\
y_{r+1} &= e x_r + f z_r + k,\\
z_{r+1} &= m x_r + n y_r + p,
\end{aligned}$$

le passage à la limite pour r infini donne

$$\begin{aligned} x' &= ay' + bz' + c, \\ y' &= ex' + fz' + k, \\ z' &= mx' + ny' + p. \end{aligned}$$

Ainsi, le système (2) admet bien quelque solution, (x', y', z'), satisfaisant aux relations

$$\operatorname{mod} x' \leqq X, \qquad \operatorname{mod} y' \leqq Y, \qquad \operatorname{mod} z' \leqq Z;$$

il reste à démontrer que cette solution est unique.

Effectivement, si elle ne l'était pas, le système (2) serait indéterminé, et l'une de ses équations, la première par exemple, serait une conséquence des autres. En désignant donc par λ et μ des constantes convenablement choisies, on aurait, entre les coefficients

$$\begin{matrix} -1, & a, & b, & c, \\ e, & -1, & f, & k, \\ m, & n, & -1, & p \end{matrix}$$

du système (2), les relations

$$(11) \qquad \begin{cases} -1 = \lambda e + \mu m, \\ a = -\lambda + \mu n, \\ b = \lambda f - \mu, \\ c = \lambda k + \mu p. \end{cases}$$

Or, le coefficient c ayant un module inférieur ou égal à la constante *positive* C, il existe évidemment quelque valeur, c', satisfaisant à la double condition d'être différente de c et d'avoir un module inférieur à C ([1]). Cela étant, si, dans le système (2), on remplace c par c' *sans toucher aux autres coefficients,* le système résultant est incompatible, puisque les trois premières relations (11) ne cessent pas d'être vérifiées, mais que l'on a, au contraire,

$$c' \neq \lambda k + \mu p.$$

D'autre part, puisque le module de c' est inférieur à C, les hypo-

---

([1]) Effectivement, si $c = 0$, on pourra prendre pour c' une quantité quelconque de module inférieur à C et supérieur à zéro; si c n'est pas nul, on pourra prendre pour c' une quantité quelconque dont le module soit inférieur à celui de c.

thèses posées au début du présent alinéa I continuent à être toutes vérifiées, et le même système admet, en vertu de la démonstration ci-dessus, quelque solution en x, y, z, ce qui est contradictoire.

II. Considérons, au lieu du système S, le système $S_{\Delta+1}$, que nous désignerons aussi par (S). Il est clair que, dans les deux systèmes S et (S), la répartition des dérivées des fonctions inconnues en principales et paramétriques est la même, à cela près que les dérivées principales du système S dont la cote tombait au-dessous de $\Delta+1$ sont devenues paramétriques dans le système (S); et si, dans les deux systèmes

S prolongé, (S) prolongé

(n° 99), on partage les relations en groupes successifs d'après leur cote croissante, cette suite illimitée de groupes est la même de part et d'autre, à cela près que, dans le système (S) prolongé, un certain nombre de groupes,

$$S_\delta, \quad S_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad S_\Delta,$$

ont disparu en tête de la liste. Au lieu donc d'imposer aux intégrales hypothétiques de S les conditions initiales choisies, il revient au même, pour la démonstration de notre énoncé général, d'imposer à celles de (S) des conditions initiales identiques, en ayant soin seulement de prendre, pour les anciennes dérivées principales devenues paramétriques, les valeurs initiales calculées à l'aide des groupes

$$t_\delta, \quad t_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad t_\Delta.$$

On peut maintenant, moyennant un simple changement de fonctions, remplacer le système (S) par un autre où les déterminations initiales des inconnues soient toutes identiquement nulles. Effectivement, soient I_u, I_v, ... les déterminations initiales respectives des inconnues u, v, ... dans le système (S). Nous observerons tout d'abord que, parmi les dérivées de I_u, I_v, ..., celles qui sont respectivement semblables aux dérivées principales de u, v, ... ont toutes zéro pour valeur initiale, et qu'elles sont, par suite, identiquement nulles, puisque leurs propres dérivées, nécessairement semblables à des dérivées principales de u, v, ..., ont toutes aussi pour valeur initiale zéro (n° 57); quant aux valeurs initiales de I_u, I_v, ... et de leurs dérivées restantes, elles sont précisément égales aux valeurs initiales de u, v, ... et de leurs dérivées (paramétriques) semblables.

Cela posé, effectuons dans le système (S) la transformation

$$u = \mathrm{I}_u + \mathfrak{u},$$
$$v = \mathrm{I}_v + \mathfrak{v},$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$

où $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, ... désignent de nouvelles fonctions inconnues, et soit $(\mathfrak{S})$ le système ainsi obtenu : de la remarque faite ci-dessus il résulte évidemment que le système $(\mathfrak{S})$ prolongé peut se déduire de (S) prolongé en remplaçant les dérivées principales de u, v, ... par les dérivées semblables de $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, ..., puis les fonctions u, v, ... et leurs dérivées paramétriques par les sommes $\mathrm{I}_u + \mathfrak{u}$, $\mathrm{I}_v + \mathfrak{v}$, ... et les dérivées semblables de ces sommes. Les deux systèmes (S) et $(\mathfrak{S})$ ont donc, sauf le changement de u, v, ... en $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, ..., les mêmes premiers membres, et les dérivées des fonctions inconnues s'y répartissent de la même manière en principales et paramétriques ; d'ailleurs, si aux intégrales hypothétiques $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, ..., de $(\mathfrak{S})$ on impose des déterminations initiales identiquement nulles, il est clair que les valeurs numériques initiales prises, dans le système (S), par les intégrales hypothétiques u, v, ..., qui correspondent aux déterminations initiales I_u, I_v, ..., et par leurs dérivées paramétriques de tous ordres, sont respectivement égales aux valeurs numériques initiales prises, dans le système $(\mathfrak{S})$, par les sommes $\mathrm{I}_u + \mathfrak{u}$, $\mathrm{I}_v + \mathfrak{v}$, ... et les dérivées semblables de ces sommes.

Cela étant, conservons aux variables x, y, ..., dans le système $(\mathfrak{S})$, les cotes respectives, toutes égales à 1, qu'elles avaient dans les systèmes S et (S), et attribuons aux nouvelles fonctions inconnues $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, ... les mêmes cotes respectives qu'aux anciennes correspondantes u, v, ... Considérons d'autre part, dans les systèmes (S) prolongé et $(\mathfrak{S})$ prolongé, deux relations correspondantes, et désignons par C leur cote commune (supérieure ou égale à $\Delta + 1$) : de diverses remarques déjà faites il résulte que toutes deux sont linéaires par rapport aux dérivées (tant principales que paramétriques) de cote C, que, dans la première, les coefficients de ces dérivées dépendent exclusivement des variables x, y, ..., des inconnues u, v, ... et des quelques dérivées paramétriques figurant dans les seconds membres du système primitif S, et que, dans la seconde, les coefficients dont il s'agit ont respectivement les mêmes valeurs initiales que dans la première. Finalement, si, dans chacune des deux relations considé-

rées, nous remplaçons par les valeurs numériques initiales qui leur conviennent respectivement les variables indépendantes $x, y, \ldots$, les intégrales hypothétiques ($u, v, \ldots$ ou $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \ldots$, suivant qu'il s'agit de l'une ou de l'autre relation), et leurs dérivées paramétriques de tous ordres, les deux relations ainsi obtenues (où ne figurent plus que des dérivées principales) seront identiques l'une à l'autre.

En conséquence, il suffit, pour établir notre énoncé général, d'établir le double point suivant :

Si, dans les seconds membres de ($\mathfrak{S}$), *les coefficients des dérivées* (*tant principales que paramétriques*) *de cote* $\Delta + 1$ *ont des valeurs initiales satisfaisant à certaines restrictions d'inégalité :*

1° *Pour toute valeur de l'entier* (*algébrique*) C *supérieure à* Δ, *tout groupe partiel,* $(\mathfrak{t})_C$, *extrait de* $(\mathfrak{S})_C$ *sous la seule condition d'avoir pour premiers membres* (*sans omission ni répétition*) *les diverses dérivées principales de cote* C, *est résoluble par rapport à ces dernières.*

2° *Les développements* (*bien déterminés*) *construits à l'aide des déterminations initiales données* (*toutes identiquement nulles*) *et des valeurs initiales que fournit, pour les dérivées principales de cotes* $\Delta + 1$, $\Delta + 2$, ..., *la résolution successive des groupes*

$$(\mathfrak{t})_{\Delta+1}, \quad (\mathfrak{t})_{\Delta+2}, \quad \ldots,$$

sont nécessairement convergents.

Effectivement, si le premier de ces deux points est exact, le groupe qui correspond à $(\mathfrak{t})_C$ dans le système (S) prolongé sera lui-même résoluble par rapport aux dérivées principales de cote C de $u, v, \ldots$, et, dès lors, le groupe désigné par t_C dans notre énoncé général jouira aussi de cette propriété. D'ailleurs, si aux variables, aux intégrales hypothétiques et à leur dérivées paramétriques, on attribue les valeurs initiales qui leur conviennent respectivement dans les systèmes ($\mathfrak{S}$) et (S), les groupes correspondants $(\mathfrak{t})_C$ et t_C deviennent, comme nous l'avons vu, identiques l'un à l'autre, en sorte que la résolution successive, soit des groupes

$$(\mathfrak{t})_{\Delta+1}, \quad (\mathfrak{t})_{\Delta+2}, \quad \ldots,$$

soit des groupes

$$t_{\Delta+1}, \quad t_{\Delta+2}, \quad \ldots,$$

fournit, pour les dérivées principales semblables, les mêmes valeurs initiales : si donc, dans les développements construits de part et d'autres à l'aide des valeurs initiales tant données que calculées, on fait abstraction des portions (convergentes) formées par les déterminations initiales, les portions restantes sont respectivement identiques de part et d'autre, et la convergence, lorsqu'elle a lieu d'un côté, ne peut manquer d'avoir lieu de l'autre.

Ainsi, *nous nous trouvons ramené à établir le double point formulé ci-dessus dans le présent alinéa* II.

III. *Voir* l'alinéa XI du n° **114**.

IV. *Voir* l'alinéa XII du n° **114**.

V. *Voir* l'alinéa XIII du n° **114**.

VI. *Voir* l'alinéa XIV du n° **114** ([1]).

VII. *Si, par un choix convenable de la constante* ε $\left(\textit{moindre que } \frac{1}{3}\right)$ *et des constantes*

$$(12) \qquad \xi,\ \eta,\ \ldots,\ \upsilon',\ \psi',\ \ldots,\ \upsilon'',\ \psi'',\ \ldots,\ \upsilon''',\ \psi''',\ \ldots,$$

on peut faire en sorte que, dans les seconds membres de $((\mathfrak{S}))$, *les caractéristiques dépendant de* ε *soient respectivement supérieures aux modules des valeurs numériques initiales que prennent, dans les seconds membres de* $(\mathfrak{S})$, *les coefficients des dérivées dominantes, la double circonstance spécifiée à l'alinéa* II *se trouve réalisée.*

En rapprochant de notre hypothèse actuelle les conclusions de l'alinéa précédent, on voit que la constante ε, les constantes (12) et la constante μ peuvent être déterminées de telle façon que les coefficients des seconds membres de $((\mathfrak{S}))$ soient respectivement majorants pour ceux de $(\mathfrak{S})$. Cela fait, rappelons-nous que les valeurs initiales imposées dans le système $(\mathfrak{S})$ aux inconnues et à leurs dérivées paramétriques de tous ordres sont nulles, tandis que les valeurs

([1]) Nous ferons usage ci-après (VII, VIII et IX) de diverses notations définies dans le alinéas XI, XII, XIII et XIV du n° 114 : il est donc indispensable, pour l'intelligence de la démonstration actuelle, de se reporter au texte de ces alinéas.

initiales prises par les intégrales effectives dont nous avons constaté l'existence dans le système $((\mathfrak{S}))$ et par leurs dérivées paramétriques sont positives ou nulles.

Observons maintenant que, dans les deux systèmes

$$(\mathfrak{S}) \text{ prolongé}, \quad ((\mathfrak{S})) \text{ prolongé},$$

les relations se correspondent chacune à chacune. Considérons alors deux relations correspondantes. Dans la première [celle qui provient de $(\mathfrak{S})$ prolongé], le premier membre est une certaine dérivée principale des intégrales hypothétiques de $(\mathfrak{S})$, et le second membre une somme de produits pouvant contenir comme facteurs quatre sortes de quantités, savoir : certains entiers positifs; certains coefficients des seconds membres de $(\mathfrak{S})$; certaines dérivées partielles de ces coefficients; enfin certaines dérivées, principales ou paramétriques, des intégrales hypothétiques de $(\mathfrak{S})$. Si de cette relation [provenant de $(\mathfrak{S})$ prolongé] on passe à la relation correspondante [provenant de $((\mathfrak{S}))$ prolongé], cette dernière est composée exactement de la même façon avec les dérivées principales ou paramétriques des intégrales effectives de $((\mathfrak{S}))$, les entiers positifs dont nous venons de parler, les majorantes des coefficients de $(\mathfrak{S})$, et les dérivées partielles de ces majorantes.

Cela étant, considérons, dans $(\mathfrak{S})$ prolongé, les groupes successifs

$$(\mathfrak{t})_{\Delta+1}, \quad (\mathfrak{t})_{\Delta+2}, \quad \ldots,$$

dont il est question à l'alinéa II, et, dans $((\mathfrak{S}))$ prolongé, les groupes *correspondants,*

$$((\mathfrak{t}))_{\Delta+1}, \quad ((\mathfrak{t}))_{\Delta+2}, \quad \ldots.$$

Si, dans les groupes

$$(\mathfrak{t})_{\Delta-1}, \quad ((\mathfrak{t}))_{\Delta+1},$$

on remplace par les valeurs initiales qui leur conviennent respectivement de part et d'autre les variables, les inconnues et leurs dérivées paramétriques, chacun des groupes résultants, à l'aide desquels on cherche à déterminer de part et d'autre les valeurs initiales des dérivées principales de cote $\Delta + 1$, aura pour premiers membres (sans

omission ni répétition) les dérivées principales dont il s'agit, et pour seconds membres des fonctions linéaires de ces dérivées principales (aucun des premiers membres ne figurant dans le second membre correspondant); si l'on compare d'ailleurs les coefficients de ces fonctions linéaires dans les deux groupes, on voit que, dans le second groupe, les coefficients (positifs) sont supérieurs aux modules des coefficients du premier groupe, et que les termes indépendants y sont tous supérieurs à zéro; enfin, il est clair que le second groupe admet une solution en nombres positifs $\Big[$à savoir les valeurs initiales des dérivées principales de cote $\Delta + 1$ des intégrales effectives de $\big((\mathfrak{S})\big)\Big]$. Si donc on applique la proposition de l'alinéa I, on voit que le premier groupe est résoluble par rapport aux dérivées principales de cote $\Delta + 1$ des intégrales hypothétiques de $(\mathfrak{S})$, et que les valeurs numériques ainsi obtenues ont des modules respectivement inférieurs aux valeurs initiales (positives) prises par les dérivées semblables des intégrales effectives de $\big((\mathfrak{S})\big)$.

Cela étant, considérons les groupes

$$(t)_{\Delta+2}, \quad \big((t)\big)_{\Delta+2},$$

et, dans ces deux groupes, remplaçons les variables, les inconnues et les dérivées paramétriques par les valeurs initiales qui leur conviennent respectivement de part et d'autre, puis les dérivées principales de cote $\Delta + 1$ par les valeurs numériques respectivement obtenues comme il vient d'être dit. Chacun des groupes résultants, à l'aide desquels on cherche à déterminer de part et d'autre les valeurs initiales des dérivées principales de cote $\Delta + 2$, aura pour premiers membres (sans omission ni répétition) les dérivées principales dont il s'agit, et pour seconds membres des fonctions linéaires de ces dérivées principales (aucun des premiers membres ne figurant dans le second membre correspondant); si l'on compare d'ailleurs les coefficients de ces fonctions linéaires dans les deux groupes, on voit, par tout ce qui précède, que, dans le second groupe, ces coefficients (positifs) sont supérieurs aux modules des coefficients du premier groupe, et que les termes indépendants y sont tous supérieurs à zéro; enfin, il est clair que le second groupe admet une solution en nombres positifs $\Big[$à savoir les valeurs initiales des dérivées principales de cote $\Delta + 2$ des intégrales

effectives de $((\mathfrak{S}))$]. Si donc on applique la proposition de l'alinéa I, on voit que le premier groupe est résoluble par rapport aux dérivées principales de cote $\Delta + 2$ des intégrales hypothétiques de $(\mathfrak{S})$, et que les valeurs numériques ainsi obtenues ont des modules respectivement inférieurs aux valeurs initiales (positives) prises par les dérivées semblables des intégrales effectives de $((\mathfrak{S}))$.

Et ainsi de suite indéfiniment.

Ainsi, les groupes

$$(t)_{\Delta+1}, \quad (t)_{\Delta+2}, \quad \ldots$$

sont bien, comme nous l'avions annoncé, successivement résolubles par rapport aux dérivées principales de cotes

$$\Delta + 1, \quad \Delta + 2, \quad \ldots.$$

En outre, les développements (déterminés) construits à l'aide des valeurs initiales données et de celles que fournit cette résolution successive ont des coefficients dont les modules sont respectivement inférieurs aux coefficients correspondants (positifs) des développements des intégrales *effectives* de $((\mathfrak{S}))$: par suite, ils sont, comme ces derniers, nécessairement convergents.

VIII. *Si, dans les seconds membres de* $(\mathfrak{S})$, *les modules initiaux des coefficients des dérivées dominantes satisfont à certaines inégalités, on peut attribuer, d'une part à la constante* ε $\left(\textit{moindre que } \frac{1}{3}\right)$, *d'autre part aux constantes* (12), *des valeurs telles, que, dans le système* $((\mathfrak{S}))$, *les caractéristiques dépendant de* ε *soient respectivement supérieures aux modules initiaux dont il s'agit.*

Il est tout d'abord évident que, si ces modules initiaux sont suffisamment petits, on pourra faire en sorte que les caractéristiques dépendant de ε leur soient respectivement supérieures : il suffit, en effet, pour que cette circonstance se réalise, d'attribuer à ε une valeur positive quelconque moindre que $\frac{1}{3}$, aux quantités (12) des valeurs positives quelconques, et d'assujettir ensuite les modules initiaux dont nous parlons à être respectivement inférieurs aux valeurs ainsi obtenues pour les caractéristiques dépendant de ε.

Plus généralement, écrivons que les caractéristiques dépendant de ε sont respectivement supérieures aux modules initiaux, et que ε est inférieur à $\frac{1}{3}$, et formons un ensemble de conditions suffisantes pour que ces inégalités puissent être vérifiées par un choix convenable des quantités (12) et de ε : nous tomberons ainsi sur certaines inégalités subsistant entre les modules initiaux.

IX. Du simple rapprochement des alinéas II, VII et VIII résulte immédiatement la conclusion suivante :

Les conditions A, B et C (du présent n° 167) *étant supposées satisfaites, pour que la double circonstance spécifiée dans notre énoncé général se trouve réalisée, il suffit que les valeurs initiales choisies pour les diverses quantités qui figurent dans les seconds membres de* S *satisfassent* (en outre de celle qu'impose déjà la condition *C*) *à certaines restrictions d'inégalité.*

Notre démonstration même indique comment ces inégalités doivent être formées.

On considère, à cet effet, les deux systèmes ci-dessus désignés par $(\mathfrak{S})$ et $((\mathfrak{S}))$; dans l'un et l'autre de ces deux systèmes, on ne conserve que la partie linéaire et homogène par rapport aux dérivées dominantes, et l'on suppose, dans $(\mathfrak{S})$, les coefficients de ces dérivées remplacés par leurs valeurs initiales, qui sont respectivement les mêmes que dans (S) [II]. Désignant ensuite par h le nombre des catégories en lesquelles se partagent les inconnues suivant les valeurs de leurs cotes, et augmentant, s'il le faut, d'un même entier négatif les cotes de toutes les inconnues, afin que les poids de ces inconnues et de leurs dérivées secondaires, définis à l'alinéa V, soient tous de degré supérieur à zéro par rapport à l'ensemble des quantités (12), on écrit, d'une part, que la constante ε est moindre que $\frac{1}{h}$, d'autre part, que, dans les seconds membres de $(\mathfrak{S})$, les coefficients des dérivées dominantes ont des modules initiaux respectivement inférieurs aux caractéristiques des coefficients correspondants du système $((\mathfrak{S}))$; on forme enfin, entre ces modules initiaux, un ensemble de conditions suffisantes pour que les relations ainsi écrites puissent être vérifiées par un choix convenable de ε et des quantités (12). Les

inégalités résultantes (jointes à celle qu'a antérieurement fournie la condition C) sont celles qu'il s'agissait de former.

168. Troisième théorème d'existence. — Considérons un système différentiel, S, satisfaisant à la double condition ci-après :

1° *Le système* S *est résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et les dérivées dont il s'agit appartiennent respectivement à des inconnues toutes différentes; les seconds membres sont d'ailleurs indépendants de toute dérivée principale.*

2° *En attribuant, dans toutes les équations du système, aux variables des cotes respectives toutes égales à* 1, *et aux inconnues des cotes respectives convenablement choisies, chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues et dérivées) dont la cote ne surpasse pas celle du premier membre correspondant.*

Cela étant, et dans les limites où les valeurs initiales choisies pour les quantités qui figurent dans les seconds membres de S *satisfont à certaines restrictions d'inégalité, le système dont il s'agit est complètement intégrable.*

Effectivement, le groupe général, S_C, de la suite

$$(13) \qquad S_\delta,\quad S_{\delta+1},\quad \ldots,\quad S_C,\quad \ldots$$

contient, en pareil cas, un nombre d'équations *précisément égal* au nombre des dérivées principales de cote C. Cela étant, choisissons d'une façon arbitraire les conditions initiales imposées aux intégrales hypothétiques, en assujettissant simplement les valeurs initiales des diverses quantités qui figurent dans les seconds membres de S :

1° *A ce que les groupes*

$$S_\delta,\quad S_{\delta+1},\quad \ldots,\quad S_\Delta$$

soient résolubles chacun par rapport aux dérivées principales de cote égale à son indice, c'est-à-dire à ce que la restriction d'inégalité imposée par la condition C du n° 167 se trouve satisfaite;

2° *A ce que les restrictions d'inégalité spécifiées dans l'alinéa* IX *du n°* 167 *le soient également.*

Il résulte alors de la proposition qui vient d'être établie (n° 167) que les groupes (13), où l'on suppose remplacées par les valeurs initiales données les variables, les inconnues et leurs dérivées paramétriques de tous ordres, sont successivement résolubles par rapport aux dérivées principales de cotes

$$\delta,\quad \delta+1,\quad \ldots,\quad C,\quad \ldots,$$

et que les développements (uniques) construits à l'aide des valeurs initiales, tant données que calculées, sont de toute nécessité convergents : leurs sommes fournissent donc des intégrales *effectives* du système proposé S.

169. Appliquons ce résultat à l'équation très simple

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{14}$$

qui remplit la double condition énoncée au début du n° 168, ainsi qu'on le voit en attribuant à x, y, u les cotes respectives 1, 1, c, où c désigne un entier positif ou négatif choisi comme on voudra. Cela étant, si l'on désigne par A et B les dérivées partielles du second membre de (14) par rapport à $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ respectivement, puis par A_0 et B_0 les valeurs numériques initiales de A et B, le système ($\mathfrak{S}$), réduit à sa partie linéaire et homogène par rapport aux dérivées dominantes, et après substitution aux coefficients de ces dernières de leurs valeurs initiales, prend la forme

$$\tag{15} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^3 \mathfrak{u}}{\partial x^2\,\partial y} &= A_0\frac{\partial^3 \mathfrak{u}}{\partial x^3} + B_0\frac{\partial^3 \mathfrak{u}}{\partial x\,\partial y^2} + \ldots, \\ \frac{\partial^3 \mathfrak{u}}{\partial x\,\partial y^2} &= A_0\frac{\partial^3 \mathfrak{u}}{\partial x^2\,\partial y} + B_0\frac{\partial^3 \mathfrak{u}}{\partial y^3} + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Le nombre h des catégories d'inconnues est ici égal à 1 ; on peut d'ailleurs supposer la cote c de l'inconnue u choisie de telle façon, qu'en désignant par ξ, η, υ^{-c}, comme il a été vu à l'alinéa V du n° 167, les poids respectifs de x, y, $\mathfrak{u}$, les poids

$$\upsilon^{-c},\quad \frac{\upsilon^{-c}}{\xi},\quad \frac{\upsilon^{-c}}{\eta},\quad \frac{\upsilon^{-c}}{\xi^2},\quad \frac{\upsilon^{-c}}{\xi\eta},\quad \frac{\upsilon^{-c}}{\eta^2}$$

de l'inconnue $\mathfrak{u}$ et de ses dérivées secondaires $\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 \mathfrak{u}}{\partial y^2}$

soient de degré supérieur à zéro par rapport à l'ensemble des trois quantités ξ, η, υ (il suffit pour cela de supposer $c = -3$). Cela étant, désignons par s la somme des produits obtenus en multipliant $x - x_0$ par ξ, $y - y_0$ par η, et l'inconnue $\mathfrak{u}$ avec ses dérivées secondaires par leurs poids respectifs; posons en outre $\Theta(s) = \frac{1}{1-s}$, et formons le système

$$\begin{aligned} \frac{\upsilon^{-c}}{\xi^2\eta}\frac{\partial^3 \mathfrak{u}}{\partial x^2\,\partial y} &= \frac{\varepsilon}{2}\frac{\upsilon^{-c}}{\xi^3}\Theta(s)\frac{\partial^3 \mathfrak{u}}{\partial x^3} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\upsilon^{-c}}{\xi\eta^2}\Theta(s)\frac{\partial^3 \mathfrak{u}}{\partial x\,\partial y^2} + \ldots, \\ \frac{\upsilon^{-c}}{\xi\eta^2}\frac{\partial^3 \mathfrak{u}}{\partial x\,\partial y^2} &= \frac{\varepsilon}{2}\frac{\upsilon^{-c}}{\xi^2\eta}\Theta(s)\frac{\partial^3 \mathfrak{u}}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\upsilon^{-c}}{\eta^3}\Theta(s)\frac{\partial^3 \mathfrak{u}}{\partial y^3} + \ldots \end{aligned}$$

(où nous ne considérons non plus que la portion linéaire et homogène par rapport aux dérivées dominantes). Ce dernier devient, après réduction à l'unité des coefficients des premiers membres,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \mathfrak{u}}{\partial x^2\,\partial y} &= \frac{\varepsilon}{2}\frac{\eta}{\xi}\Theta(s)\frac{\partial^3 \mathfrak{u}}{\partial x^3} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\xi}{\eta}\Theta(s)\frac{\partial^3 \mathfrak{u}}{\partial x\,\partial y^2} + \ldots, \\ \frac{\partial^3 \mathfrak{u}}{\partial x\,\partial y^2} &= \frac{\varepsilon}{2}\frac{\eta}{\xi}\Theta(s)\frac{\partial^3 \mathfrak{u}}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\xi}{\eta}\Theta(s)\frac{\partial^3 \mathfrak{u}}{\partial y^3} + \ldots, \end{aligned}$$

et, en comparant le système $((\mathfrak{S}))$ ainsi formé au système $(\mathfrak{S})$ ou (15), nous avons à écrire les inégalités

$$\varepsilon < 1, \qquad \frac{\varepsilon}{2}\frac{\eta}{\xi} > \operatorname{mod} A_0, \qquad \frac{\varepsilon}{2}\frac{\xi}{\eta} > \operatorname{mod} B_0,$$

dont l'ensemble équivaut à

(16) $$\varepsilon < 1, \qquad \frac{2 \operatorname{mod} A_0}{\varepsilon} < \frac{\eta}{\xi} < \frac{\varepsilon}{2 \operatorname{mod} B_0}.$$

Pour que les deux dernières inégalités (16) soient compatibles, il faut et il suffit qu'on ait

(17) $$\operatorname{mod} A_0 \operatorname{mod} B_0 < \frac{\varepsilon^2}{4},$$

ce qui entraîne, à cause de $\varepsilon < 1$, la condition nécessaire

(18) $$\operatorname{mod} A_0 \operatorname{mod} B_0 < \frac{1}{4};$$

réciproquement d'ailleurs, si l'inégalité (18) est satisfaite, on pourra

trouver pour ε une valeur positive et plus petite que 1, vérifiant (17), puis pour $\frac{\eta}{\xi}$ une valeur positive vérifiant la double inégalité qui figure dans (16). La condition nécessaire et suffisante pour que les relations (16) soient compatibles est donc

$$\text{mod}(A_0 B_0) < \frac{1}{4}.$$

En conséquence, pour que l'équation aux dérivées partielles (14) admette une intégrale, et une seule, répondant à des conditions initiales données, il suffit, en désignant par A et B les dérivées partielles du second membre f par rapport à $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ respectivement, que le module initial du produit AB soit inférieur à $\frac{1}{4}$.

170. Quatrième théorème d'existence. — Considérons un système différentiel, S, remplissant les conditions ci-après :

1° *Le système* S *est résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et les seconds membres sont indépendants de toute dérivée principale; quant aux premiers membres, aucun d'entre eux n'est une dérivée de quelque autre, et deux au moins d'entre eux sont des dérivées d'une même inconnue.*

2° *En attribuant, dans toutes les équations du système, aux variables des cotes respectives toutes égales à* 1, *et aux inconnues des cotes respectives convenablement choisies, chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues et dérivées) dont la cote ne surpasse pas celle du premier membre correspondant.*

Cela étant, et dans les limites où certaines restrictions d'inégalité (concernant les valeurs initiales des variables indépendantes, des inconnues et de quelques-unes de leurs dérivées paramétriques) se trouvent satisfaites, il faut et il suffit, pour que le système S *soit complètement intégrable, qu'en attribuant aux notations* δ *et* Γ *le même sens que dans les nos* 163 *et* 166, *l'élimination des dérivées principales de cotes*

$$\delta, \quad \delta+1, \quad \ldots, \quad \Gamma+1, \quad \Gamma+2,$$

effectuée entre les équations

(19) $$S_\delta,\quad S_{\delta+1},\quad \ldots,\quad S_{\Gamma+1},\quad S_{\Gamma+2}$$

(n° 144), *conduise à des identités.*

Les restrictions d'inégalité auxquelles fait allusion notre énoncé sont les suivantes :

1° En désignant par δ, comme nous venons de l'indiquer, la cote minima des premiers membres de S, et par Δ leur cote maxima, on peut, des groupes

$$S_\delta,\quad S_{\delta+1},\quad \ldots,\quad S_\Delta$$

du système S prolongé, extraire respectivement des groupes,

$$t_\delta,\quad t_{\delta+1},\quad \ldots,\quad t_\Delta,$$

possédant la triple propriété de comprendre respectivement les groupes

$$s_\delta,\quad s_{\delta+1},\quad \ldots,\quad s_\Delta$$

du système S (n° 144), de se composer d'équations en nombres respectivement égaux à ceux des dérivées principales de cotes

$$\delta,\quad \delta+1,\quad \ldots,\quad \Delta,$$

et d'être successivement résolubles par rapport à ces dérivées.

2° Les restrictions spécifiées à l'alinéa IX du n° 167 doivent, elles aussi, se trouver satisfaites.

3° Le système du premier ordre, Σ, que l'ensemble des restrictions précédentes permet, comme nous allons le voir, de déduire de S à l'aide du mécanisme décrit au n° 159, peut, par un simple changement linéaire et homogène des variables indépendantes, suivi d'une résolution convenable, être transformé en un autre, Ω, remplissant les conditions spécifiées au n° 161.

Il résulte, en effet, des deux premières restrictions qu'en désignant par

$$t_{\Delta+1},\quad t_{\Delta+2},\quad \ldots$$

des groupes respectivement extraits de

$$S_{\Delta+1},\quad S_{\Delta+2},\quad \ldots$$

sous la seule condition d'avoir pour premiers membres (sans omission

ni répétition) les dérivées principales de cotes

$$\Delta + 1, \quad \Delta + 2, \quad \ldots,$$

les groupes

$$t_\delta, \quad t_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad t_\Delta, \quad t_{\Delta+1}, \quad t_{\Delta+2}, \quad \ldots$$

sont successivement résolubles par rapport à ces dérivées (nº 167). On peut alors, du système S, déduire un système du premier ordre, Σ, par le mécanisme indiqué au nº 159; et, cela étant, il résulte de la troisième restriction que les conditions nécessaires et suffisantes pour la passivité du système S sont celles mêmes (nº 166) que formule notre énoncé actuel relativement aux groupes (19). Ces conditions sont donc nécessaires pour que le système soit complètement intégrable; elles sont d'ailleurs suffisantes, puisque, en les supposant satisfaites, notre proposition du nº 167 assure la convergence des développements des intégrales hypothétiques répondant à des conditions initiales données (*voir* nº 103).

171. Considérons, en terminant, un système différentiel *résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues* qui s'y trouvent engagées; dans ce système, *faisons abstraction, jusqu'à nouvel ordre, de toute équation dont le premier membre serait une dérivée de quelque autre* (cette suppression ne change pas l'économie des conditions initiales), et *supposons que le système résultant,* S, *satisfasse aux hypothèses formulées dans l'un ou l'autre des nºs* 163, 168, 170.

Cela étant, *pour que le système primitivement donné soit complètement intégrable, il faut et il suffit :* 1º *que le système* S *le soit lui-même;* 2º *que les équations jusqu'ici négligées soient* (chose très facile à vérifier) *de simples conséquences numériques de* S *prolongé.*

Effectivement, puisque S fait partie du système donné et que l'économie des conditions initiales est la même dans les deux systèmes, il faut et il suffit, pour que le système donné soit complètement intégrable : 1º que le système S le soit lui-même; 2º que les équations jusqu'ici négligées soient, au point de vue de l'intégration, des conséquences de S.

Or, le système S étant supposé complètement intégrable, si l'on considère les équations restantes et qu'on y remplace les dérivées

principales par les expressions (indépendantes de toute dérivée principale) qu'en fournit S prolongé, les équations résultantes doivent être, elles aussi, des conséquences de S au point de vue de l'intégration; par suite, S étant complètement intégrable, elles doivent être numériquement vérifiées par des valeurs arbitraires de toutes les quantités qu'elles renferment (variables, inconnues, dérivées paramétriques); les équations négligées sont donc forcément des conséquences numériques de S prolongé. Inversement, d'ailleurs, si elles sont des conséquences numériques de S prolongé, elles sont, à plus forte raison, des conséquences de S au point de vue de l'intégration, et il est clair qu'*on peut les négliger sans changer la solution générale du système primitif.*

CHAPITRE XI.

APPLICATION DES THÉORIES PRÉCÉDENTES A L'INTÉGRATION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES AUXQUELS CONDUISENT : 1° L'ÉTUDE DES DÉFORMATIONS FINIES D'UN MILIEU CONTINU DANS L'ESPACE A UN NOMBRE QUELCONQUE DE DIMENSIONS; 2° LA DÉTERMINATION DES SYSTÈMES DE COORDONNÉES CURVILIGNES ORTHOGONALES A UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES.

Étude préliminaire d'un système d'équations algébriques.

172. Les lettres u, v, ..., w étant supposées en nombre égal à n, considérons, entre les n^2 indéterminées

$$(1)\qquad \left\{\begin{matrix} u_1, & v_1, & \ldots, & w_1, \\ u_2, & v_2, & \ldots, & w_2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ u_n, & v_n, & \ldots, & w_n, \end{matrix}\right.$$

le système des $\frac{n(n+1)}{2}$ équations algébriques

$$(2)\qquad u_j u_k + v_j v_k + \ldots + w_j w_k = \tau_{j,k} \qquad (\text{ou } \tau_{k,j}) :$$

dans l'équation (2), (j, k) désigne une *combinaison* de deux entiers, *distincts ou non,* pris dans la suite 1, 2, ..., n, et le second membre est une constante donnée, indifféremment désignée par $\tau_{j,k}$ ou $\tau_{k,j}$.

Relativement aux n^2 indéterminées (1), le système (2) possède autant de déterminants différentiels (n° **117**) qu'il y a de manières de former, avec n^2 objets, des *combinaisons* contenant chacune $\frac{n(n+1)}{2}$ objets *distincts*. Pour se représenter commodément l'une de ces combinaisons, on peut procéder comme il suit : construire un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux n indices 1,

2, ..., n, les colonnes aux n lettres u, v, ..., w, et par suite les n^2 cases aux n^2 indéterminées (1); puis noircir à l'aide de hachures les cases correspondant aux $\frac{n(n+1)}{2}$ éléments de la combinaison considérée. On obtiendra ainsi une sorte de damier où les $\frac{n(n+1)}{2}$ cases noires et les $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ cases blanches pourront offrir des dispositions relatives variées.

Cela étant, nous dirons qu'une combinaison formée avec $\frac{n(n+1)}{2}$ d'entre les indéterminées (1) est *parfaite*, si son damier, moyennant un ordre convenable adopté pour les lignes et pour les colonnes, présente la disposition suivante des cases noires et blanches :

Dans la première colonne, les n cases sont noires;

Dans la deuxième colonne, parcourue de haut en bas, les $n - 1$ premières cases sont noires et la dernière blanche;

Dans la troisième colonne, parcourue de haut en bas, les $n - 2$ premières cases sont noires et les deux dernières blanches;

Etc.;

Enfin, dans la $n^{\text{ième}}$ colonne, parcourue de haut en bas, la première case est noire et les $n - 1$ dernières blanches.

Par exemple, si l'on suppose $n = 3$, d'où

$$n^2 = 9, \qquad \frac{n(n+1)}{2} = 6 \qquad \text{et} \qquad \frac{n(n-1)}{2} = 3,$$

à la combinaison (six à six)

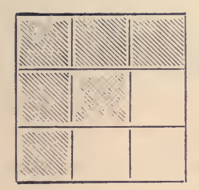
$$u_1, \quad v_1, \quad u_2, \quad w_2, \quad v_3, \quad w_3$$

correspondra le damier ci-dessous :

	u	v	w
1			
2			
3			

Et une combinaison des neuf indéterminées six à six sera parfaite, si

son damier, moyennant un ordre convenable adopté pour les lignes et pour les colonnes, offre la disposition suivante :



173. *Si l'on attribue aux n^2 indéterminées* (1) *des valeurs numériques n'annulant pas leur déterminant, les divers déterminants différentiels du système* (2) *qui correspondent aux diverses combinaisons parfaites* (n° 172) *des indéterminées ne peuvent s'annuler à la fois.*

I. *La proposition est vraie pour* $n = 2$.

On a, en pareil cas,

$$n^2 = 4, \qquad \frac{n(n+1)}{2} = 3, \qquad \frac{n(n-1)}{2} = 1,$$

et le système (2) devient

$$(3) \qquad \begin{cases} u_1^2 \quad + v_1^2 \quad = \tau_{1,1}, \\ u_1 u_2 + v_1 v_2 = \tau_{1,2} \qquad (\text{ou } \tau_{2,1}), \\ u_2^2 \quad + v_2^2 \quad = \tau_{2,2}. \end{cases}$$

En prenant les dérivées premières des premiers membres de (3) successivement par rapport aux quatre indéterminées,

$$u_1, \quad v_1, \quad u_2, \quad v_2,$$

qui s'y trouvent engagées (et en supprimant le facteur 2 dans certaines lignes), on obtient le Tableau rectangulaire

$$\begin{array}{cccc} u_1, & v_1, & 0, & 0, \\ u_2, & v_2, & u_1, & v_1, \\ 0, & 0, & u_2, & v_2. \end{array}$$

La seule inspection de ce Tableau nous montre que si, pour en extraire un déterminant du troisième ordre, on s'assujettit expressément à y prendre les deux premières colonnes, le déterminant diffé-

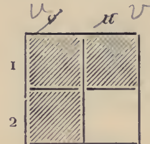
rentiel ainsi obtenu sera le produit du déterminant

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

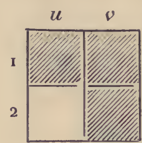
par l'une ou par l'autre des quantités

$$(5) \qquad u_2, \quad v_2 :$$

dans le premier cas, on aura le déterminant différentiel correspondant à la combinaison



dans le second cas, le déterminant différentiel correspondant à la combinaison



et ces deux combinaisons sont manifestement parfaites. Or, dans les deux produits dont nous venons de parler, le premier facteur, c'est-à-dire le déterminant (4), est, par hypothèse, différent de zéro; et comme, en vertu même de cette non-nullité, les deux quantités (5) ne peuvent être nulles à la fois, il y a au moins un des deux produits où le second facteur est, comme le premier, différent de zéro.

Il existe donc forcément quelque combinaison parfaite à laquelle correspond un déterminant différentiel différent de zéro.

II. *Si la proposition est vraie pour une valeur de n, elle l'est pour la valeur suivante $n+1$.*

Considérons, entre les $(n+1)^2$ indéterminées

$$(6) \qquad \left|\begin{array}{lllll} u_1, & v_1, & \ldots, & w_1, & s_1, \\ u_2, & v_2, & \ldots, & w_2, & s_2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ u_n, & v_n, & \ldots, & w_n, & s_n, \\ u_{n+1}, & v_{n+1}. & \ldots, & w_{n+1}, & s_{n+1}, \end{array}\right.$$

le système des $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ équations

(7) $$u_j u_k + v_j v_k + \ldots + w_j w_k + s_j s_k = \tau_{j,k} \quad (\text{ou } \tau_{k,j}):$$

dans l'équation (7), (j, k) désigne une combinaison de deux entiers, distincts ou non, pris dans la suite 1, 2, .., n, $n+1$, et le second membre est une constante donnée, indifféremment désignée par $\tau_{j,k}$ ou $\tau_{k,j}$. Le déterminant d'ordre $n+1$ formé avec les quantités (6) étant, par hypothèse, différent de zéro, l'un au moins des déterminants d'ordre n extraits des n premières lignes est différent de zéro, par exemple le déterminant

(8) $$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & \ldots & w_1 \\ u_2 & v_2 & \ldots & w_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_n & v_n & \ldots & w_n \end{vmatrix},$$

formé avec les n premières lignes et les n premières colonnes de (6). En vue de la démonstration qui va suivre, nous partagerons les équations (7) en deux groupes : dans un *premier groupe,* nous mettrons les $n+1$ équations

$$\begin{aligned} &u_1 u_{n+1} + v_1 v_{n+1} + \ldots + w_1 w_{n+1} + s_1 s_{n+1} = \tau_{1,n+1}, \\ &u_2 u_{n+1} + v_2 v_{n+1} + \ldots + w_2 w_{n+1} + s_2 s_{n+1} = \tau_{2,n+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &u_n u_{n+1} + v_n v_{n+1} + \ldots + w_n w_{n+1} + s_n s_{n+1} = \tau_{n,n+1}, \\ &u_{n+1}^2 \quad + v_{n+1}^2 \quad + \ldots + w_{n+1}^2 \quad + s_{n+1}^2 \quad = \tau_{n+1,n+1}, \end{aligned}$$

dont les premiers membres s'obtiennent en combinant la ligne de rang $n+1$ du Tableau (6) successivement avec les lignes de rangs 1, 2, ..., n, $n+1$; dans un *second groupe,* nous mettrons les $\frac{n(n+1)}{2}$ équations restantes du système; nous observerons enfin que dans les équations du second groupe ne figurent plus les éléments de la dernière ligne de (6), et que, si l'on y néglige par la pensée les produits des éléments de la dernière colonne, leurs premiers membres ne sont autres que ceux du système (2).

Cela étant, considérons, parmi les déterminants différentiels du système (7), ceux qui se rapportent aux $n+1$ indéterminées de la dernière ligne de (6) et à $\frac{n(n+1)}{2}$ indéterminées prises dans le Ta-

bleau (8), mettons, comme à l'alinéa précédent, dans une même *colonne* les dérivées premières qui se rapportent à une même indéterminée, dans une même *ligne* celles qui proviennent d'une même équation du système (7), et disposons comme il suit les colonnes et les lignes d'un pareil déterminant : parmi les colonnes, mettons aux premiers rangs celles qui se rapportent aux $n+1$ indéterminées

$$u_{n+1},\quad v_{n+1},\quad \ldots,\quad w_{n+1},\quad s_{n+1},$$

et, parmi les lignes, mettons aux premiers rangs celles qui se rapportent aux $n+1$ équations du premier groupe. Dans le Tableau partiel que forment les $n+1$ premières colonnes du déterminant, les $n+1$ premières lignes [après suppression du facteur 2 dans la $(n+1)^{\text{ième}}$] seront précisément les $n+1$ lignes du Tableau (6), et toutes les lignes suivantes seront exclusivement composées de zéros : le déterminant différentiel considéré s'obtiendra donc en multipliant le déterminant des quantités (6) par le déterminant différentiel des $\frac{n(n+1)}{2}$ équations du second groupe relatif à $\frac{n(n+1)}{2}$ des quantités (8), ou, ce qui revient évidemment au même, en multipliant le déterminant des quantités (6) par un des déterminants différentiels du système (2).

Or : 1° le déterminant des quantités (6) est différent de zéro ; 2° le déterminant (8) étant, comme nous l'avons dit, différent de zéro, le système (2) possède, par rapport à quelque combinaison parfaite des n^2 indéterminées (8), un déterminant différentiel différent de zéro ; 3° en associant aux $n+1$ éléments de la dernière ligne de (6) une combinaison parfaite des n^2 indéterminées (8), on obtient manifestement une combinaison parfaite des $(n+1)^2$ indéterminées (6).

Il existe donc bien une combinaison parfaite de ces dernières à laquelle correspond, dans le système (7), un déterminant différentiel différent de zéro.

III. L'exactitude générale de notre proposition résulte du simple rapprochement de I et II.

174. *Pour que le système* (2) *possède quelque solution numérique n'annulant pas le déterminant des quantités* (1), *il est né-*

cessaire que la forme quadratique

$$\sum_i \tau_{i,i} X_i^2 + \sum_{j,k} 2\tau_{j,k} X_j X_k \qquad (j \neq k), \tag{9}$$

aux n indéterminées $X_1, X_2, \ldots, X_n$, *soit décomposable en une somme algébrique de n carrés indépendants.*

Réciproquement, si une pareille décomposition est possible, aucune des solutions numériques, en nombre infini, du système (2) *n'annule le déterminant des quantités* (1).

En désignant enfin par

$$\begin{array}{llll} \upsilon_1, & \varphi_1, & \ldots, & \psi_1, \\ \upsilon_2, & \varphi_2, & \ldots, & \psi_2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \upsilon_n, & \varphi_n, & \ldots, & \psi_n \end{array}$$

l'une quelconque de ces solutions numériques, et par

$$\left\{\begin{array}{llll} l_1, & p_1, & \ldots, & q_1, \\ l_2, & p_2, & \ldots, & q_2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ l_n, & p_n, & \ldots, & q_n \end{array}\right. \tag{10}$$

les éléments d'un déterminant orthogonal arbitraire (d'ordre n), la solution la plus générale du système (2) *est donnée par les formules*

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= l_1 \upsilon_1 + p_1 \varphi_1 + \ldots + q_1 \psi_1, \\ v_1 &= l_2 \upsilon_1 + p_2 \varphi_1 + \ldots + q_2 \psi_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ w_1 &= l_n \upsilon_1 + p_n \varphi_1 + \ldots + q_n \psi_1; \\ u_2 &= l_1 \upsilon_2 + p_1 \varphi_2 + \ldots + q_1 \psi_2, \\ v_2 &= l_2 \upsilon_2 + p_2 \varphi_2 + \ldots + q_2 \psi_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ w_2 &= l_n \upsilon_2 + p_n \varphi_2 + \ldots + q_n \psi_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ u_n &= l_1 \upsilon_n + p_1 \varphi_n + \ldots + q_1 \psi_n, \\ v_n &= l_2 \upsilon_n + p_2 \varphi_n + \ldots + q_2 \psi_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ w_n &= l_n \upsilon_n + p_n \varphi_n + \ldots + q_n \psi_n. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

(On qualifie d'*orthogonal* tout déterminant possédant la double propriété : 1° que la somme des carrés des éléments d'une colonne quelconque soit égale à l'unité; 2° que la somme des produits des éléments de même rang dans deux colonnes quelconques soit égale à zéro. Quand cette double propriété existe pour les colonnes, elle existe aussi pour les lignes. Enfin, tout déterminant orthogonal a pour valeur $+1$ ou -1.)

I. Nous rappellerons qu'en vertu des propriétés élémentaires des formes linéaires, *le nombre des carrés indépendants en lesquels une forme quadratique donnée peut se décomposer est invariable* (et au plus égal au nombre des indéterminées dont la forme quadratique dépend); et que, *si une forme quadratique, décomposable en h carrés indépendants, se trouve décomposée en h carrés, ces derniers sont nécessairement indépendants.*

II. La forme quadratique la plus générale (à n variables X_1, X_2, ..., X_n) décomposable en n carrés (indépendants ou non) est

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &(u_1 X_1 + u_2 X_2 + \ldots + u_n X_n)^2 \\ &+(v_1 X_1 + v_2 X_2 + \ldots + v_n X_n)^2 \\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+(w_1 X_1 + w_2 X_2 + \ldots + w_n X_n)^2, \end{aligned}\right.$$

où

$$(13)\quad \left\{\begin{matrix} u_1, & u_2, & \ldots, & u_n, \\ v_1, & v_2, & \ldots, & v_n, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ w_1, & w_2, & \ldots, & w_n \end{matrix}\right.$$

désignent n^2 constantes (réelles ou imaginaires) arbitrairement choisies; en l'ordonnant par rapport à X_1, X_2, ..., X_n, elle devient

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_i (u_i^2 + v_i^2 + \ldots + w_i^2) X_i^2 \\ &+\sum_{j,k} 2(u_j u_k + v_j v_k + \ldots + w_j w_k) X_j X_k \\ &\qquad\qquad (j \neq k). \end{aligned}\right.$$

Il est visible dès lors qu'*à toute solution numérique du système* (2) *correspond une décomposition de la forme quadratique* (9) *en n carrés, et réciproquement.*

Cela étant, si le système (2) admet quelque solution numérique n'annulant pas le déterminant des quantités (1), la forme quadratique (9), identique à (12) ou (14) pour les valeurs considérées de ces quantités, est bien, comme l'indique l'énoncé, décomposable en n carrés indépendants.

Réciproquement, si la forme quadratique (9) est décomposable en n carrés indépendants, toute décomposition en n carrés se trouve forcément constituée par des carrés indépendants, et, dès lors, toute solution numérique du système (2) laisse différent de zéro le déterminant des quantités (1).

III. *Si, dans une forme quadratique à n variables, décomposable en n carrés indépendants, on effectue un changement linéaire et homogène des variables, la forme ainsi obtenue est, comme la première, décomposable en n carrés indépendants, et les décompositions en n carrés se correspondent chacune à chacune dans les deux formes.*

Soit, en effet,

$$\begin{aligned} &(a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n)^2 \\ &+ (b_1 X_1 + b_2 X_2 + \ldots + b_n X_n)^2 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (h_1 X_1 + h_2 X_2 + \ldots + h_n X_n)^2 \end{aligned}$$

une décomposition de la forme quadratique donnée en n carrés : les n formes linéaires entre parenthèses, nécessairement indépendantes (I), conserveront cette propriété après un changement linéaire et homogène des variables, et à toute décomposition de la forme quadratique primitive en n carrés correspondra une semblable décomposition de la nouvelle; réciproquement.

IV. *Si l'on considère la forme quadratique*

$$U^2 + V^2 + \ldots + W^2, \tag{15}$$

aux n indéterminées U, V, ..., W, *la formule générale de sa décomposition en n carrés est*

$$\left\{\begin{aligned} &(l_1 U + p_1 V + \ldots + q_1 W)^2 \\ &+ (l_2 U + p_2 V + \ldots + q_2 W)^2 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (l_n U + p_n V + \ldots + q_n W)^2, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

où les lettres l, p, ..., q ont la même signification que dans notre énoncé général.

Car, en écrivant que la forme (16) est identique à (15), on exprime précisément que les quantités (10) forment un déterminant orthogonal.

V. *Supposons la forme* (9) *décomposable en n carrés indépendants,* et soit

$$\begin{aligned}&(\upsilon_1 X_1 + \upsilon_2 X_2 + \ldots + \upsilon_n X_n)^2\\ &+ (\varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_2 + \ldots + \varphi_n X_n)^2\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ (\psi_1 X_1 + \psi_2 X_2 + \ldots + \psi_n X_n)^2\end{aligned}$$

l'une quelconque de ses décompositions en n carrés : en vertu de l'hypothèse faite sur la forme (9), les n^2 quantités $\upsilon, \varphi, \ldots, \psi$ forment un déterminant différent de zéro.

Cela étant, si, dans la forme (9), on effectue le changement de variables linéaire et homogène

$$(17)\qquad \begin{cases} \upsilon_1 X_1 + \upsilon_2 X_2 + \ldots + \upsilon_n X_n = U,\\ \varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_2 + \ldots + \varphi_n X_n = V,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \psi_1 X_1 + \psi_2 X_2 + \ldots + \psi_n X_n = W,\end{cases}$$

elle devient

$$U^2 + V^2 + \ldots + W^2.$$

Dans cette nouvelle forme, la décomposition la plus générale en n carrés est donnée (IV) par la formule (16); il en résulte (III) que, dans la forme (9), la décomposition la plus générale en n carrés est donnée par cette même formule (16), où l'on se contente de remplacer U, V, ..., W par leurs valeurs tirées des formules (17).

En d'autres termes, *la décomposition la plus générale de* (9) *en n carrés est donnée par la formule* (12), *où les quantités* (13) *ou* (1) *reçoivent toutes les valeurs déterminées par les formules* (11) *de notre énoncé général.*

VI. La forme quadratique (9) étant décomposable en n carrés indépendants, le simple rapprochement des alinéas II et V montre que la solution générale du système (2) est bien celle qu'indique notre énoncé.

175. *La forme quadratique* (9) *étant supposée décomposable en n carrés indépendants, si l'on considère comme initiales les n^2 valeurs particulières des indéterminées* (1) *qui constituent une solution numérique du système* (2), *on peut, à partir des valeurs dont il s'agit, résoudre ce dernier, conformément au principe général des fonctions implicites* (n° 120), *par rapport à quelque combinaison parfaite des n^2 indéterminées* (n° 172).

C'est là une conséquence immédiate des deux numéros précédents.

176. *Les constantes τ étant supposées réelles, pour que le système* (2) *possède quelque solution numérique réelle n'annulant pas le déterminant des quantités* (1), *il est nécessaire que la forme quadratique* (9) *soit la somme* (*proprement dite, et non algébrique*) *des carrés de n formes linéaires indépendantes à coefficients réels.*

Réciproquement, si une pareille décomposition est possible, aucune des solutions numériques réelles, en nombre infini, du système (2) *n'annule le déterminant des quantités* (1).

En désignant enfin par

$$\begin{matrix} \upsilon_1, & \varphi_1, & \ldots, & \psi_1, \\ \upsilon_2, & \varphi_2, & \ldots, & \psi_2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \upsilon_n, & \varphi_n, & \ldots, & \psi_n \end{matrix}$$

l'une quelconque de ces solutions numériques réelles, et par

$$\begin{vmatrix} l_1 & p_1 & \ldots & q_1 \\ l_2 & p_2 & \ldots & q_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_n & p_n & \ldots & q_n \end{vmatrix},$$

un déterminant orthogonal arbitraire (*d'ordre n*) *à éléments réels, la solution réelle la plus générale du système* (2) *est donnée par les formules* (11).

Effectivement, la forme quadratique réelle la plus générale (à n variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$) décomposable en la somme (proprement dite) des carrés de n formes linéaires (indépendantes ou non) à coef-

ficients réels est

$$\begin{aligned}&(u_1 X_1 + u_2 X_2 + \ldots + u_n X_n)^2\\ &+ (v_1 X_1 + v_2 X_2 + \ldots + v_n X_n)^2\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ (w_1 X_1 + w_2 X_2 + \ldots + w_n X_n)^2,\end{aligned}$$

où

$$\begin{matrix} u_1, & u_2, & \ldots, & u_n,\\ v_1, & v_2, & \ldots, & v_n,\\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots,\\ w_1, & w_2, & \ldots, & w_n \end{matrix}$$

désignent n^2 constantes réelles arbitrairement choisies; en l'ordonnant par rapport à $X_1, X_2, \ldots, X_n$, elle prend la forme (14). On voit par là qu'à toute solution numérique réelle du système (2) correspond une décomposition de la forme (9) en la somme (proprement dite) de n formes linéaires à coefficients réels, et réciproquement.

Cela étant, si le système (2) admet quelque solution numérique réelle n'annulant pas le déterminant des quantités (1), la forme quadratique (9), identique à (14) pour les valeurs considérées de ces quantités, est bien décomposable comme l'indique l'énoncé.

Réciproquement, si la forme (9) est décomposable comme l'indique l'énoncé, toute décomposition en la somme (proprement dite) des carrés de n formes linéaires à coefficients réels se trouve forcément constituée par des carrés indépendants, et, dès lors, toute solution numérique réelle du système (2) laisse différent de zéro le déterminant des quantités (1).

On répétera alors, avec les modifications voulues, les raisonnements des alinéas III, IV, V et VI du n° 174.

Étude du système d'équations aux dérivées partielles auquel conduit la théorie des déformations finies dans l'espace à *n* dimensions; conditions de possibilité.

177. Désignant par (j, k) une *combinaison* de deux entiers, *distincts ou non*, pris dans la suite $1, 2, \ldots, n$, par $\mu_{j,k}$ ou $\mu_{k,j}$ une fonction donnée, et par

$$u, \quad v, \quad \ldots, \quad w$$

n fonctions inconnues des variables indépendantes

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n,$$

nous considérerons le système des $\frac{n(n+1)}{2}$ équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}+\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_k}+\ldots+\frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_k}=\mu_{j,k},$$

et nous adopterons pour ce système la notation abrégée

$$(1)\qquad \sum\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}=\mu_{j,k},$$

où les sommations indiquées par le symbole $\sum$ doivent s'étendre aux n fonctions inconnues $u, v, \ldots, w$. Un pareil système se déduit, comme on voit, du système algébrique

$$u_j u_k+v_j v_k+\ldots+w_j w_k=\tau_{j,k},$$

considéré au nº 172, en y remplaçant, d'une part, les n^2 indéterminées

$$\begin{matrix} u_1, & v_1, & \ldots, & w_1, \\ u_2, & v_2, & \ldots, & w_2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ u_n, & v_n, & \ldots, & w_n \end{matrix}$$

respectivement par les n^2 dérivées premières des fonctions inconnues $u, v, \ldots, w$, d'autre part les constantes $\tau_{j,k}(=\tau_{k,j})$ respectivement par les fonctions données $\mu_{j,k}(=\mu_{k,j})$.

Occupons-nous tout d'abord de déterminer la région de l'espace $[[x_1, x_2, \ldots, x_n]]$ dans laquelle il convient de faire mouvoir les variables indépendantes.

En premier lieu, l'existence des dérivées d'une fonction impliquant, d'après les définitions posées, l'olotropie de cette fonction, et les dérivées étant olotropes dans les limites où la fonction l'est elle-même (nºs 49, 50, 52), nous n'avons pas à faire varier $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au delà des limites où les seconds membres $\mu_{j,k}$ le sont tous à la fois.

D'un autre côté, les seuls groupes d'intégrales dont la recherche soit intéressante au point de vue des applications sont ceux pour lesquels le déterminant différentiel

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial v}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial w}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} & \frac{\partial v}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial w}{\partial x_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} & \frac{\partial v}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial w}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

n'est pas identiquement nul : si donc nous nous bornons, comme il est naturel de le faire, à la recherche exclusive de ces groupes d'intégrales, nous n'avons pas à faire varier $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au delà des limites où la forme quadratique

$$(3) \qquad \sum \mu_{i,i} X_i^2 + \sum 2\mu_{j,k} X_j X_k \qquad (j \neq k)$$

est décomposable en une somme algébrique de n carrés indépendants (n° 174).

La région, $\mathfrak{R}$, dans laquelle nous ferons mouvoir les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sera donc supposée satisfaire à la double condition suivante :

1° La région $\mathfrak{R}$ est normale, et les seconds membres du système (1) y sont tous olotropes (n°s 41 et 42).

2° Pour tout point de la région $\mathfrak{R}$, la forme quadratique (3) est décomposable en une somme algébrique de n carrés indépendants.

178. Bien que les équations (1) ne contiennent pas explicitement $u, v, \ldots, w$, il est toujours permis de les considérer comme subsistant entre

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, \\ u, & v, & \ldots, & w, \end{matrix}$$

et les n^2 dérivées premières de $u, v, \ldots, w$, par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, soit *en tout* $n(n+2)$ *quantités :* il va sans dire alors que, dans toute solution *numérique* du système, les valeurs de $u, v, \ldots, w$ sont entièrement arbitraires.

Cela étant, et en assujettissant, comme il vient d'être dit (n° 177), les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à ne pas excéder la région $\mathfrak{R}$, le système (1) possède diverses propriétés que nous allons successivement énumérer.

I. Étant donné un système du premier ordre, résolu par rapport à certaines dérivées (premières) des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, nous avons vu (n° 90) comment on peut, pour en disposer nettement les diverses équations, les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux variables indépendantes et les colonnes aux fonctions inconnues.

Cela étant, si l'on considère comme initiales les valeurs qui constituent l'une quelconque des solutions numériques du système (1), il

résulte du n° 175 qu'à partir de ces valeurs le système peut toujours être résolu (conformément au principe général des fonctions implicites, n° 120) par rapport à $\frac{n(n+1)}{2}$ dérivées premières choisies de telle façon que, moyennant un ordre convenable adopté pour les n lignes et pour les n colonnes du quadrillage, les cases pleines et vides offrent la disposition suivante :

Dans la première colonne, les n cases sont pleines ;

Dans la deuxième colonne, parcourue de haut en bas, les $n-1$ premières cases sont pleines et la dernière vide ;

Dans la troisième colonne, parcourue de haut en bas, les $n-2$ premières cases sont pleines et les deux dernières vides ;

Etc. ;

Enfin, dans la $n^{\text{ième}}$ colonne, parcourue de haut en bas, la première case est pleine et les $n-1$ dernières vides.

II. Les $\frac{n^2(n+1)}{2}$ équations déduites du système (1) par toutes les différentiations premières possibles, et qui sont linéaires par rapport aux $\frac{n^2(n+1)}{2}$ dérivées secondes de $u, v, \ldots, w$, peuvent, pour toute solution numérique du système (1), être résolues par rapport à ces $\frac{n^2(n+1)}{2}$ dérivées secondes.

Nous allons voir, en effet, que de ces $\frac{n^2(n+1)}{2}$ équations on peut déduire, par des combinaisons fort simples :

1° Un groupe de n équations ayant respectivement pour premiers membres

$$(4) \qquad \sum \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad \sum \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad \ldots, \quad \sum \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

avec des seconds membres ne dépendant que de $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

2° Un groupe de n équations ayant respectivement pour premiers membres

$$(5) \qquad \sum \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}, \quad \sum \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}, \quad \ldots, \quad \sum \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}$$

$(j \neq k)$, avec des seconds membres ne dépendant non plus que de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Chacun de ces deux groupes sera manifestement résoluble par rapport aux n dérivées secondes qu'il contient, puisque, dans chacun

d'eux, les coefficients de ces n dérivées sont les éléments du déterminant (2) : de cette remarque, on déduira sans peine la possibilité de résoudre par rapport aux dérivées secondes le système spécifié ci-dessus, et son équivalence numérique avec l'ensemble des divers groupes (4) et (5) ([1]).

A. Formation du premier groupe de n équations.

Différentiant par rapport à x_i l'équation du système (1) qui a pour premier membre

$$\sum\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2,$$

nous obtiendrons l'équation

$$\sum\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial \mu_{i,i}}{\partial x_i}. \tag{6}$$

Désignant par q un entier quelconque pris dans la suite $1, 2, \ldots, n$, mais différent de i, nous différentierons par rapport à x_i l'équation qui a pour premier membre

$$\sum\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_q},$$

puis par rapport à x_q l'équation qui a pour premier membre

$$\sum\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2:$$

nous obtiendrons ainsi les deux équations

$$\sum\frac{\partial u}{\partial x_q}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\sum\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_q}=\frac{\partial \mu_{i,q}}{\partial x_i},$$
$$\sum\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_q}=\frac{1}{2}\frac{\partial \mu_{i,i}}{\partial x_q},$$

et, en retranchant ces dernières membre à membre, il viendra

$$\sum\frac{\partial u}{\partial x_q}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\frac{\partial \mu_{i,q}}{\partial x_i}-\frac{1}{2}\frac{\partial \mu_{i,i}}{\partial x_q}. \tag{7}$$

([1]) Si, dans les deux systèmes en question, on remplace pour un instant par zéro les valeurs numériques des seconds membres sans toucher à celles des coefficients des premiers membres, on aperçoit aisément, en se reportant au Chapitre VIII (nos 127 et 129), la possibilité de résoudre le premier par rapport aux dérivées secondes de $u, v, \ldots, w$. Cela étant, et les seconds membres ayant de nouveau leurs véritables valeurs, la simple application du no 131 suffit à établir l'équivalence numérique des deux systèmes.

On voit alors, en considérant (6) et (7), que nous avons un groupe de n équations ayant pour premiers membres respectifs les sommes (4), avec des seconds membres ne dépendant que de x_1, $x_2, \ldots, x_n$.

B. Formation du deuxième groupe de n équations.

Supposant $j \neq k$, et différentiant par rapport à x_k l'équation du système (1) qui a pour premier membre

$$\sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2,$$

puis par rapport à x_j celle qui a pour premier membre

$$\sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2,$$

nous obtiendrons les deux équations

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \, \partial x_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mu_{j,j}}{\partial x_k}, \tag{8}$$

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \, \partial x_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mu_{k,k}}{\partial x_j}. \tag{9}$$

Désignant par q un entier quelconque pris dans la suite $1, 2, \ldots, n$, mais différent de j et de k, nous différentierons par rapport à x_k l'équation qui a pour premier membre

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_q},$$

puis par rapport à x_j celle qui a pour premier membre

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_q},$$

enfin par rapport à x_q celle qui a pour premier membre

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k};$$

nous aurons ainsi les trois équations

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x_q} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \, \partial x_k} + \sum \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \, \partial x_q} = \frac{\partial \mu_{j,q}}{\partial x_k},$$

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x_q} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \, \partial x_k} + \sum \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \, \partial x_q} = \frac{\partial \mu_{k,q}}{\partial x_j},$$

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \, \partial x_q} + \sum \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \, \partial x_q} = \frac{\partial \mu_{j,k}}{\partial x_q}.$$

Multipliant ces trois dernières équations respectivement par 1, 1, —1, et ajoutant membre à membre, il viendra

$$(10) \qquad \sum \frac{\partial u}{\partial x_q} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \, \partial x_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mu_{j,q}}{\partial x_k} + \frac{\partial \mu_{k,q}}{\partial x_j} - \frac{\partial \mu_{j,k}}{\partial x_q}\right).$$

On voit alors, en considérant (8), (9) et (10), que nous avons un groupe de n équations ayant pour premiers membres respectifs les sommes (5), avec des seconds membres ne dépendant que de x_1, $x_2, \ldots, x_n$.

III. Supposons qu'à partir d'une solution numérique quelconque du système (1), on ait résolu ce dernier par rapport à $\frac{n(n+1)}{2}$ dérivées premières choisies de telle façon que, moyennant un ordre convenable adopté pour les lignes et pour les colonnes, les cases pleines et vides de son Tableau présentent la disposition indiquée dans l'alinéa I; soient, pour fixer les idées,

$$(x_1), \quad (x_2), \quad \ldots, \quad (x_n)$$

et

$$(u), \quad (v), \quad \ldots, \quad (w)$$

les ordres dans lesquels doivent se succéder respectivement les lignes et les colonnes du Tableau pour qu'il en soit ainsi : le système (1) se trouve alors résolu par rapport aux n dérivées premières de u, aux $n-1$ dérivées premières de v intéressant $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, etc., enfin à la dérivée première de w intéressant x_1 [1]. Si nous nommons R_1 le système ainsi résolu, la première colonne, (u), du Tableau de R_1 ne contient, d'après cela, aucune case vide; la deuxième

[1] En supposant, par exemple, $n = 3$, on aurait le Tableau

	(u)	(v)	(w)
(x_1)	$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \ldots$	$\frac{\partial v}{\partial x_1} = \ldots$	$\frac{\partial w}{\partial x_1} = \ldots$
(x_2)	$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \ldots$	$\frac{\partial v}{\partial x_2} = \ldots$	
(x_3)	$\frac{\partial u}{\partial x_3} = \ldots$		

colonne, (v), contient une seule case vide, la dernière, correspondant à la variable x_n; la troisième colonne contient deux cases vides, les deux dernières, correspondant aux deux variables x_{n-1}, x_n; etc.; enfin la $n^{\text{ième}}$ colonne, (w), contient $n-1$ cases vides, les $n-1$ dernières, correspondant aux variables $x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$.

Supposons maintenant qu'on ait résolu par rapport aux $\frac{n^2(n+1)}{2}$ dérivées secondes de $u, v, \ldots, w$ les $\frac{n^2(n+1)}{2}$ équations déduites de (1) par toutes les différentiations premières possibles, et, parmi ces formules de résolution, considérons celles qui ont pour premiers membres :

La dérivée seconde relative à x_n de la deuxième inconnue, v;

Les trois dérivées secondes relatives à x_{n-1} et x_n de l'inconnue suivante;

Etc.;

Les $\frac{n(n-1)}{2}$ dérivées secondes relatives à $x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ de la $n^{\text{ième}}$ inconnue w.

Ayons soin seulement de remplacer, dans les seconds membres de ces

$$1+3+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}$$

équations du second ordre, les diverses dérivées premières qui servent de premiers membres à R_1 par leurs valeurs tirées de R_1, et nommons R_2 le système résultant. *Dans le système* (R_1, R_2) [composé de $\frac{n(n+1)}{2}$ équations du premier ordre, et de $1+3+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}$ équations du second ordre], *les seules dérivées paramétriques des inconnues sont les* $\frac{n(n-1)}{2}$ *dérivées premières correspondant aux cases vides du Tableau de* R_1, et les seconds membres ne contiennent aucune dérivée principale. *Le système* (R_1 R_2) *est* d'ailleurs *orthonome* (n° 104) : si l'on attribue en effet aux variables indépendantes des cotes premières égales à 1, et aux inconnues des cotes premières égales à zéro, le groupe R_2 satisfait manifestement à la définition de l'orthonomie, puisque la cote première de chaque premier membre y est égale à 2, et celle de chaque second membre

égale à 1 ; quant au groupe R_1, la cote première de chaque premier membre y est égale à 1, ainsi que celle de chaque second membre, mais il résulte alors de la disposition régulière des cases pleines et vides de son Tableau que, moyennant l'attribution aux variables et aux inconnues de cotes secondes convenablement choisies, il satisfait, lui aussi, à la définition de l'orthonomie (n° 161, I).

IV. Dans le système (R_1, R_2), défini à l'alinéa précédent, nous avons attribué à chaque variable indépendante une cote première égale à 1, et à chaque inconnue une cote première égale à zéro : il en résulte que la cote première de toute dérivée se trouve être égale à son ordre même.

D'autre part, les seules dérivées paramétriques des inconnues sont, comme nous l'avons dit, les $\frac{n(n-1)}{2}$ dérivées *premières* correspondant aux cases vides du Tableau de R_1 : si donc on fixe, dans le système (R_1, R_2), l'économie des conditions initiales (n° 90), on en trouve $\frac{n(n+1)}{2}$ ayant pour premiers membres respectifs les n fonctions inconnues et les $\frac{n(n-1)}{2}$ dérivées premières dont il s'agit, et pour seconds membres de simples constantes arbitraires. L'ordre maximum de ces premiers membres se trouve ainsi être égal à 1.

En conséquence, il suffira, pour appliquer la règle de passivité du n° 163, de considérer, dans le système (R_1, R_2) prolongé (n° 99), les équations dont l'ordre ne dépasse pas 3, et d'éliminer entre elles les dérivées principales des trois premiers ordres : si donc on nomme R'_1, R''_1 les groupes déduits de R_1 par toutes les différentiations possibles du premier et du second ordre respectivement, et R'_2 le groupe déduit de R_2 par toutes les différentiations premières possibles, l'élimination dont il s'agit devra être effectuée entre les équations

$$(R_1;\ R'_1,\ R_2;\ R''_1,\ R'_2). \qquad (11)$$

Observons maintenant que, dans tout système considéré au point de vue des solutions numériques, l'élimination d'un groupe quelconque de quantités, effectuée conformément au principe général des fonctions implicites, fournit les relations auxquelles doivent satisfaire les quantités restantes pour figurer dans quelque solution numérique du proposé : si donc deux systèmes s'équivalent numériquement, l'éli-

mination d'un même groupe de quantités, effectuée successivement dans l'un et dans l'autre, conduit à deux systèmes qui, eux aussi, s'équivalent numériquement.

En conséquence, on peut, pour éliminer du système (11) les dérivées principales qui y figurent, lui substituer un système numériquement équivalent, et, notamment, l'un ou l'autre des deux dont nous allons parler.

179. En premier lieu, si l'on nomme S_1 le système (1), et S'_1, S''_1 les groupes déduits de S_1 par toutes les différentiations possibles du premier et du second ordre respectivement, *le système* (11) *équivaut numériquement à*

$$(S_1,\ S'_1,\ S''_1). \tag{12}$$

Effectivement, le système R_1 est en corrélation multiplicatoire avec S_1, parce qu'il s'en déduit à l'aide d'une résolution (effectuée conformément au principe général des fonctions implicites, n° 120), et il en résulte (n° 143) que les deux systèmes $(R_1,\ R'_1)$, $(S_1,\ S'_1)$ sont eux-mêmes en corrélation multiplicatoire. Le système $(R_1,\ R'_1)$ est d'ailleurs en corrélation multiplicatoire avec $(R_1,\ R'_1,\ R_2)$, car : 1° il en est évidemment une combinaison multiplicatoire, puisqu'il en fait partie; 2° les relations R_2 appartenant, d'après leur définition même, à un groupe déduit de $(S_1,\ S'_1)$ par résolution, sont des combinaisons multiplicatoires de $(S_1,\ S'_1)$, par suite, de $(R_1,\ R'_1)$, d'où résulte que $(R_1,\ R'_1,\ R_2)$ est une combinaison multiplicatoire de $(R_1,\ R'_1)$. Cela étant, les deux systèmes

$$(R_1,\ R'_1,\ R_2), \qquad (S_1,\ S'_1),$$

en corrélation multiplicatoire avec un même troisième, $(R_1,\ R'_1)$, jouissent, l'un par rapport à l'autre, de cette même propriété, d'où résulte (n° 143) que les systèmes

$$(R_1,\ R'_1,\ R_2,\ R''_1,\ R'_2), \qquad (S_1,\ S'_1,\ S''_1)$$

en jouissent également.

En second lieu, si l'on désigne par T_2 le groupe des $\frac{n^2(n+1)}{2}$ équations du second ordre formées à l'alinéa II du numéro précédent [celles qui ont pour premiers membres les diverses sommes analogues

à (4) et (5)], et par T'_2 le groupe déduit de T_2 à l'aide de toutes les différentiations premières possibles, *le système* (12) *équivaut numériquement à*

$$(13) \qquad (S_1, T_2, T'_2).$$

Effectivement, la corrélation multiplicatoire des systèmes S'_1 et T_2 entraîne celle des systèmes

$$(S_1, S'_1) \quad \text{et} \quad (S_1, T_2),$$

puis celle des systèmes

$$(S_1, S'_1, S''_1) \quad \text{et} \quad (S_1, S'_1, T_2, T'_2),$$

puis enfin celle des systèmes

$$(S_1, S'_1, T_2, T'_2) \quad \text{et} \quad (S_1, T_2, T'_2),$$

et les deux dernières corrélations entraînent à leur tour celle des systèmes

$$(S_1, S'_1, S''_1) \quad \text{et} \quad (S_1, T_2, T'_2).$$

Pour former les conditions de passivité du système orthonome (R_1, R_2), on peut donc prendre indifféremment l'un ou l'autre des deux systèmes (12), (13), et effectuer, entre les relations qui composent ce système, l'élimination des dérivées principales des trois premiers ordres [de (R_1, R_2)].

En effectuant cette élimination dans le système (12), où les groupes S_1, S'_1, S''_1 se composent d'équations en nombres respectivement égaux à

$$\frac{n(n+1)}{2}, \quad \frac{n^2(n+1)}{2}, \quad \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

tandis que les dérivées principales des ordres 1, 2, 3 [de (R_1, R_2)] sont en nombres respectivement égaux à

$$\frac{n(n+1)}{2}, \quad \frac{n^2(n+1)}{2}, \quad \frac{n^2(n+1)(n+2)}{6},$$

on obtiendra des conditions en nombre manifestement égal à

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n^2(n+1)(n+2)}{6} \quad \text{ou} \quad \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Pour effectuer pratiquement le calcul, nous considérerons le sys-

tème (13) ou (S_1, T_2, T'_2); dans ce système, les équations T_2 se partagent, comme nous l'avons vu, en groupes de n équations, chacun de ces groupes ayant pour premiers membres n sommes analogues aux sommes (4) ou (5); cela étant, nous partagerons de même les équations T'_2 en groupes de n équations, chacun de ces groupes ayant pour premiers membres n sommes déduites de (4) ou de (5) par une même différentiation première. Et, de même que chacun des groupes de T_2 est résoluble par rapport à n dérivées semblables du second ordre appartenant respectivement aux n fonctions inconnues u, v, ..., w [puisque les dérivées semblables dont il s'agit y ont pour coefficients les éléments du déterminant (2)], de même chacun des groupes de T'_2 le sera par rapport à n dérivées semblables du troisième ordre. En effectuant une pareille résolution, chaque groupe de dérivées semblables du troisième ordre se trouvera exprimé à l'aide des dérivées premières et secondes de u, v, ..., w et des variables indépendantes, et il va sans dire que tel ou tel groupe de dérivées troisièmes pourra se trouver fourni plusieurs fois par divers groupes d'équations provenant de T'_2 : l'élimination, entre ces derniers groupes, des dérivées (troisièmes) semblables qui y figurent, nous fournira des relations d'où il faudra éliminer finalement les dérivées principales du premier et du second ordre. En considérant successivement les divers groupes de dérivées troisièmes qui admettent plusieurs expressions, et en effectuant, relativement à chacun d'eux, le calcul qui vient d'être indiqué, on obtient, comme nous allons le voir, $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ relations, qui sont les conditions de passivité cherchées.

180. *Calcul des conditions de passivité du système orthonome* (R_1, R_2).

I. Désignant par j et k *deux entiers distincts* pris dans la suite 1, 2, ..., n, considérons les deux équations suivantes, formées à l'alinéa II du n° 178 :

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x_k} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \quad = \frac{\partial \mu_{j,k}}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mu_{j,j}}{\partial x_k},$$

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \, \partial x_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mu_{k,k}}{\partial x_j}.$$

Différentiant la première par rapport à x_k et la seconde par rapport

à x_j, il vient

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^2\,\partial x_k}+\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_j\,\partial x_k}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_k^2},$$

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial^3 u}{\partial x_j^2\,\partial x_k}+\sum \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mu_{k,k}}{\partial x_j^2};$$

de ces deux dernières, on déduit par soustraction

$$(14)\qquad \sum \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}\right)^2\right] = \frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_j\,\partial x_k}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_k^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mu_{k,k}}{\partial x_j^2}.$$

Chaque combinaison de deux entiers distincts pris dans la suite 1, 2, ..., n fournit ainsi une relation : on obtient donc un *premier groupe, composé de* $\frac{n(n-1)}{2}$ *équations,* où ne figureront plus les dérivées troisièmes de u, v, ..., w.

Désignant par i, j, k *trois entiers distincts* pris dans la suite 1, 2, ..., n, considérons les deux équations suivantes, formées à l'alinéa II du n° 178 :

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mu_{j,i}}{\partial x_k}+\frac{\partial \mu_{k,i}}{\partial x_j}-\frac{\partial \mu_{j,k}}{\partial x_i}\right),$$

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mu_{i,i}}{\partial x_k}.$$

Différentiant la première par rapport à x_i et la seconde par rapport à x_j, il vient

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^3 u}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_k}+\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mu_{j,i}}{\partial x_i\,\partial x_k}+\frac{\partial^2 \mu_{k,i}}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_i^2}\right),$$

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^3 u}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_k}+\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mu_{i,i}}{\partial x_j\,\partial x_k};$$

de ces dernières, on déduit par soustraction

$$(15)\qquad \sum \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mu_{j,i}}{\partial x_i\,\partial x_k}+\frac{\partial^2 \mu_{k,i}}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_i^2}-\frac{\partial^2 \mu_{i,i}}{\partial x_j\,\partial x_k}\right).$$

En permutant, dans la relation (15), i avec j, puis avec k, il vient

$$(16)\qquad \sum \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mu_{i,j}}{\partial x_j\,\partial x_k}+\frac{\partial^2 \mu_{k,j}}{\partial x_j\,\partial x_i}-\frac{\partial^2 \mu_{i,k}}{\partial x_j^2}-\frac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_i\,\partial x_k}\right),$$

$$(17)\qquad \sum\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_i}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_i}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_k\,\partial x_i}+\frac{\partial^2 \mu_{i,k}}{\partial x_k\,\partial x_j}-\frac{\partial^2 \mu_{j,i}}{\partial x_k^2}-\frac{\partial^2 \mu_{k,k}}{\partial x_j\,\partial x_i}\right).$$

Chaque combinaison de trois entiers distincts pris dans la suite 1, 2, ..., n fournit ainsi trois relations : on obtient donc un *second groupe, composé de* $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ *équations,* où ne figurent plus les dérivées troisièmes de u, v, ..., w.

Désignant enfin par i, j, k, l *quatre entiers distincts* pris dans la suite 1, 2, ..., n, considérons les deux équations suivantes, formées à l'alinéa II du n° 178 :

$$\sum\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_l}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mu_{k,i}}{\partial x_l}+\frac{\partial \mu_{l,i}}{\partial x_k}-\frac{\partial \mu_{k,l}}{\partial x_i}\right),$$
$$\sum\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_l}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mu_{j,i}}{\partial x_l}+\frac{\partial \mu_{l,i}}{\partial x_j}-\frac{\partial \mu_{j,l}}{\partial x_i}\right).$$

Différentiant la première par rapport à x_j, et la seconde par rapport à x_k, il vient

$$\sum\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^3 u}{\partial x_j\,\partial x_k\,\partial x_l}+\sum\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_l}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mu_{k,i}}{\partial x_j\,\partial x_l}+\frac{\partial^2 \mu_{l,i}}{\partial x_j\,\partial x_k}-\frac{\partial^2 \mu_{k,l}}{\partial x_j\,\partial x_i}\right),$$
$$\sum\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial^3 u}{\partial x_j\,\partial x_k\,\partial x_l}+\sum\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_l}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mu_{j,i}}{\partial x_k\,\partial x_l}+\frac{\partial^2 \mu_{l,i}}{\partial x_k\,\partial x_j}-\frac{\partial^2 \mu_{j,l}}{\partial x_k\,\partial x_i}\right);$$

de ces dernières, on déduit par soustraction

$$(18)\qquad \sum\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_l}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_l}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mu_{k,i}}{\partial x_j\,\partial x_l}+\frac{\partial^2 \mu_{j,l}}{\partial x_k\,\partial x_i}-\frac{\partial^2 \mu_{k,l}}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\partial^2 \mu_{j,i}}{\partial x_k\,\partial x_l}\right),$$

d'où, en permutant i et j,

$$(19)\qquad \sum\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_l}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_l}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \mu_{k,j}}{\partial x_i\,\partial x_l}+\frac{\partial^2 \mu_{i,l}}{\partial x_k\,\partial x_j}-\frac{\partial^2 \mu_{k,l}}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\partial^2 \mu_{i,j}}{\partial x_k\,\partial x_l}\right).$$

Chaque combinaison de quatre entiers distincts pris dans la suite 1, 2, ..., n fournit ainsi deux relations : on obtient donc un *troi-*

sième groupe, composé de $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12}$ *équations,* où ne figurent plus les dérivées troisièmes de $u, v, \ldots, w$.

Si maintenant on réunit les équations des trois groupes, on obtient un nombre d'équations égal à

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12},$$

c'est-à-dire à $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$.

Il reste à éliminer de ces équations les dérivées secondes de u, $v, \ldots, w$, toutes principales dans (R_1, R_2), et les dérivées principales premières.

II. Nous établirons à cet effet les deux lemmes suivants.

A. Si, en formant le carré du déterminant différentiel

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial v}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial w}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} & \frac{\partial v}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial w}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} & \frac{\partial v}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial w}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

on tient compte des équations (1), *on tombe sur l'expression*

$$(20) \qquad M = \begin{vmatrix} \mu_{1,1} & \mu_{1,2} & \cdots & \mu_{1,n} \\ \mu_{2,1} & \mu_{2,2} & \cdots & \mu_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{n,1} & \mu_{n,2} & \cdots & \mu_{n,n} \end{vmatrix}.$$

(Nous avons posé plus haut la convention $\mu_{j,k}=\mu_{k,j}$.)

On obtient immédiatement ce résultat en formant le carré de D par la règle de multiplication des déterminants.

B. Désignons par

$$U_i, \quad V_i, \quad \ldots, \quad W_i$$

les coefficients respectifs des éléments

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial w}{\partial x_i}$$

dans le déterminant D, par j, k deux entiers, *distincts ou non,* pris dans la suite $1, 2, \ldots, n$, et par $M_{j,k}$ le coefficient de l'élément $\mu_{j,k}$ dans le déterminant (20). Cela étant, *si, en formant la somme des produits*

$$U_j U_k + V_j V_k + \ldots + W_j W_k,$$

on tient compte des équations (1), *on tombe identiquement sur* $M_{j,k}$.

Effectivement, si, dans la suite

$$u, \quad v, \quad \ldots, \quad w,$$

on désigne par s la fonction inconnue de rang p, S_j est le produit de $(-1)^{p+j}$ par la déterminant d'ordre $n-1$ qu'on déduit de D en y supprimant la colonne de rang p et la ligne de rang j, et, de même, S_k est le produit de $(-1)^{p+k}$ par le déterminant d'ordre $n-1$ qu'on déduit de D en y supprimant la colonne de rang p et la ligne de rang k. Si donc on applique à la formation du produit $S_j S_k$ la règle de multiplication des déterminants, on tombera sur un déterminant d'ordre $n-1$ dont les éléments s'obtiendront en considérant les premiers membres de certaines des équations (1) et en y supprimant les produits de dérivées de la fonction s. Parmi les équations (1), celles dont on a, comme il vient d'être dit, à considérer les premiers membres, sont celles qui ont pour seconds membres

$$\begin{array}{llllll}
\mu_{1,1}, & \ldots, & \mu_{1,k-1}, & \mu_{1,k+1}, & \ldots, & \mu_{1,n}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
\mu_{j-1,1}, & \ldots, & \mu_{j-1,k-1}, & \mu_{j-1,k+1}, & \ldots, & \mu_{j-1,n}, \\
\mu_{j+1,1}, & \ldots, & \mu_{j+1,k-1}, & \mu_{j+1,k+1}, & \ldots, & \mu_{j+1,n}, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
\mu_{n,1}, & \ldots, & \mu_{n,k-1}, & \mu_{n,k+1}, & \ldots, & \mu_{n,n}.
\end{array}$$

On a donc, pour $S_j S_k$, en tenant compte des équations (1).

$$(-1)^{j+k}\begin{vmatrix}
\mu_{1,1}-\left(\dfrac{\partial s}{\partial x_1}\right)^2 & \cdots & \mu_{1,k-1}-\dfrac{\partial s}{\partial x_1}\dfrac{\partial s}{\partial x_{k-1}} & \mu_{1,k+1}-\dfrac{\partial s}{\partial x_1}\dfrac{\partial s}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \mu_{1,n}-\dfrac{\partial s}{\partial x_1}\dfrac{\partial s}{\partial x_n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\mu_{j-1,1}-\dfrac{\partial s}{\partial x_{j-1}}\dfrac{\partial s}{\partial x_1} & \cdots & \mu_{j-1,k-1}-\dfrac{\partial s}{\partial x_{j-1}}\dfrac{\partial s}{\partial x_{k-1}} & \mu_{j-1,k+1}-\dfrac{\partial s}{\partial x_{j-1}}\dfrac{\partial s}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \mu_{j-1,n}-\dfrac{\partial s}{\partial x_{j-1}}\dfrac{\partial s}{\partial x_n} \\
\mu_{j+1,1}-\dfrac{\partial s}{\partial x_{j+1}}\dfrac{\partial s}{\partial x_1} & \cdots & \mu_{j+1,k-1}-\dfrac{\partial s}{\partial x_{j+1}}\dfrac{\partial s}{\partial x_{k-1}} & \mu_{j+1,k+1}-\dfrac{\partial s}{\partial x_{j+1}}\dfrac{\partial s}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \mu_{j+1,n}-\dfrac{\partial s}{\partial x_{j+1}}\dfrac{\partial s}{\partial x_n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\mu_{n,1}-\dfrac{\partial s}{\partial x_n}\dfrac{\partial s}{\partial x} & \cdots & \mu_{n,k-1}-\dfrac{\partial s}{\partial x_n}\dfrac{\partial s}{\partial x_{k-1}} & \mu_{n,k+1}-\dfrac{\partial s}{\partial x_n}\dfrac{\partial s}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \mu_{n,n}-\left(\dfrac{\partial s}{\partial x_n}\right)^2
\end{vmatrix}.$$

Dans ce produit, faisons provisoirement abstraction du facteur $(-1)^{j+k}$, et considérons le déterminant qui figure à la suite : chacune de ses colonnes peut évidemment se décomposer en deux sous-colonnes, respectivement formées avec les termes précédés du signe $+$ et les termes précédés du signe $-$; deux sous-colonnes quelconques de la deuxième espèce ont, d'ailleurs, leurs éléments proportionnels : si donc on décompose, par la considération des sous-colonnes, le déterminant ci-dessus en une somme de plusieurs autres, un certain nombre de ces derniers s'évanouissent comme ayant deux colonnes proportionnelles, et il reste simplement n déterminants d'ordre $n-1$, dont l'un s'obtient en ne prenant la deuxième sous-colonne dans aucune des colonnes du déterminant (21), et chacun des $n-1$ suivants en la prenant dans une seule colonne : dans le premier de ces n déterminants, tous les éléments sont précédés du signe $+$; dans chacun des $n-1$ suivants, tous les éléments d'une certaine colonne contiennent le facteur -1, et l'on peut alors le supprimer dans cette colonne pour le mettre en évidence en dehors du déterminant. Cela fait, on a une somme algébrique de n déterminants que nous supposerons écrits les uns à la suite des autres sur une même file horizontale, le premier de ces déterminants étant précédé du signe $+$, et tous les autres du signe $-$.

Pour avoir maintenant, abstraction faite du facteur $(-1)^{j+k}$, la somme $\Sigma U_j U_k$, il faut faire la somme de n files horizontales semblables à la précédente, mais où l'inconnue quelconque s se trouve remplacée successivement par les n inconnues $u, v, \ldots, w$. En écrivant ces n files horizontales les unes au-dessous des autres, effectuant leur somme par files verticales, et désignant par $\Delta_{j,k}$ le déterminant qui se déduit de (20) par la suppression de la ligne de rang j et de la colonne de rang k, on obtiendra pour la première file verticale $n\Delta_{j,k}$; pour toute autre file verticale, on obtiendra manifestement, en tenant compte des équations (1), $-\Delta_{j,k}$; d'où résulte que la somme des n files a pour valeur $n\Delta_{j,k} - (n-1)\Delta_{j,k}$, ou $\Delta_{j,k}$.

Finalement, si l'on rétablit dans le produit (21) le facteur négligé $(-1)^{j+k}$, il vient

$$\Sigma U_j U_k = (-1)^{j+k} \Delta_{j,k},$$

c'est-à-dire, comme nous l'avions annoncé,

$$\Sigma U_j U_k = M_{j,k}.$$

III. Désignant par $\mathfrak{D}$ un symbole quelconque de dérivation *seconde*, et par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ certaines fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se déduisant des seconds membres (donnés) de (1) par des opérations élémentaires exécutées sur leurs dérivées premières, les n dérivées semblables du second ordre

$$\mathfrak{D}u,\quad \mathfrak{D}v,\quad \ldots,\quad \mathfrak{D}w \tag{22}$$

sont, comme nous l'avons vu plus haut (n° 178, II), liées aux variables indépendantes et aux dérivées premières de $u, v, \ldots, w$, par n relations de la forme

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x_1}\mathfrak{D}u + \frac{\partial v}{\partial x_1}\mathfrak{D}v + \ldots + \frac{\partial w}{\partial x_1}\mathfrak{D}w = \alpha_1,\\
&\frac{\partial u}{\partial x_2}\mathfrak{D}u + \frac{\partial v}{\partial x_2}\mathfrak{D}v + \ldots + \frac{\partial w}{\partial x_2}\mathfrak{D}w = \alpha_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{\partial u}{\partial x_n}\mathfrak{D}u + \frac{\partial v}{\partial x_n}\mathfrak{D}v + \ldots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\mathfrak{D}w = \alpha_n.
\end{aligned}$$

Les mêmes notations étant adoptées qu'à l'alinéa précédent pour le déterminant (2) et pour les coefficients de ses éléments, la résolution de ces formules par rapport aux dérivées (22) donne

$$\left\{\begin{aligned}
\mathrm{D}\mathfrak{D}u &= \alpha_1 \mathrm{U}_1 + \alpha_2 \mathrm{U}_2 + \ldots + \alpha_n \mathrm{U}_n,\\
\mathrm{D}\mathfrak{D}v &= \alpha_1 \mathrm{V}_1 + \alpha_2 \mathrm{V}_2 + \ldots + \alpha_n \mathrm{V}_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathrm{D}\mathfrak{D}w &= \alpha_1 \mathrm{W}_1 + \alpha_2 \mathrm{W}_2 + \ldots + \alpha_n \mathrm{W}_n.
\end{aligned}\right. \tag{23}$$

En désignant par $\mathfrak{D}'$ un deuxième symbole de dérivation seconde (identique ou non au précédent $\mathfrak{D}$), et par $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$ certaines fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se déduisant encore des seconds membres de (1) par des opérations élémentaires exécutées sur leurs dérivées premières, on a de même

$$\left\{\begin{aligned}
\mathrm{D}\mathfrak{D}'u &= \alpha'_1 \mathrm{U}_1 + \alpha'_2 \mathrm{U}_2 + \ldots + \alpha'_n \mathrm{U}_n,\\
\mathrm{D}\mathfrak{D}'v &= \alpha'_1 \mathrm{V}_1 + \alpha'_2 \mathrm{V}_2 + \ldots + \alpha'_n \mathrm{V}_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathrm{D}\mathfrak{D}'w &= \alpha'_1 \mathrm{W}_1 + \alpha'_2 \mathrm{W}_2 + \ldots + \alpha'_n \mathrm{W}_n.
\end{aligned}\right. \tag{24}$$

Enfin, si l'on multiplie membre à membre deux relations de même rang prises respectivement dans les groupes (23) et (24), et qu'on

ajoute les n équations résultantes, il vient

$$\begin{aligned} D^2 \sum \mathfrak{D} u\, \mathfrak{D}' u &= \sum (\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \ldots + \alpha_n U_n)(\alpha'_1 U_1 + \alpha'_2 U_2 + \ldots + \alpha'_n U_n) \\ &= \alpha_1 \alpha'_1 \sum U_1^2 + \alpha_2 \alpha'_2 \sum U_2^2 + \ldots \\ &\quad + (\alpha_1 \alpha'_2 + \alpha_2 \alpha'_1) \sum U_1 U_2 + \ldots, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en ayant égard aux deux lemmes de l'alinéa précédent,

$$M \sum \mathfrak{D} u\, \mathfrak{D}' u = \sum_r \alpha_r \alpha'_r M_{r,r} + \sum_{p,q} (\alpha_p \alpha'_q + \alpha_q \alpha'_p) M_{p,q}, \tag{25}$$

où r désigne un entier quelconque pris dans la suite 1, 2, ..., n, et p, q deux entiers distincts quelconques pris dans la même suite. Il résulte de là que la somme $\sum \mathfrak{D} u\, \mathfrak{D}' u$ s'exprime à l'aide des seules fonctions données μ [qui figurent dans les seconds membres de (1)] et de leurs dérivées premières.

Si l'on se reporte maintenant aux relations (14), (15), (16), (17), (18), (19), on voit que les quantités

$$\begin{gathered} \sum \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial x_k} \right)^2 \right], \\ \sum \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial x_k} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} \right), \\ \sum \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial x_k} \right), \\ \sum \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial x_i} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_k\, \partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k\, \partial x_i} \right), \\ \sum \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k\, \partial x_l} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial x_l} \right), \\ \sum \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k\, \partial x_l} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_l} \right), \end{gathered}$$

qui figurent dans leurs premiers membres, sont elles-mêmes exprimables à l'aide des seules fonctions données μ et de leurs dérivées premières.

Les conditions de passivité du système orthonome (R_1, R_2) sont donc de la forme suivante :

$$\frac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 \mu_{k,k}}{\partial x_j^2} - 2 \frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_j\, \partial x_k} + \ldots = 0, \tag{26}$$

où (j, k) désigne une *combinaison* quelconque de deux entiers *distincts* pris dans la suite $1, 2, \ldots, n$;

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mu_{i,i}}{\partial x_j\,\partial x_k} + \dfrac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_i^2} - \dfrac{\partial^2 \mu_{i,j}}{\partial x_i\,\partial x_k} - \dfrac{\partial^2 \mu_{i,k}}{\partial x_i\,\partial x_j} + \ldots = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_i\,\partial x_k} + \dfrac{\partial^2 \mu_{i,k}}{\partial x_j^2} - \dfrac{\partial^2 \mu_{i,j}}{\partial x_j\,\partial x_k} - \dfrac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_i\,\partial x_j} + \ldots = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \mu_{k,k}}{\partial x_i\,\partial x_j} + \dfrac{\partial^2 \mu_{i,j}}{\partial x_k^2} - \dfrac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_i\,\partial x_k} - \dfrac{\partial^2 \mu_{i,k}}{\partial x_j\,\partial x_k} + \ldots = 0, \end{cases}$$

où (i, j, k) désigne une *combinaison* quelconque de trois entiers *distincts* pris dans la suite $1, 2, \ldots, n$;

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mu_{i,j}}{\partial x_k\,\partial x_l} + \dfrac{\partial^2 \mu_{k,l}}{\partial x_i\,\partial x_j} - \dfrac{\partial^2 \mu_{i,k}}{\partial x_j\,\partial x_l} - \dfrac{\partial^2 \mu_{j,l}}{\partial x_i\,\partial x_k} + \ldots = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \mu_{i,j}}{\partial x_k\,\partial x_l} + \dfrac{\partial^2 \mu_{k,l}}{\partial x_i\,\partial x_j} - \dfrac{\partial^2 \mu_{i,l}}{\partial x_j\,\partial x_k} - \dfrac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_i\,\partial x_l} + \ldots = 0, \end{cases}$$

où (i, j, k, l) désigne une *combinaison* quelconque de quatre entiers *distincts* pris dans la suite $1, 2, \ldots, n$. Dans chacune des équations (26), (27), (28), les termes non écrits ne dépendent que des fonctions μ et de leurs dérivées premières.

181. Pour former le système orthonome (R_1, R_2), dont les conditions de passivité viennent d'être calculées, nous avons considéré l'une quelconque des solutions numériques du système (1), et nous avons mentalement supposé qu'à partir des valeurs constituant la solution numérique dont il s'agit, le système (1) se trouvait résolu (conformément au principe général des fonctions implicites, nº 120) par rapport à $\dfrac{n(n+1)}{2}$ dérivées premières choisies de telle façon que le Tableau résultant, moyennant un ordre convenable adopté pour ses lignes et pour ses colonnes, présentât la disposition indiquée à l'alinéa I du nº 178. Or, tout en faisant intervenir, dans notre raisonnement, les formules de résolution, nous n'y avons pas eu recours, *en fait*, dans notre calcul, et nous n'avons fait usage des équations (1) que sous la forme même où elles se trouvaient données. Les résultats de notre calcul ne changent donc pas, quelle que soit la solution numérique considérée au début pour le système (1); il n'y figure, notamment, aucune des fonctions inconnues $u, v, \ldots, w$ ni de leurs dérivées paramétriques, en sorte que les $\dfrac{n^2(n^2-1)}{12}$ relations

obtenues subsistent entre les seules fonctions *données* μ des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et leurs dérivées premières et secondes. Si donc on se reporte à ce qui a été dit au n° 112, si l'on observe d'autre part que, dans les limites mêmes où les formules de résolution du système (1) sont applicables, ce dernier équivaut, au point de vue de l'intégration, au système orthonome considéré dans notre raisonnement, on est conduit à la conclusion suivante :

Ou bien les $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ *relations obtenues par le calcul précédent sont identiquement vérifiées* (quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$), *et à toute solution numérique du système* (1) [considéré comme subsistant entre $n(n+2)$ quantités, ainsi qu'il a été dit au début du n° 178] *correspond alors un groupe unique d'intégrales* (développables à partir des valeurs numériques de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui figurent dans cette solution);

Ou bien elles ne le sont pas, et le système (1) *n'admet, en pareil cas, aucun groupe d'intégrales.*

Pour cette raison, nous les nommerons désormais *conditions de possibilité.*

182. *Les valeurs initiales des variables indépendantes étant choisies à volonté dans la région* $\mathfrak{R}$ (n° 177), *et les conditions de possibilité* (*n°* 181) *étant supposées satisfaites, tout groupe d'intégrales particulières du système* (1) *est calculable par cheminement* (*n°* 69) *du point initial à tout autre point de la région.*

En désignant par $(\upsilon, \varphi, \ldots, \psi)$ *l'un quelconque des groupes d'intégrales dont il s'agit, la solution générale du système* (1) *est donnée par les formules*

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{l} u = l_1\upsilon + p_1\varphi + \ldots + q_1\psi + h_1, \\ v = l_2\upsilon + p_2\varphi + \ldots + q_2\psi + h_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ w = l_n\upsilon + p_n\varphi + \ldots + q_n\psi + h_n, \end{array}\right.$$

où $h_1, h_2, \ldots, h_n$ *désignent n constantes entièrement arbitraires, et*

$$(30)\quad \left\{\begin{array}{llll} l_1, & p_1, & \ldots, & q_1, \\ l_2, & p_2, & \ldots, & q_2, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ l_n, & p_n, & \ldots, & q_n \end{array}\right.$$

les éléments d'un déterminant orthogonal arbitraire (d'ordre n). La solution générale du système (1) *dépend ainsi de* $\frac{n(n+1)}{2}$ *constantes arbitraires.*

Enfin, les solutions particulières, en nombre infini, fournies par les formules (29) *sont deux à deux opposées.*

I. *Si, parmi les solutions numériques du système* (1) [1], *on considère, à l'exclusion de toutes les autres, celles où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ont des valeurs déterminées, $(x_1)_0, (x_2)_0, \ldots, (x_n)_0$, et, si l'on désigne par $(\upsilon, \varphi, \ldots, \psi)$ le groupe d'intégrales particulières du système* (1) *qui correspond à l'une d'elles, l'ensemble des groupes d'intégrales qui correspondent respectivement à ces diverses solutions numériques est donné par les formules* (29).

Effectivement, puisque les fonctions $\upsilon, \varphi, \ldots, \psi$ sont développables à partir de $(x_1)_0, (x_2)_0, \ldots, (x_n)_0$ et vérifient identiquement le système (1), on voit d'abord que les fonctions $u, v, \ldots, w$ définies par les formules (29) sont développables à partir des mêmes valeurs, puis, en tenant compte de ce que le déterminant des quantités (30) est orthogonal, que leur substitution dans les relations du système (1) vérifie ces dernières identiquement.

Pour établir qu'inversement les formules (29) fournissent *tous* les groupes d'intégrales visés par l'énoncé du présent alinéa I, adjoignons à ces formules celles qui s'en déduisent par toutes les différentiations premières possibles, et, dans ces $n(n+1)$ relations, remplaçons, d'une part, $\upsilon, \varphi, \ldots, \psi$ et leurs dérivées premières par les valeurs numériques qu'elles prennent au point

$$(31) \qquad [(x_1)_0, (x_2)_0, \ldots, (x_n)_0],$$

d'autre part, $u, v, \ldots, w$ et leurs dérivées premières par des valeurs

---

[1] Bien que le système (1) ne contienne pas explicitement $u, v, \ldots, w$, on doit, ainsi qu'il a été dit au début du n° 178 et à la fin du n° 181, le considérer comme subsistant entre

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n,$$
$$u, \quad v, \quad \ldots, \quad w,$$

et les dérivées premières de $u, v, \ldots, w$.

numériques indéterminées; nous aurons ainsi le système suivant :

$$(32)\quad \begin{cases} u_0 = l_1 \upsilon_0 + p_1 \varphi_0 + \ldots + q_1 \psi_0 + h_1, \\ v_0 = l_2 \upsilon_0 + p_2 \varphi_0 + \ldots + q_2 \psi_0 + h_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ w_0 = l_n \upsilon_0 + p_n \varphi_0 + \ldots + q_n \psi_0 + h_n; \end{cases}$$

$$(33)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)_0 = l_1 \left(\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x_i}\right)_0 + p_1 \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)_0 + \ldots + q_1 \left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)_0, \\ \left(\dfrac{\partial v}{\partial x_i}\right)_0 = l_2 \left(\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x_i}\right)_0 + p_2 \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)_0 + \ldots + q_2 \left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)_0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial x_i}\right)_0 = l_n \left(\dfrac{\partial \upsilon}{\partial x_i}\right)_0 + p_n \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)_0 + \ldots + q_n \left(\dfrac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)_0 \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Si maintenant, dans le système (1), nous remplaçons, d'une part, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les valeurs numériques $(x_1)_0, (x_2)_0, \ldots, (x_n)_0$, d'autre part, les dérivées premières de $u, v, \ldots, w$ par les valeurs numériques indéterminées dont nous avons parlé, nous tombons sur un système de $\dfrac{n(n+1)}{2}$ équations algébriques, où se trouvent explicitement engagées les n^2 indéterminées

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_0, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

relativement à ces dernières, la solution générale du système est fournie, en vertu du n° 174, par les formules (33), où les quantités (30) désignent les éléments d'un déterminant orthogonal arbitraire; et, les quantités (30) étant ainsi choisies, les indéterminées u_0, $v_0, \ldots, w_0$, calculées à l'aide des formules (32), prendront, moyennant un choix convenable de $h_1, h_2, \ldots, h_n$, des valeurs numériques arbitrairement choisies d'avance.

II. *Si, parmi les solutions numériques du système* (1), *on considère exclusivement, comme à l'alinéa* I, *celles où* $x_1, x_2, \ldots,$ x_n *ont les valeurs* $(x_1)_0, (x_2)_0, \ldots, (x_n)_0$, *il existe quelque constante positive,* r_0, *telle que les groupes correspondants d'intégrales, développés à partir de* $(x_1)_0, (x_2)_0, \ldots, (x_n)_0$, *admettent tous des rayons de convergence au moins égaux à* r_0.

Si l'on désigne, en outre, par

$$(34)\qquad [(x_1)', (x_2)', \ldots, (x_n)']$$

un autre système de valeurs numériques attribuées à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *et qu'on lui fasse correspondre de même une constante positive* r', *on peut toujours, lorsque le point* (34) *est suffisamment voisin du point* (31), *choisir la constante* r' *de telle façon que sa différence à* r_0 *soit moindre en valeur absolue que toute quantité donnée.*

Effectivement, si $(\upsilon, \varphi, \ldots, \psi)$ désigne la solution particulière considérée à l'alinéa I, et r_0 une quantité positive assez petite pour que ces n fonctions, développées à partir des valeurs (31), admettent des rayons de convergence au moins égaux à r_0, il est clair que les n fonctions définies par les formules (29) seront développables dans les mêmes limites. Ainsi se trouve établie la première partie de l'énoncé ci-dessus.

Cela étant, si l'on assujettit les différences

$$(x_1)' - (x_1)_0, \quad (x_2)' - (x_2)_0, \quad \ldots, \quad (x_n)' - (x_n)_0$$

à avoir des modules inférieurs à r_0, et si l'on désigne par ε le plus grand de ces modules, la solution particulière $(\upsilon, \varphi, \ldots, \psi)$, développée à partir des valeurs (34), admettra des rayons de convergence au moins égaux à $r_0 - \varepsilon$, en sorte qu'on pourra prendre $r' = r_0 - \varepsilon$. Si donc le point (34) est suffisamment voisin du point (31), la différence $r_0 - r'$, égale à ε, tombera au-dessous de toute quantité donnée. Ainsi se trouve établie la seconde partie.

III. *Si l'on distingue par* $\mathfrak{F}$ *un fragment limité et complet* (n°s 2 et 3) *de la région* $\mathfrak{R}$, *et que l'on considère exclusivement, parmi les solutions numériques du système* (1), *celles où* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *ont pour valeurs les coordonnées des divers points de* $\mathfrak{F}$, *il existe quelque constante positive,* r, *telle que les groupes correspondants d'intégrales admettent des rayons de convergence au moins égaux à* r.

Considérons en effet, dans l'espace $\left[\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right]\right]$, la région limitée et complète $\mathfrak{F}$, et, dans cette région, un point quelconque : à ce point correspondent des solutions numériques en nombre infini du système (1). Cela étant, nous nommerons *caractéristique* du point toute constante positive (> 0) telle que les groupes d'intégrales correspondant à ces diverses solutions numériques admettent

tous des rayons de convergence au moins égaux à cette constante : l'existence d'une semblable caractéristique résulte de l'alinéa II (première partie de l'énoncé). Il résulte d'ailleurs de ce même alinéa II (deuxième partie de l'énoncé) que, si un point déterminé de $\mathfrak{F}$ admet parmi ses caractéristiques une constante déterminée, tout point de $\mathfrak{F}$ suffisamment voisin du premier admet parmi ses caractéristiques quelque constante dont la différence à la précédente tombe au-dessous de toute quantité donnée.

Ainsi, les diverses conditions spécifiées au n° 10 relativement aux caractéristiques se trouvent bien remplies dans la région limitée et complète $\mathfrak{F}$, et, comme les caractéristiques sont ici essentiellement supérieures à zéro, il existe bien quelque constante positive, r, possédant la propriété énoncée (n° 13).

IV. *Si, dans la région* $\mathfrak{R}$, *on trace un arc continu, et que l'on considère exclusivement, parmi les solutions numériques du système* (1), *celles où* x_1, x_2, ..., x_n *ont pour valeurs les coordonnées des divers points de l'arc, il existe quelque constante positive,* r, *telle que les groupes correspondants d'intégrales admettent tous des rayons de convergence au moins égaux à* r.

Car, les variables (réelles), s, t, ..., dont l'arc dépend, étant assujetties à se mouvoir dans un intervalle complexe, c'est-à-dire dans une région de l'espace $\left[\left[s, t, \ldots\right]\right]$ à la fois limitée et complète (n° 9, II), il résulte du n° 18 que l'ensemble des divers points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui, en vertu des formules définissant l'arc, correspondent (avec répétition possible) aux divers points de l'intervalle complexe, forme, dans l'espace $\left[\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right]\right]$, une région à la fois limitée et complète : les conclusions de l'alinéa III sont donc applicables.

V. *Si, dans la région* $\mathfrak{R}$, *on trace un chemin continu formé d'arcs placés bout à bout, et que l'on considère exclusivement, parmi les solutions numériques du système* (1), *celles où* x_1, x_2, ..., x_n *ont pour valeurs les coordonnées des divers points du chemin, il existe quelque constante positive,* r, *telle que les groupes correspondants d'intégrales admettent tous des rayons de convergence au moins égaux à* r.

C'est là une conséquence immédiate de l'alinéa IV.

VI. *Tout groupe d'intégrales particulières du système* (1) *est calculable par cheminement, du point initial choisi dans la région* $\mathfrak{R}$ *à tout autre point de la région.*

Effectivement, la région $\mathfrak{R}$, étant supposée normale (n° 177), est, par là même, continue (n° 41), et, dès lors, les deux points considérés peuvent être reliés l'un à l'autre par une suite d'arcs continus placés bout à bout dans la région $\mathfrak{R}$, le premier de ces arcs ayant pour extrémité initiale le premier point, et le dernier pour extrémité finale le second point (n° 39). Cela étant, le point à établir est une conséquence immédiate de l'alinéa V et du n° 38.

VII. *En désignant par* $(\upsilon, \psi, \ldots, \varphi)$ *un groupe quelconque d'intégrales particulières du système* (1), *la solution générale de ce dernier est donnée par les formules* (29).

Effectivement, tout groupe d'intégrales particulières du système, étant calculable par cheminement jusqu'en un point quelconque de la région $\mathfrak{R}$, peut être considéré comme déterminé par un groupe de conditions initiales où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ont des valeurs numériques assignées d'avance indépendamment du groupe d'intégrales que l'on considère.

Cela étant, le point que nous avons actuellement en vue est une conséquence immédiate de l'alinéa I.

VIII. *Les solutions particulières fournies par les formules* (29) *sont deux à deux opposées.*

Car si l'on remplace par leurs opposées les $n(n+1)$ constantes qui figurent dans les formules (29), les n^2 constantes (30) ne cessent pas de former un déterminant orthogonal.

183. Plaçons-nous actuellement dans le monde des quantités réelles, et ne considérons, parmi les intégrales du système (1), que celles qui sont réelles. La région, $\mathfrak{R}'$, dans laquelle nous ferons mouvoir les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ devra satisfaire, en pareil cas, aux deux conditions indiquées plus haut (n° 177), mais avec cette restriction essentielle que, pour tout point de la région, la forme quadratique (3) soit la somme (proprement dite) des carrés de n formes linéaires indépendantes à coefficients réels. En désignant

par (υ, φ, ..., ψ) une solution réelle particulière du système (1), la solution réelle la plus générale est donnée par les mêmes formules (29), où les constantes ne recevront, naturellement, que des valeurs réelles.

Si l'on considère l'une quelconque, (u, v, ..., w), de ces solutions réelles, le déterminant différentiel (2), étant différent de zéro dans toute l'étendue de la région $\mathfrak{R}'$, y reste ou constamment positif, ou constamment négatif. Dans les théories physiques où intervient le système (1) [avec l'hypothèse $n = 3$], on ne considère, parmi les solutions réelles, que celles où le déterminant dont il s'agit est positif : or, on voit immédiatement, en effectuant sur les formules (29) toutes les différentiations premières possibles, que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v}{\partial x_1} & \dfrac{\partial w}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v}{\partial x_2} & \dfrac{\partial w}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_3} & \dfrac{\partial v}{\partial x_3} & \dfrac{\partial w}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

est le produit des deux déterminants

$$\begin{vmatrix} l_1 & p_1 & q_1 \\ l_2 & p_2 & q_2 \\ l_3 & p_3 & q_3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \upsilon}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \upsilon}{\partial x_3} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_3} & \dfrac{\partial \psi}{\partial x_3} \end{vmatrix}.$$

Si donc on se place au point de vue des applications physiques, et si l'on suppose, comme il est en pareil cas naturel de le faire, que le second facteur de ce produit soit positif (*voir* n° 182, VIII), il faudra que le premier ait pour valeur $+1$.

184. Un cas très simple où les conditions de possibilité (n° 181) sont identiquement satisfaites est celui où *les* $\dfrac{n(n+1)}{2}$ *fonctions* μ *se réduisent toutes à des constantes,* ces constantes étant, naturellement, choisies de telle façon que la forme quadratique (3) soit décomposable en une somme algébrique de n carrés indépendants. La solution la plus générale du système (1) est donnée, en pareil cas,

par les formules

$$(35)\qquad \begin{cases} u = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + a_{n+1}, \\ v = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n + b_{n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ w = g_1 x_1 + g_2 x_2 + \ldots + g_n x_n + g_{n+1}; \end{cases}$$

dans ces dernières,

$$a_{n+1}, \quad b_{n+1}, \quad \ldots, \quad g_{n+1}$$

désignent n constantes entièrement arbitraires, et

$$(36)\qquad \begin{cases} a_1, & a_2, & \ldots, & a_n, \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_n, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ g_1, & g_2, & \ldots, & g_n \end{cases}$$

n^2 constantes assujetties aux $\dfrac{n(n+1)}{2}$ relations

$$(37)\qquad a_j a_k + b_j b_k + \ldots + g_j g_k = \mu_{j,k},$$

où (j, k) désigne une *combinaison* de deux entiers, *distincts ou non,* pris dans la suite 1, 2, ..., n.

Effectivement, les n^2 dérivées premières des fonctions u, v, ..., w, définies par (35), se réduisant respectivement aux constantes (36), il résulte des relations (37) que les fonctions dont il s'agit vérifient identiquement le système (1).

Réciproquement, on peut, moyennant un choix convenable des constantes figurant dans les formules (35), faire en sorte que les fonctions dont il s'agit coïncident avec des intégrales particulières assignées d'avance : car leurs n^2 dérivées premières peuvent, en vertu de (37), prendre toutes valeurs numériques vérifiant le système (1), et, cela étant, les formules (35) permettent de déterminer a_{n+1}, b_{n+1}, ..., g_{n+1} de telle sorte que, pour des valeurs numériques données de x_1, x_2, ..., x_n, les fonctions u, v, ..., w prennent elles-mêmes des valeurs numériques données.

Si l'on se place dans le monde des quantités réelles, on doit supposer que la forme quadratique (3) est la somme (proprement dite) des carrés de n formes linéaires indépendantes à coefficients réels, et l'on ne doit attribuer aux constantes des formules (35) que des valeurs réelles.

Lorsque les n fonctions $\mu_{1,1}$, $\mu_{2,2}$, ..., $\mu_{n,n}$ se réduisent à l'unité, et toutes les autres fonctions μ à zéro, les relations (37) sont celles qu'on obtient en exprimant que le déterminant des quantités (36) est orthogonal; les solutions réelles s'obtiendront en donnant aux constantes des valeurs réelles.

Étude du système formé par les conditions de possibilité.

185. Les $\frac{n(n+1)}{2}$ fonctions données, $\mu_{j,k}$, des variables x_1, x_2, ..., x_n devant vérifier identiquement, comme nous l'avons vu plus haut (nº **181**), les $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ conditions de possibilité, un point intéressant consiste à rechercher *quels sont, dans le choix de ces fonctions, les éléments dont on peut disposer arbitrairement*. Pour résoudre cette question, nous considérerons, dans les conditions de possibilité, les $\frac{n(n+1)}{2}$ fonctions dont il s'agit comme des inconnues, et nous mettrons le système différentiel résultant sous une forme orthonome complètement intégrable : comme nous allons le voir, il suffit ici, pour y parvenir, d'une résolution des plus simples. Cela fait, il ne restera plus qu'à fixer, dans la forme ainsi obtenue, l'économie des conditions initiales.

186. Les $\frac{n(n+1)}{2}$ fonctions inconnues μ ont chacune $\frac{n(n+1)}{2}$ dérivées secondes, ce qui fait en tout $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ dérivées secondes : il nous sera commode, pour l'étude que nous nous proposons actuellement, d'opérer entre ces dérivées secondes la répartition suivante, fondée sur la considération des indices dont se trouvent affectées, dans chacune d'elles, la fonction μ d'où elle provient, et les deux variables de différentiation. Quatre cas sont évidemment à considérer, suivant que, parmi ces quatre indices, un, deux, trois, ou tous les quatre sont distincts entre eux.

1° Les quatre indices sont égaux entre eux.

A un entier i, pris dans la suite 1, 2, ..., n, correspond une seule dérivée seconde de cette espèce, $\frac{\partial^2 \mu_{i,i}}{\partial x_i^2}$: cette dérivée ne figure pas dans les conditions de possibilité.

2° Deux des quatre indices sont distincts entre eux.

A une *combinaison*, (j, k), de deux entiers *distincts* pris dans la suite 1, 2, ..., n, correspondent sept dérivées secondes de cette espèce,

$$\frac{\partial^2 \mu_{j.j}}{\partial x_k^2}, \quad \frac{\partial^2 \mu_{k.k}}{\partial x_j^2}, \quad \frac{\partial^2 \mu_{j.k}}{\partial x_j \partial x_k},$$

$$\frac{\partial^2 \mu_{j.j}}{\partial x_j \partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 \mu_{k.k}}{\partial x_k \partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_j^2}, \quad \frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_k^2}:$$

les trois premières figurent seules dans l'équation (26) du n° 180, sans figurer ailleurs, et aucune des quatre dernières ne figure dans les conditions de possibilité.

3° Trois des quatre indices sont distincts entre eux.

A une *combinaison*, (i, j, k), de trois entiers *distincts* pris dans la suite 1, 2, ..., n, correspondent douze dérivées secondes de cette espèce,

$$\frac{\partial^2 \mu_{i.i}}{\partial x_j \partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 \mu_{j.j}}{\partial x_i \partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 \mu_{k,k}}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$\frac{\partial^2 \mu_{i.k}}{\partial x_i^2}, \quad \frac{\partial^2 \mu_{i.k}}{\partial x_j^2}, \quad \frac{\partial^2 \mu_{i,j}}{\partial x_k^2},$$

$$\frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 \mu_{j.k}}{\partial x_i \partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 \mu_{i.k}}{\partial x_j \partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 \mu_{i.k}}{\partial x_j \partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 \mu_{i.j}}{\partial x_k \partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 \mu_{i.j}}{\partial x_k \partial x_j}:$$

ces douze dérivées figurent seules dans le groupe (27) du n° 180, sans figurer ailleurs.

4° Les quatre indices sont distincts entre eux.

A une *combinaison*, (i, j, k, l), de quatre entiers *distincts* pris dans la suite 1, 2, ..., n, correspondent six dérivées de cette espèce,

$$\frac{\partial^2 \mu_{i.j}}{\partial x_k \partial x_l}, \quad \frac{\partial^2 \mu_{k.l}}{\partial x_i \partial x_j},$$

$$\frac{\partial^2 \mu_{i.k}}{\partial x_j \partial x_l}, \quad \frac{\partial^2 \mu_{j.l}}{\partial x_i \partial x_k},$$

$$\frac{\partial^2 \mu_{i.l}}{\partial x_j \partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 \mu_{j.k}}{\partial x_i \partial x_l}:$$

ces six dérivées figurent seules dans le groupe (28) du n° 180, sans figurer ailleurs.

Cela posé, nous résoudrons comme il suit les trois groupes (26), (27), (28), dont il vient d'être question.

S'il s'agit de (26), nous résoudrons par rapport à $\frac{\partial^2 \mu_{k,k}}{\partial x_j^2}$ ou par rapport à $\frac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_k^2}$, suivant que j est inférieur ou supérieur à k.

S'il s'agit de (27), nous résoudrons par rapport à

$$\frac{\partial^2 \mu_{i,i}}{\partial x_j \, \partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_i \, \partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 \mu_{k,k}}{\partial x_i \, \partial x_j}.$$

Supposant, enfin, qu'il s'agisse de (28), nous observerons, en premier lieu, que, les quatre entiers i, j, k, l étant donnés et distincts, les deux indices qui, dans chaque dérivée seconde, affectent la fonction μ, indiquent, non seulement à quelle fonction cette dérivée appartient, mais encore quelles sont les deux variables de différentiation, en sorte que ce dernier groupe, (28), peut s'écrire, sans ambiguïté, sous la forme abrégée

$$(1) \quad (i, j) + (k, l) + \ldots = (i, k) + (j, l) + \ldots = (i, l) + (j, k) + \ldots.$$

Nous observerons, en second lieu, que si, parmi les six parenthèses figurant dans les trois expressions ci-dessus, on considère les trois parenthèses où figure un même entier, l par exemple, ces trois parenthèses,

$$(i, l), \quad (j, l), \quad (k, l),$$

figurent respectivement dans les trois expressions. Nous observerons enfin que les sommes

$$i + l, \quad j + l, \quad k + l,$$

qui correspondent respectivement à ces trois parenthèses, sont nécessairement inégales entre elles. Cela étant, nous considérerons, parmi les six parenthèses, les trois où figure le plus grand des quatre entiers i, j, k, l, puis, parmi ces trois dernières, les deux auxquelles correspondent les plus grandes sommes; et nous résoudrons finalement les équations (1) [c'est-à-dire les équations (28) du n° 180] par rapport aux deux parenthèses dont il s'agit. Si, pour fixer les idées, on a

$$i < j < k < l,$$

ces deux parenthèses seront (j, l), (k, l), et les équations (1) devront être mises sous la forme

$$(k, l) = (i, l) + (j, k) - (i, j) + \ldots,$$
$$(j, l) = (i, l) + (j, k) - (i, k) + \ldots.$$

D'après ce que nous avons dit il y a un instant sur les divers groupes de dérivées secondes, il est clair que le système des conditions de possibilité, ainsi résolu, ne contient dans ses seconds membres aucune dérivée principale. Le système est, de plus, *orthonome :* car, ainsi qu'on le voit sans peine, chacune de ses relations est *normale* (n° 107) si l'on attribue aux variables indépendantes et aux inconnues les cotes suivantes :

	x_h	$\mu_{i,i}$	$\mu_{j,k}$ $(j \neq k)$
Cotes premières......	1	0	0
Cotes secondes.......	0	i	0
Cotes troisièmes.....	0	0	Le plus grand des deux entiers j, k
Cotes quatrièmes....	0	0	$j+k$

Dans le cas où n est égal à 2, ce système orthonome est évidemment *passif :* car on a alors $\frac{n^2(n^2-1)}{12}=1$, et le système se compose d'une équation unique.

Dans le cas où n est plus grand que 2, la passivité a encore lieu, comme nous allons le voir : pour l'établir, nous aurons recours à la règle du n° 163, et, en conséquence, nous nous occuperons tout d'abord d'évaluer, dans les conditions initiales convenablement écrites, la cote première maxima des premiers membres.

187. Supposons que, dans une fonction schématique des deux groupes de variables

$$x, \ y, \ \ldots, \ z \quad \text{et} \quad s, \ \ldots,$$

on effectue, conformément à la méthode du Chapitre V, une coupure à l'aide d'un ensemble, E, comprenant :

1° *Les produits deux à deux des différences*

$$x-x_0, \ y-y_0, \ \ldots, \ z-z_0;$$

2° *Les produits obtenus en multipliant l'une quelconque de*

ces dernières par l'une quelconque des différences

$$s - s_0, \quad \ldots ?$$

Je dis que *le résultat d'une pareille opération est*

$$(2) \quad (x - x_0)\,G(x) + (y - y_0)\,H(y) + \ldots + (z - z_0)\,P(z) + F(s, \ldots),$$

où $G(x)$, $H(y)$, ..., $P(z)$, $F(s, \ldots)$ *désignent des fonctions schématiques.*

I. *La proposition est vraie si le nombre des variables du premier groupe se réduit à* 1.

Supposons, en effet, que le premier groupe se réduise à la seule variable z, auquel cas l'ensemble E s'obtient en multipliant par $z - z_0$ chacune des différences $s - s_0$, ... En appliquant la méthode du Chapitre V, on voit que le résidu de la coupure est de la forme

$$T_0(s, \ldots) + (z - z_0)\,T(z, s, \ldots);$$

que l'expression $T_0(s, \ldots)$ s'obtient en ne pratiquant aucune coupure dans une fonction schématique des seules variables s, ..., et, par suite, est identique à une semblable fonction; enfin, que l'expression $T(z, s, \ldots)$ s'obtient en pratiquant la coupure

$$s - s_0, \quad \ldots,$$

dans une fonction schématique de toutes les variables z, s, ..., et, par suite, se réduit à une fonction schématique de z. Il vient donc, conformément à notre énoncé,

$$F(s, \ldots) + (z - z_0)\,P(z),$$

où $F(s, \ldots)$, $P(z)$ désignent deux fonctions schématiques.

II. *Si la proposition est vraie dans le cas où le premier groupe de variables en contient* p, *elle l'est encore dans le cas où il en contient* $p + 1$.

Soient x, y, ..., z les $p + 1$ variables du premier groupe; s, ... celles du second; E^0 l'ensemble partiel formé par les monomes de E où ne figure pas la différence $x - x_0$; E^1 l'ensemble partiel formé

par les monomes de E où elle figure. D'après la définition de E, l'ensemble E^0 comprend : 1° les produits deux à deux des différences

$$y-y_0, \quad \ldots, \quad z-z_0;$$

2° les produits qu'on obtient en multipliant l'une quelconque de ces dernières par l'une quelconque des différences

$$s-s_0, \quad \ldots.$$

Et l'ensemble E^1 comprend les produits de $x-x_0$ par chacune des différences

$$y-y_0, \quad \ldots, \quad z-z_0, \quad s-s_0, \quad \ldots.$$

Cela étant, si l'on nomme e^1 l'ensemble déduit de E^1 par la suppression du facteur $x-x_0$, qu'on pose, pour raison de symétrie, $e^0 = E^0$, et qu'on mette le résidu de la coupure sous la forme

$$T_0(y, \ldots, z, s, \ldots) + (x-x_0)\,T(x, y, \ldots, z, s, \ldots),$$

l'expression $T_0(y, \ldots, z, s, \ldots)$ s'obtiendra, comme on sait, en pratiquant dans une fonction schématique des seules variables $y, \ldots, z, s, \ldots$ la coupure e^0, et l'expression $T(x, y, \ldots, z, s, \ldots)$ en pratiquant dans une fonction schématique de toutes les variables $x, y, \ldots, z, s, \ldots$ la coupure (e^0, e^1). Or, d'après ce qui est admis pour p, le résidu de la première coupure est

$$(y-y_0)\,H(y) + \ldots + (z-z_0)\,P(z) + F(s, \ldots),$$

où $H(y), \ldots, P(z), F(s, \ldots)$ désignent des fonctions schématiques; d'autre part, l'ensemble (e^0, e^1), si on le rend irréductible, se réduit manifestement à e^1, c'est-à-dire à l'ensemble des différences

$$y-y_0, \quad \ldots, \quad z-z_0, \quad s-s_0, \quad \ldots,$$

et, par suite, $T(x, y, \ldots, z, s, \ldots)$ à une simple fonction schématique de x. En désignant par $G(x)$ une pareille fonction, on tombe finalement sur l'expression (2).

III. Le simple rapprochement de I et II prouve l'exactitude de notre énoncé général.

188. On déduit de là la conséquence particulière suivante :

Si, dans une fonction schématique des n variables $x, y, \ldots,$

z, s, on pratique, conformément à la méthode du Chapitre V, *une coupure à l'aide d'un ensemble,* E, *comprenant les divers produits deux à deux des différences*

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad \ldots, \quad z - z_0, \quad s - s_0,$$

on tombe sur l'expression

$$(x - x_0)\,G(x) + (y - y_0)\,H(y) + \ldots + (z - z_0)\,P(z) + F(s),$$

où $G(x)$, $H(y)$, ..., $P(z)$, $F(s)$ *désignent n fonctions schématiques.*

Partageons, en effet, les n variables en deux groupes comprenant respectivement les $n - 1$ premières d'entre elles, et la dernière; l'ensemble donné E pourra alors être considéré comme comprenant :

1° Les produits deux à deux des $n - 1$ différences

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad \ldots, \quad z - z_0;$$

2° Les produits qu'on obtient en multipliant l'une quelconque de ces dernières par $s - s_0$.

Cela étant, il suffit de se reporter à l'énoncé du numéro précédent.

189. Supposons que, dans une fonction schématique des deux groupes de variables

$$x, \quad y, \quad \ldots, \quad z \qquad \text{et} \qquad s, \quad \ldots, \quad t, \quad u,$$

on effectue, conformément à la méthode du Chapitre V, une coupure à l'aide d'un ensemble, E, comprenant :

1° *Les produits deux à deux des différences*

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad \ldots, \quad z - z_0, \quad s - s_0, \quad \ldots, \quad t - t_0, \quad u - u_0;$$

2° *Les carrés des différences*

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad \ldots, \quad z - z_0.$$

Je dis que *le résultat de l'opération est*

$$\begin{aligned}(3) \qquad & A(x - x_0) + B(y - y_0) + \ldots + C(z - z_0) \\ & + (s - s_0)\,F(s) + \ldots + (t - t_0)\,H(t) + P(u),\end{aligned}$$

où A, B, ..., C *désignent des constantes schématiques, et* $F(s)$, ..., $H(t)$, $P(u)$ *des fonctions schématiques.*

I. *La proposition est vraie si le nombre des variables du premier groupe est égal à* 1.

Supposons, en effet, que le premier groupe $x, y, \ldots, z$ se réduise à la seule variable z, auquel cas l'ensemble E comprend les produits deux à deux des différences

$$z - z_0, \quad s - s_0, \quad \ldots, \quad t - t_0, \quad u - u_0,$$

et le carré de la différence $z - z_0$. Si l'on nomme alors E^0 l'ensemble partiel que forment les produits deux à deux des différences autres que $z - z_0$, E^1 l'ensemble partiel que forment les produits de ces mêmes différences par $z - z_0$, e^1 l'ensemble déduit de E^1 par la suppression du facteur $z - z_0$; et qu'on pose, pour raison de symétrie, $e^0 = E^0$, il résulte des considérations exposées au Chapitre V que le résidu est de la forme

$$T_0(s, \ldots, t, u) + (z - z_0) T_1(s, \ldots, t, u),$$

où les expressions T_0 et T_1 s'obtiennent en pratiquant, dans une fonction schématique des seules variables $s, \ldots, t, u$, les coupures respectives e^0 et (e^0, e^1). Or, en vertu du numéro précédent, le résidu de la première coupure est

$$(s - s_0) F(s) + \ldots + (t - t_0) H(t) + P(u),$$

où $F(s)$, ..., $H(t)$, $P(u)$ désignent des fonctions schématiques; d'autre part, l'ensemble (e^0, e^1), si on le rend irréductible, se réduit manifestement à e^1, c'est-à-dire à l'ensemble des différences

$$s - s_0, \quad \ldots, \quad t - t_0, \quad u - u_0,$$

et, par suite, T_1 à une simple constante schématique C. Il vient donc bien, conformément à notre énoncé,

$$C(z - z_0) + (s - s_0) F(s) + \ldots + (t - t_0) H(t) + P(u).$$

II. *Si la proposition est vraie dans le cas où le premier groupe de variables en contient* p, *elle l'est encore dans le cas où il en contient* $p + 1$.

Soient $x, y, \ldots, z$, les $p+1$ variables du premier groupe, $s, \ldots, t, u$ celles du second; E^0 l'ensemble partiel formé par les monomes de E où ne figure pas la différence $x-x_0$; E^1 l'ensemble partiel formé par les monomes de E où elle figure au premier degré. D'après la définition de E, l'ensemble E^0 comprend : 1° les produits deux à deux des différences

$$y-y_0, \quad \ldots, \quad z-z_0, \quad s-s_0, \quad \ldots, \quad t-t_0, \quad u-u_0;$$

2° les carrés des différences

$$y-y_0, \quad \ldots, \quad z-z_0.$$

Et l'ensemble E^1 comprend les produits de $x-x_0$ par chacune des différences

$$y-y_0, \quad \ldots, \quad z-z_0, \quad s-s_0, \quad \ldots, \quad t-t_0, \quad u-u_0.$$

Cela étant, si l'on nomme e^1 l'ensemble déduit de E^1 par la suppression du facteur $x-x_0$, et qu'on pose pour raison de symétrie $e^0 = E^0$, il résulte des considérations exposées au Chapitre V que ce résidu est de la forme

$$T_0(y, \ldots, z, s, \ldots, t, u) + (x-x_0)\,T_1(y, \ldots, z, s, \ldots, t, u),$$

où les expressions T_0 et T_1 s'obtiennent en pratiquant, dans une fonction schématique des seules variables $y, \ldots, z, s, \ldots, t, u$, les coupures respectives e^0 et (e^0, e^1). Or, en vertu de ce qui est admis pour p, le résidu de la première coupure est

$$\begin{aligned} &B(y-y_0)+\ldots+C(z-z_0) \\ &\quad +(s-s_0)F(s)+\ldots+(t-t_0)H(t)+P(u), \end{aligned}$$

où B, ..., C désignent des constantes schématiques, et $F(s), \ldots, H(t)$, $P(u)$ des fonctions schématiques; d'autre part, l'ensemble (e^0, e^1), si on le rend irréductible, se réduit manifestement à e^1, c'est-à-dire à l'ensemble des différences

$$y-y_0, \quad \ldots, \quad z-z_0, \quad s-s_0, \quad \ldots, \quad t-t_0, \quad u-u_0,$$

et, par suite, T_1 à une simple constante schématique A. On tombe donc bien, conformément à notre énoncé, sur l'expression (3).

III. Le simple rapprochement des alinéas I et II prouve l'exactitude générale de notre proposition.

190. Revenons maintenant, en supposant, comme de raison, $n > 2$ (n° 186), au système *orthonome* (n° 186) formé par les conditions de possibilité du système

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} = \mu_{j,k},$$

défini au n° 177.

Les cotes premières des fonctions μ étant toutes égales à zéro, et celles des variables x toutes égales à 1, la cote première d'une dérivée quelconque des μ est égale à son ordre même. En se reportant, d'autre part, aux propositions des n°s 187 et 189 et à l'alinéa I du n° 81, il il est facile de se convaincre que, si l'on fixe l'économie des conditions initiales du système (aux inconnues μ), les diverses circonstances énumérées au n° 155 s'y trouvent réalisées, et que l'ordre maximum de leurs premiers membres est égal à 1. On a donc, dans le cas actuel, $\Gamma = 1$, d'où $\Gamma + 2 = 3$ (n° 163), et il suffira, pour former les conditions de passivité, d'éliminer les dérivées principales du second et du troisième ordre entre les équations du système (aux inconnues μ) et celles qui s'en déduisent par différentiations premières. *Ces conditions de passivité sont,* comme nous allons le voir, *identiquement vérifiées.*

Pour effectuer notre démonstration, nous ne laisserons tout d'abord subsister, dans les diverses équations du système actuellement étudié, que la partie linéaire et homogène du second ordre, et nous commencerons par faire voir que le système résultant de cette suppression est passif.

191. Considérons donc, comme il vient d'être dit, le système orthonome comprenant :

1° Les équations

$$\frac{\partial^2 \mu_{k,k}}{\partial x_j^2} = - \frac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_k^2} + 2 \frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_j \partial x_k}, \tag{4}$$

où (j, k) désigne une combinaison quelconque de deux entiers distincts pris dans la suite $1, 2, \ldots, n$, et k le plus grand des deux entiers j, k;

2° Les équations

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mu_{i,i}}{\partial x_j\,\partial x_k} = \dfrac{\partial^2 \mu_{i,j}}{\partial x_i\,\partial x_k} + \dfrac{\partial^2 \mu_{i,k}}{\partial x_i\,\partial x_j} - \dfrac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_i^2}, \\ \dfrac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_i\,\partial x_k} = \dfrac{\partial^2 \mu_{i,j}}{\partial x_j\,\partial x_k} + \dfrac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_i\,\partial x_j} - \dfrac{\partial^2 \mu_{i,k}}{\partial x_j^2}, \\ \dfrac{\partial^2 \mu_{k,k}}{\partial x_i\,\partial x_j} = \dfrac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_i\,\partial x_k} + \dfrac{\partial^2 \mu_{i,k}}{\partial x_j\,\partial x_k} - \dfrac{\partial^2 \mu_{i,j}}{\partial x_k^2}, \end{cases}$$

où (i, j, k) désigne une combinaison quelconque de trois entiers distincts pris dans la suite $1, 2, \ldots, n$;

3° Les équations

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 \mu_{i,j}}{\partial x_k\,\partial x_l} + \frac{\partial^2 \mu_{k,l}}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial^2 \mu_{i,k}}{\partial x_j\,\partial x_l} + \frac{\partial^2 \mu_{j,l}}{\partial x_i\,\partial x_k} = \frac{\partial^2 \mu_{i,l}}{\partial x_j\,\partial x_k} + \frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_i\,\partial x_l},$$

où (i, j, k, l) désigne une combinaison quelconque de quatre entiers distincts pris dans la suite $1, 2, \ldots, n$; ces équations (6) doivent être résolues de telle façon, d'abord, que les deux fonctions μ figurant respectivement dans les deux premiers membres aient chacune un de leurs indices égal au plus grand des quatre entiers i, j, k, l, puis, cela étant, que leurs sommes d'indices aient les deux plus grandes valeurs possibles (n° 186). Si, pour fixer les idées, on a $i<j<k<l$, les équations (6) devront, d'après cela, s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial^2 \mu_{k,l}}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial^2 \mu_{i,l}}{\partial x_j\,\partial x_k} + \frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_i\,\partial x_l} - \frac{\partial^2 \mu_{i,j}}{\partial x_k\,\partial x_l},$$
$$\frac{\partial^2 \mu_{j,l}}{\partial x_i\,\partial x_k} = \frac{\partial^2 \mu_{i,l}}{\partial x_j\,\partial x_k} + \frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_i\,\partial x_l} - \frac{\partial^2 \mu_{i,k}}{\partial x_j\,\partial x_l};$$

dans les premiers membres des formules de résolution, le plus petit des deux indices de μ sera donc au moins égal à 2, et le plus grand au moins égal à 4.

Il s'agit d'établir que *le système orthonome ci-dessus défini est passif :* nous ferons voir, à cet effet, que les diverses expressions *ultimes* (n° 109) de chaque dérivée principale du troisième ordre sont identiquement égales entre elles.

I. *Le point à établir est exact lorsque n est égal à 3.*

La considération des cotes premières et secondes suffit, en pareil cas, à établir l'orthonomie du système, qui se compose des six équa-

tions suivantes :

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mu_{1,1}}{\partial x_2\,\partial x_3} &= \frac{\partial^2 \mu_{1,2}}{\partial x_1\,\partial x_3} + \frac{\partial^2 \mu_{1,3}}{\partial x_1\,\partial x_2} - \frac{\partial^2 \mu_{2,3}}{\partial x_1^2};\\
\frac{\partial^2 \mu_{2,2}}{\partial x_1^2} &= 2\,\frac{\partial^2 \mu_{1,2}}{\partial x_1\,\partial x_2} - \frac{\partial^2 \mu_{1,1}}{\partial x_2^2},\\
\frac{\partial^2 \mu_{2,2}}{\partial x_1\,\partial x_3} &= \frac{\partial^2 \mu_{1,2}}{\partial x_2\,\partial x_3} + \frac{\partial^2 \mu_{2,3}}{\partial x_1\,\partial x_2} - \frac{\partial^2 \mu_{1,3}}{\partial x_2^2};\\
\frac{\partial^2 \mu_{3,3}}{\partial x_1^2} &= 2\,\frac{\partial^2 \mu_{1,3}}{\partial x_1\,\partial x_3} - \frac{\partial^2 \mu_{1,1}}{\partial x_3^2},\\
\frac{\partial^2 \mu_{3,3}}{\partial x_1\,\partial x_2} &= \frac{\partial^2 \mu_{2,3}}{\partial x_1\,\partial x_3} + \frac{\partial^2 \mu_{1,3}}{\partial x_2\,\partial x_3} - \frac{\partial^2 \mu_{1,2}}{\partial x_3^2},\\
\frac{\partial^2 \mu_{3,3}}{\partial x_2^2} &= 2\,\frac{\partial^2 \mu_{2,3}}{\partial x_2\,\partial x_3} - \frac{\partial^2 \mu_{2,2}}{\partial x_3^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces six équations ont toutes une même cote première égale à 2, et nous les avons partagées en trois groupes successifs d'après leurs cotes secondes croissantes 1, 2, 3 (n° 186). Le premier groupe se compose, comme on voit, d'une équation unique ayant pour premier membre une dérivée de $\mu_{1,1}$; le second groupe, de deux équations ayant pour premiers membres des dérivées de $\mu_{2,2}$; le troisième groupe, de trois équations ayant pour premiers membres des dérivées de $\mu_{3,3}$.

En exécutant sur les deux équations du second groupe les diverses différentiations propres à amener dans les premiers membres la dérivée cardinale du troisième ordre $\frac{\partial^3 \mu_{2,2}}{\partial x_1^2\,\partial x_3}$, il vient

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \mu_{2,2}}{\partial x_1^2\,\partial x_3} &= 2\,\frac{\partial^3 \mu_{1,2}}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3} - \frac{\partial^3 \mu_{1,1}}{\partial x_2^2\,\partial x_3},\\
\frac{\partial^3 \mu_{2,2}}{\partial x_1^2\,\partial x_3} &= \frac{\partial^3 \mu_{1,2}}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3} + \frac{\partial^3 \mu_{2,3}}{\partial x_1^2\,\partial x_2} - \frac{\partial^3 \mu_{1,3}}{\partial x_1\,\partial x_2^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Les seconds membres de ces deux relations ne contiennent d'autre dérivée principale du troisième ordre que $\frac{\partial^3 \mu_{1,1}}{\partial x_2^2\,\partial x_3}$; celle-ci n'admet d'ailleurs qu'une seule expression ultime, obtenue en différentiant la première équation (7) par rapport à x_2. En effectuant cette différentiation, il vient

$$
\frac{\partial^3 \mu_{1,1}}{\partial x_2^2\,\partial x_3} = \frac{\partial^3 \mu_{1,2}}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3} + \frac{\partial^3 \mu_{1,3}}{\partial x_1\,\partial x_2^2} - \frac{\partial^3 \mu_{2,3}}{\partial x_1^2\,\partial x_2},
$$

relation en vertu de laquelle les deux seconds membres de (8) deviennent identiques.

En exécutant maintenant sur le troisième groupe des équations (7) les diverses différentiations propres à amener dans les premiers membres les dérivées cardinales du troisième ordre

$$(9)\qquad \frac{\partial^3 \mu_{3.3}}{\partial x_1^2\,\partial x_2},\quad \frac{\partial^3 \mu_{3.3}}{\partial x_1\,\partial x_2^2},$$

il vient

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \mu_{3.3}}{\partial x_1^2\,\partial x_2} &= 2\,\frac{\partial^3 \mu_{1.3}}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3} - \frac{\partial^3 \mu_{1.1}}{\partial x_2\,\partial x_3^2},\\
\frac{\partial^3 \mu_{3.3}}{\partial x_1^2\,\partial x_2} &= \frac{\partial^3 \mu_{2.3}}{\partial x_1^2\,\partial x_3} + \frac{\partial^3 \mu_{1.3}}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3} - \frac{\partial^3 \mu_{1.2}}{\partial x_1\,\partial x_3^2},\\
\frac{\partial^3 \mu_{3.3}}{\partial x_1\,\partial x_2^2} &= \frac{\partial^3 \mu_{2.3}}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3} + \frac{\partial^3 \mu_{1.3}}{\partial x_2^2\,\partial x_3} - \frac{\partial^3 \mu_{1.2}}{\partial x_2\,\partial x_3^2},\\
\frac{\partial^3 \mu_{3.3}}{\partial x_1\,\partial x_2^2} &= 2\,\frac{\partial^3 \mu_{2.3}}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3} - \frac{\partial^3 \mu_{2.2}}{\partial x_1\,\partial x_3^2}.
\end{aligned}\right.$$

Les seconds membres de ces quatre relations ne contiennent d'autres dérivées principales que

$$\frac{\partial^3 \mu_{1.1}}{\partial x_2\,\partial x_3^2},\quad \frac{\partial^3 \mu_{2.2}}{\partial x_1\,\partial x_3^2};$$

chacune de celles-ci n'admet d'ailleurs qu'une seule expression ultime, qui s'obtient en différentiant par rapport à x_3 la première ou la troisième des équations (7); en effectuant ces différentiations, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 \mu_{1.1}}{\partial x_2\,\partial x_3^2} &= \frac{\partial^3 \mu_{1.2}}{\partial x_1\,\partial x_3^2} + \frac{\partial^3 \mu_{1.3}}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3} - \frac{\partial^3 \mu_{2.3}}{\partial x_1^2\,\partial x_3},\\
\frac{\partial^3 \mu_{2.2}}{\partial x_1\,\partial x_3^2} &= \frac{\partial^3 \mu_{1.2}}{\partial x_2\,\partial x_3^2} + \frac{\partial^3 \mu_{2.3}}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3} - \frac{\partial^3 \mu_{1.3}}{\partial x_2^2\,\partial x_3},
\end{aligned}$$

relations en vertu desquelles les équations (10) ne fournissent, pour chacune des dérivées cardinales (9), qu'une seule expression ultime.

Ainsi, toute dérivée *cardinale* du troisième ordre n'admet qu'une seule expression ultime : en vertu d'un raisonnement général exposé au Chapitre VII (n° **111**), il en est donc de même de toute dérivée principale du troisième ordre, et, dès lors, le système (7) est passif.

II. Nous avons, dans ce qui précède, étudié, pour $n = 3$, le système

linéaire et homogène du second ordre défini au début du présent numéro.

Supposant actuellement $n > 3$, mais quelconque, considérons les diverses équations obtenues en exécutant sur celles du système toutes les différentiations premières possibles. Dans ce système linéaire et homogène du troisième ordre, partageons les équations en groupes successifs d'après les cotes secondes croissantes de leurs premiers membres; dans le premier groupe, G_0, figureront exclusivement des dérivées (troisièmes) de fonctions μ à indices inégaux; le second groupe, G_1, aura pour premiers membres des dérivées (troisièmes) de $\mu_{1,1}$; le suivant, G_2, des dérivées (troisièmes) de $\mu_{2,2}$; etc.; enfin, le dernier, G_n, des dérivées (troisièmes) de $\mu_{n,n}$.

Considérant maintenant le premier groupe, G_0, qui s'obtient en différentiant les équations (6) résolues et les équations analogues, nous le partagerons en sous-groupes successifs d'après les cotes troisièmes croissantes de ses premiers membres; les premiers membres de ces sous-groupes seront des dérivées (troisièmes) de fonctions μ *à indices distincts,* et proviendront : pour le premier sous-groupe, des diverses fonctions où le plus grand des deux indices (inégaux) a la valeur 4 (à savoir $\mu_{2,4}$ et $\mu_{3,4}$); pour le sous-groupe suivant, des diverses fonctions où le plus grand des deux indices (inégaux) a la valeur 5; etc.; enfin, pour le dernier sous-groupe, des diverses fonctions où le plus grand des deux indices (inégaux) a la valeur n.

Considérant finalement l'un quelconque de ces sous-groupes, nous le partagerons en sous-groupes partiels successifs d'après les cotes quatrièmes croissantes de ses premiers membres : la cote quatrième d'une dérivée étant, pour une fonction μ à indices inégaux, la somme des deux indices de la fonction, il est clair que le sous-groupe partiel figurant *en tête de tous les autres* a pour premiers membres les dérivées principales du troisième ordre de la fonction $\mu_{2,4}$.

Le groupe G_0 se trouve ainsi partagé en *groupes définitifs,*

$$G'_0, \quad G''_0, \quad \ldots, \quad G_0^{(\mathrm{Q})},$$

jouissant de cette propriété que l'un quelconque d'entre eux ne contient dans ses seconds membres d'autres dérivées principales que les premiers membres des groupes antérieurs. Il est manifeste, d'ailleurs,

que les dérivées principales contenues dans les seconds membres des groupes suivants, G_1, G_2, ..., G_n, ne peuvent être : s'il s'agit de G_1, que les premiers membres de G_0 ; s'il s'agit de G_2, que les premiers membres de G_0 et G_1 ; etc. ; s'il s'agit enfin de G_n, que les premiers membres de G_0, G_1, G_2, ..., G_{n-1}.

Des groupes successifs

$$(11) \qquad G'_0, \quad G''_0, \quad \ldots, \quad G_0^{(Q)}, \quad G_1, \quad G_2, \quad \ldots, \quad G_n,$$

on peut, comme il est dit au Chapitre VII, déduire, pour chaque dérivée principale du troisième ordre, un certain nombre d'expressions *ultimes*. Cela étant, *chacune des dérivées principales figurant dans les premiers membres du premier des groupes* (11) *n'admet qu'une seule expression ultime.*

Effectivement, le groupe G'_0, ainsi que nous l'avons remarqué plus haut, a pour premiers membres les dérivées principales du troisième ordre de la seule fonction $\mu_{2,4}$. Le système actuellement étudié ne contient, d'ailleurs, qu'une seule équation ayant pour premier membre une dérivée de $\mu_{2,4}$, savoir :

$$\frac{\partial^2 \mu_{2,4}}{\partial x_1\, \partial x_3} = \frac{\partial^2 \mu_{1,4}}{\partial x_2\, \partial x_3} + \frac{\partial^2 \mu_{2,3}}{\partial x_1\, \partial x_4} - \frac{\partial^2 \mu_{1,3}}{\partial x_2\, \partial x_4};$$

le groupe G'_0 comprend donc, à l'exclusion de toute autre, les diverses équations déduites de la précédente par toutes les différentiations premières possibles, et ces équations ont évidemment leurs premiers membres tous distincts : il n'y a, dès lors, pour chacun de ceux-ci, qu'une seule expression ultime.

III. Supposant actuellement n égal ou supérieur à 3 (d'où $n+1>3$), remplaçons n par $n+1$, et désignons par

$$(12)$$

la suite de groupes, analogue à (11), que l'on déduit alors du système proposé à l'aide du mécanisme décrit à l'alinéa précédent; *désignons enfin par* G *l'un quelconque des groupes* (12) *autre que le premier.*

Si, dans le système (aux inconnues μ) *qui correspond à la valeur n, les conditions de passivité sont identiquement satisfaites,*

si, de plus, dans le système qui correspond à la valeur $n+1$, *chacune des dérivées principales figurant dans les premiers membres des groupes antérieurs à* G *n'admet qu'une seule expression ultime, il en est de même pour toute dérivée principale figurant dans les premiers membres du groupe* G.

Effectivement, pour passer du système [(4), (5), (6)], qui concerne la valeur n, au système analogue concernant la valeur $n+1$, il suffit d'adjoindre à [(4), (5), (6)] les diverses équations suivantes :

1° L'équation

$$\frac{\partial^2 \mu_{n+1,n+1}}{\partial x_i^2} = 2\frac{\partial^2 \mu_{i,n+1}}{\partial x_i\, \partial x_{n+1}} - \frac{\partial^2 \mu_{i,i}}{\partial x_{n+1}^2}, \tag{13}$$

où i désigne un entier arbitrairement choisi dans la suite 1, 2, ..., n;

2° Les trois équations

$$\frac{\partial^2 \mu_{n+1,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_k} = \frac{\partial^2 \mu_{j,n+1}}{\partial x_k\, \partial x_{n+1}} + \frac{\partial^2 \mu_{k,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_{n+1}} - \frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_{n+1}^2}, \tag{14}$$

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_{n+1}\, \partial x_k} &= \frac{\partial^2 \mu_{j,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_k} + \frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_j\, \partial x_{n+1}} - \frac{\partial^2 \mu_{k,n+1}}{\partial x_j^2}, \\ \frac{\partial^2 \mu_{k,k}}{\partial x_{n+1}\, \partial x_j} &= \frac{\partial^2 \mu_{k,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_k} + \frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_k\, \partial x_{n+1}} - \frac{\partial^2 \mu_{j,n+1}}{\partial x_k^2}, \end{aligned} \right.$$

où (j, k) désigne une combinaison de deux entiers distincts arbitrairement choisis dans la suite 1, 2, ..., n;

3° L'équation

$$\frac{\partial^2 \mu_{k,n+1}}{\partial x_i\, \partial x_j} = \frac{\partial^2 \mu_{i,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_k} + \frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_i\, \partial x_{n+1}} - \frac{\partial^2 \mu_{i,j}}{\partial x_k\, \partial x_{n+1}}, \tag{16}$$

où (i, j, k) désigne une combinaison de trois entiers distincts arbitrairement choisis dans la suite 1, 2, ..., n, et i le plus petit de ces trois entiers.

Cela étant, observons qu'une dérivée principale du troisième ordre figure *plusieurs fois* dans les premiers membres des groupes (12) si elle est *cardinale,* mais qu'elle n'y figure qu'une seule fois dans le cas contraire. Dès lors, puisque, par hypothèse, chacune des dérivées principales figurant dans les premiers membres des groupes antérieurs à G n'admet qu'une seule expression ultime, il suffit, pour établir la même propriété relativement aux dérivées (troisièmes) figu-

rant dans les premiers membres de G, de considérer exclusivement, parmi ces dernières, celles qui sont cardinales, c'est-à-dire qui s'obtiennent, conformément à notre définition du n° 92, par la comparaison de deux premiers membres du système appartenant à une même fonction inconnue : ces derniers, qui sont du second ordre, doivent donc avoir une variable de différentiation commune, et une seule.

Divers cas sont maintenant à distinguer.

Si l'entier $n+1$ ne figure, dans les deux premiers membres que l'on compare, ni comme indice de la fonction inconnue, ni comme indice d'une variable de différentiation, il ne figure non plus à aucun de ces deux titres dans les seconds membres correspondants : cela étant, les diverses expressions ultimes de la dérivée cardinale (troisième) que l'on considère s'obtiendront manifestement par la seule considération du système relatif à la valeur n, sur lequel on aura effectué toutes les différentiations premières relatives à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (avec exclusion de x_{n+1}). Donc, en vertu de ce qui est admis pour la valeur n, les diverses expressions ultimes de cette dérivée sont toutes identiques entre elles.

Si l'entier $n+1$ figure (soit comme indice de fonction, soit comme indice de variable) dans quelqu'un des deux premiers membres que l'on compare, si, de plus, ces derniers appartiennent à une fonction μ affectée d'indices inégaux [auquel cas les deux équations correspondantes n'appartiennent ni au type (4), ni au type (5)], il résulte de ce qui a été dit plus haut sur le mode de résolution des équations du type (6) [voir le début du présent n° 191] que, dans les premiers membres dont il s'agit, l'entier $n+1$ figure, non comme indice de variable, mais comme indice de fonction. Au cas donc où l'entier $n+1$ figure dans quelqu'un des deux premiers membres que l'on compare, les diverses hypothèses que nous avons à examiner sont les suivantes :

1° Un, et un seul, des deux indices de la fonction μ est égal à $n+1$;

2° Les deux indices de la fonction μ sont égaux entre eux et inférieurs à $n+1$, et, dans l'un au moins des deux premiers membres que l'on compare, quelqu'une des variables de différentiation est x_{n+1};

3° Les deux indices de la fonction μ sont égaux à $n+1$.

A. Première hypothèse. — Dans les premiers membres que l'on compare, un, et un seul, des deux indices de la fonction μ est égal à $n+1$.

En pareil cas, les équations appartiennent forcément l'une et l'autre au type (16), et ont respectivement pour premiers membres

$$\frac{\partial^2 \mu_{k,n+1}}{\partial x_i \, \partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 \mu_{k,n+1}}{\partial x_i \, \partial x_l},$$

où k, i, j, l désignent quatre entiers distincts inférieurs à $n+1$; d'ailleurs, d'après la manière même dont on forme les équations du type (16), k ne peut être ni le plus petit des trois entiers k, i, j, ni le plus petit des trois entiers k, i, l. Cela posé, trois cas sont à distinguer :

1° i, l'indice de la différentiation commune aux deux premiers membres que l'on compare, est à la fois inférieur à j et à l;

2° i est compris entre j et l, et l'on a, par exemple,

$$j < i < l;$$

3° i est à la fois supérieur à j et à l.

Dans le premier cas ($i<j$, $i<l$), i est nécessairement le plus petit des trois entiers k, i, j, et, de même, le plus petit des trois entiers k, i, l. Les deux équations dont on compare les premiers membres sont alors

$$\frac{\partial^2 \mu_{k,n+1}}{\partial x_i \, \partial x_j} = \frac{\partial^2 \mu_{i,n+1}}{\partial x_j \, \partial x_k} + \frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_i \, \partial x_{n+1}} - \frac{\partial^2 \mu_{i,j}}{\partial x_k \, \partial x_{n+1}},$$
$$\frac{\partial^2 \mu_{k,n+1}}{\partial x_i \, \partial x_l} = \frac{\partial^2 \mu_{i,n+1}}{\partial x_l \, \partial x_k} + \frac{\partial^2 \mu_{l,k}}{\partial x_i \, \partial x_{n+1}} - \frac{\partial^2 \mu_{i,l}}{\partial x_k \, \partial x_{n+1}}$$

(on suppose que la dérivée cardinale correspondante, $\frac{\partial^3 \mu_{k,n+1}}{\partial x_i \, \partial x_j \, \partial x_l}$, figure comme premier membre dans le groupe G). En différentiant ces deux équations par rapport à x_l et x_j respectivement, on obtient les deux équations suivantes du groupe G :

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^3 \mu_{k,n+1}}{\partial x_i \, \partial x_j \, \partial x_l} &= \frac{\partial^3 \mu_{i,n+1}}{\partial x_j \, \partial x_k \, \partial x_l} + \frac{\partial^3 \mu_{j,k}}{\partial x_i \, \partial x_l \, \partial x_{n+1}} - \frac{\partial^3 \mu_{i,j}}{\partial x_k \, \partial x_l \, \partial x_{n+1}}, \\ \frac{\partial^3 \mu_{k,n+1}}{\partial x_i \, \partial x_j \, \partial x_l} &= \frac{\partial^3 \mu_{l,n+1}}{\partial x_j \, \partial x_k \, \partial x_l} + \frac{\partial^3 \mu_{l,k}}{\partial x_i \, \partial x_j \, \partial x_{n+1}} - \frac{\partial^3 \mu_{i,l}}{\partial x_j \, \partial x_k \, \partial x_{n+1}}, \end{aligned} \right.$$

dont les seconds membres ne contiennent, comme il a été dit,

d'autres dérivées principales que les premiers membres des groupes antérieurs à G : il s'agit de constater qu'en remplaçant chacune de ces dérivées principales par son expression ultime unique, les deux seconds membres de (17) deviennent identiques l'un à l'autre, c'est-à-dire que l'on a identiquement, *après* la substitution,

$$(18)\quad \frac{\partial^3 \mu_{j,k}}{\partial x_l\,\partial x_i\,\partial x_{n+1}} + \frac{\partial^3 \mu_{i,l}}{\partial x_j\,\partial x_k\,\partial x_{n+1}} = \frac{\partial^3 \mu_{i,j}}{\partial x_l\,\partial x_k\,\partial x_{n+1}} + \frac{\partial^3 \mu_{l,k}}{\partial x_j\,\partial x_i\,\partial x_{n+1}}.$$

Or, dans notre système figure (après résolution convenable) le couple d'équations

$$\frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_l\,\partial x_i} + \frac{\partial^2 \mu_{i,l}}{\partial x_j\,\partial x_k} = \frac{\partial^2 \mu_{i,j}}{\partial x_l\,\partial x_k} + \frac{\partial^2 \mu_{l,k}}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial^2 \mu_{i,k}}{\partial x_j\,\partial x_l} + \frac{\partial^2 \mu_{j,l}}{\partial x_i\,\partial x_k},$$

qui, différentié par rapport à x_{n+1}, donne

$$(19)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^3 \mu_{j,k}}{\partial x_l\,\partial x_i\,\partial x_{n+1}} + \frac{\partial^3 \mu_{i,l}}{\partial x_j\,\partial x_k\,\partial x_{n+1}} &= \frac{\partial^3 \mu_{i,j}}{\partial x_l\,\partial x_k\,\partial x_{n+1}} + \frac{\partial^3 \mu_{l,k}}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_{n+1}} \\ &= \frac{\partial^3 \mu_{i,k}}{\partial x_j\,\partial x_l\,\partial x_{n+1}} + \frac{\partial^3 \mu_{j,l}}{\partial x_i\,\partial x_k\,\partial x_{n+1}}; \end{aligned}$$

les diverses fonctions μ qui figurent dans les équations (19) ayant chacune leurs deux indices distincts, et ces divers indices étant tous inférieurs à $n+1$, les équations (19), convenablement résolues, font partie des groupes antérieurs à G, et, si l'on y remplace chacune des dérivées principales qui y figurent par son expression ultime unique, elles se réduisent à des identités : la même chose a donc lieu pour la relation (18).

Dans le second cas ($j < i < l$), j est nécessairement le plus petit des trois entiers k, i, j, et i le plus petit des trois entiers k, i, l. Les deux équations dont on compare les premiers membres sont alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mu_{k,n+1}}{\partial x_i\,\partial x_j} &= \frac{\partial^2 \mu_{j,n+1}}{\partial x_i\,\partial x_k} + \frac{\partial^2 \mu_{i,k}}{\partial x_j\,\partial x_{n+1}} - \frac{\partial^2 \mu_{i,j}}{\partial x_k\,\partial x_{n+1}}, \\ \frac{\partial^2 \mu_{k,n+1}}{\partial x_i\,\partial x_l} &= \frac{\partial^2 \mu_{i,n+1}}{\partial x_l\,\partial x_k} + \frac{\partial^2 \mu_{l,k}}{\partial x_i\,\partial x_{n+1}} - \frac{\partial^2 \mu_{i,l}}{\partial x_k\,\partial x_{n+1}}. \end{aligned}$$

En les différentiant par rapport à x_l et x_j respectivement, on obtient les deux équations suivantes du groupe G :

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^3 \mu_{k,n+1}}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_l} &= \frac{\partial^3 \mu_{j,n+1}}{\partial x_i\,\partial x_k\,\partial x_l} + \frac{\partial^3 \mu_{i,k}}{\partial x_j\,\partial x_l\,\partial x_{n+1}} - \frac{\partial^3 \mu_{i,j}}{\partial x_k\,\partial x_l\,\partial x_{n+1}}, \\ \frac{\partial^3 \mu_{k,n+1}}{\partial x_i\,\partial x_l\,\partial x_j} &= \frac{\partial^3 \mu_{i,n+1}}{\partial x_l\,\partial x_k\,\partial x_j} + \frac{\partial^3 \mu_{l,k}}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_{n+1}} - \frac{\partial^3 \mu_{i,l}}{\partial x_k\,\partial x_j\,\partial x_{n+1}}, \end{aligned} \right.$$

dont les seconds membres ne contiennent, comme ceux de (17), d'autres dérivées principales que les premiers membres des groupes antérieurs à G : il s'agit de constater qu'en remplaçant chacune de ces dérivées principales par son expression ultime unique, les deux seconds membres de (20) deviennent identiques l'un à l'autre, c'est-à-dire que l'on a identiquement, *après* la substitution,

$$(21)\quad \frac{\partial^3 \mu_{j,n+1}}{\partial x_i\,\partial x_k\,\partial x_l}+\frac{\partial^3 \mu_{i,k}}{\partial x_j\,\partial x_l\,\partial x_{n+1}}+\frac{\partial^3 \mu_{i,l}}{\partial x_k\,\partial x_j\,\partial x_{n+1}} =\frac{\partial^3 \mu_{i,n+1}}{\partial x_l\,\partial x_k\,\partial x_j}+\frac{\partial^3 \mu_{l,k}}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_{n+1}}+\frac{\partial^3 \mu_{i,j}}{\partial x_k\,\partial x_l\,\partial x_{n+1}}.$$

Or, puisque j est ici le plus petit des trois entiers k, i, j, notre système comprend l'équation

$$\frac{\partial^2 \mu_{i,n+1}}{\partial x_j\,\partial x_k}=\frac{\partial^2 \mu_{j,n+1}}{\partial x_i\,\partial x_k}+\frac{\partial^2 \mu_{i,k}}{\partial x_j\,\partial x_{n+1}}-\frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_i\,\partial x_{n+1}},$$

qui, différentiée par rapport à x_l, donne

$$(22)\quad \frac{\partial^3 \mu_{i,n+1}}{\partial x_j\,\partial x_k\,\partial x_l}=\frac{\partial^3 \mu_{j,n+1}}{\partial x_i\,\partial x_k\,\partial x_l}+\frac{\partial^3 \mu_{i,k}}{\partial x_j\,\partial x_l\,\partial x_{n+1}}-\frac{\partial^3 \mu_{j,k}}{\partial x_i\,\partial x_l\,\partial x_{n+1}}.$$

Il comprend, d'autre part, après résolution convenable, le couple d'équations

$$\frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_i\,\partial x_l}+\frac{\partial^2 \mu_{i,l}}{\partial x_j\,\partial x_k}=\frac{\partial^2 \mu_{j,l}}{\partial x_i\,\partial x_k}+\frac{\partial^2 \mu_{i,k}}{\partial x_j\,\partial x_l}=\frac{\partial^2 \mu_{i,j}}{\partial x_l\,\partial x_k}+\frac{\partial^2 \mu_{l,k}}{\partial x_i\,\partial x_j},$$

qui, différentié par rapport à x_{n+1}, donne

$$(23)\quad \frac{\partial^3 \mu_{j,k}}{\partial x_i\,\partial x_l\,\partial x_{n+1}}+\frac{\partial^3 \mu_{i,l}}{\partial x_j\,\partial x_k\,\partial x_{n+1}}=\frac{\partial^3 \mu_{j,l}}{\partial x_i\,\partial x_k\,\partial x_{n+1}}+\frac{\partial^3 \mu_{i,k}}{\partial x_j\,\partial x_l\,\partial x_{n+1}} =\frac{\partial^3 \mu_{l,j}}{\partial x_l\,\partial x_k\,\partial x_{n+1}}+\frac{\partial^3 \mu_{l,k}}{\partial x_i\,\partial x_j\,\partial x_{n+1}}.$$

Les diverses fonctions μ qui figurent dans les équations (22) et (23) ayant chacune leurs deux indices distincts, les entiers i, j, k, l étant d'ailleurs tous inférieurs à $n+1$, et l'entier i (comme il a été dit) inférieur à k, les équations (23), convenablement résolues, et l'équation (22) font partie des groupes antérieurs à G, et, si l'on y remplace chacune des dérivées principales qui y figurent par son expression ultime unique, elles se réduisent à des identités : la même chose a

donc lieu pour toute combinaison de (22) et (23), et notamment pour (21).

Dans le troisième cas ($j < i$, $l < i$), j est nécessairement le plus petit des trois entiers k, i, j, et l le plus petit des trois entiers k, i, l. Les deux équations dont on compare les premiers membres sont alors

$$\frac{\partial^2 \mu_{k,n+1}}{\partial x_i\, \partial x_j} = \frac{\partial^2 \mu_{j,n+1}}{\partial x_i\, \partial x_k} + \frac{\partial^2 \mu_{i,k}}{\partial x_j\, \partial x_{n+1}} - \frac{\partial^2 \mu_{i,j}}{\partial x_k\, \partial x_{n+1}},$$
$$\frac{\partial^2 \mu_{k,n+1}}{\partial x_i\, \partial x_l} = \frac{\partial^2 \mu_{l,n+1}}{\partial x_i\, \partial x_k} + \frac{\partial^2 \mu_{i,k}}{\partial x_l\, \partial x_{n+1}} - \frac{\partial^2 \mu_{i,l}}{\partial x_k\, \partial x_{n+1}}.$$

En les différentiant par rapport à x_l et x_j respectivement, on obtient les deux équations suivantes du groupe G :

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^3 \mu_{k,n+1}}{\partial x_i\, \partial x_j\, \partial x_l} = \dfrac{\partial^3 \mu_{j,n+1}}{\partial x_i\, \partial x_k\, \partial x_l} + \dfrac{\partial^3 \mu_{i,k}}{\partial x_j\, \partial x_l\, \partial x_{n+1}} - \dfrac{\partial^3 \mu_{i,j}}{\partial x_k\, \partial x_l\, \partial x_{n+1}}, \\[2ex] \dfrac{\partial^3 \mu_{k,n+1}}{\partial x_i\, \partial x_l\, \partial x_j} = \dfrac{\partial^3 \mu_{l,n+1}}{\partial x_i\, \partial x_k\, \partial x_j} + \dfrac{\partial^3 \mu_{i,k}}{\partial x_l\, \partial x_j\, \partial x_{n+1}} - \dfrac{\partial^3 \mu_{i,l}}{\partial x_k\, \partial x_j\, \partial x_{n+1}}, \end{cases}$$

d'où l'on déduit, par soustraction,

$$(25)\quad \frac{\partial^3 \mu_{j,n+1}}{\partial x_i\, \partial x_k\, \partial x_l} + \frac{\partial^3 \mu_{i,l}}{\partial x_k\, \partial x_j\, \partial x_{n+1}} = \frac{\partial^3 \mu_{l,n+1}}{\partial x_i\, \partial x_k\, \partial x_j} + \frac{\partial^3 \mu_{i,j}}{\partial x_k\, \partial x_l\, \partial x_{n+1}}.$$

Or, notre système comprend (après résolution convenable) le couple d'équations

$$\frac{\partial^2 \mu_{j,n+1}}{\partial x_i\, \partial x_l} + \frac{\partial^2 \mu_{i,l}}{\partial x_j\, \partial x_{n+1}} = \frac{\partial^2 \mu_{i,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_l} + \frac{\partial^2 \mu_{j,l}}{\partial x_i\, \partial x_{n+1}} = \frac{\partial^2 \mu_{l,n+1}}{\partial x_i\, \partial x_j} + \frac{\partial^2 \mu_{i,j}}{\partial x_l\, \partial x_{n+1}};$$

l'entier i étant ici supérieur à j et l, si l'on suppose, pour fixer les idées, $j < l$, ce couple doit être résolu par rapport aux deux dérivées $\frac{\partial^2 \mu_{i,n+1}}{\partial x_j \partial x_l}$, $\frac{\partial_2 \mu_{l,n+1}}{\partial x_i \partial x_j}$, et fournira notamment l'équation

$$\frac{\partial^2 \mu_{l,n+1}}{\partial x_i\, \partial x_j} = \frac{\partial^2 \mu_{j,n+1}}{\partial x_i\, \partial x_l} + \frac{\partial^2 \mu_{i,l}}{\partial x_j\, \partial x_{n+1}} - \frac{\partial^2 \mu_{i,j}}{\partial x_l\, \partial x_{n+1}},$$

d'où l'on déduit, par une différentiation relative à x_k, la relation (25). Cette dernière, convenablement résolue, figure donc dans les groupes antérieurs à G, et se réduit dès lors à une identité quand on y remplace chacune des dérivées principales qui y figurent par son expression ultime unique.

B. Deuxième hypothèse. — Dans les premiers membres que l'on compare, les deux indices de la fonction μ sont égaux entre eux et inférieurs à $n+1$, et, dans l'un au moins de ces premiers membres, l'une des variables de différentiation est x_{n+1}.

L'entier $n+1$ ne pouvant être deux fois variable de différentiation pour un même premier membre, trois cas seulement sont à distinguer suivant que les premiers membres dont on opère la comparaison sont respectivement :

1° $$\frac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_{n+1}\,\partial x_k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_{n+1}\,\partial x_l},$$

où j, k, l désignent trois entiers distincts inférieurs à $n+1$;

2° $$\frac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_{n+1}\,\partial x_k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_k\,\partial x_l},$$

où j, k, l ont la même signification;

3° $$\frac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_{n+1}\,\partial x_k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_k^2},$$

où l'on a $k < j < n+1$.

Dans le premier cas, les deux équations comparées appartiennent l'une et l'autre au type (15), et sont de la forme

$$\frac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_{n+1}\,\partial x_k} = \frac{\partial^2 \mu_{j,n+1}}{\partial x_j\,\partial x_k} + \frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_j\,\partial x_{n+1}} - \frac{\partial^2 \mu_{k,n+1}}{\partial x_j^2},$$
$$\frac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_{n+1}\,\partial x_l} = \frac{\partial^2 \mu_{j,n+1}}{\partial x_j\,\partial x_l} + \frac{\partial^2 \mu_{j,l}}{\partial x_j\,\partial x_{n+1}} - \frac{\partial^2 \mu_{l,n+1}}{\partial x_j^2}.$$

En les différentiant par rapport à x_l et x_k respectivement, on obtient les deux équations suivantes du groupe G :

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^3 \mu_{j,j}}{\partial x_{n+1}\,\partial x_k\,\partial x_l} = \dfrac{\partial^3 \mu_{j,n+1}}{\partial x_j\,\partial x_k\,\partial x_l} + \dfrac{\partial^3 \mu_{j,k}}{\partial x_j\,\partial x_{n+1}\,\partial x_l} - \dfrac{\partial^3 \mu_{k,n+1}}{\partial x_j^2\,\partial x_l}, \\[2ex] \dfrac{\partial^3 \mu_{j,j}}{\partial x_{n+1}\,\partial x_l\,\partial x_k} = \dfrac{\partial^3 \mu_{j,n+1}}{\partial x_j\,\partial x_l\,\partial x_k} + \dfrac{\partial^3 \mu_{j,l}}{\partial x_j\,\partial x_{n+1}\,\partial x_k} - \dfrac{\partial^3 \mu_{l,n+1}}{\partial x_j^2\,\partial x_k}, \end{cases}$$

d'où l'on déduit, par soustraction,

$$(27)\quad \frac{\partial^3 \mu_{j,k}}{\partial x_j\,\partial x_l\,\partial x_{n+1}} + \frac{\partial^3 \mu_{l,n+1}}{\partial x_j^2\,\partial x_k} = \frac{\partial^3 \mu_{k,n+1}}{\partial x_j^2\,\partial x_l} + \frac{\partial^3 \mu_{j,l}}{\partial x_j\,\partial x_k\,\partial x_{n+1}}.$$

Or, dans notre système figure (après résolution convenable) le couple

d'équations

$$\frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_l\,\partial x_{n+1}} + \frac{\partial^2 \mu_{l,n+1}}{\partial x_j\,\partial x_k} = \frac{\partial^2 \mu_{k,n+1}}{\partial x_j\,\partial x_l} + \frac{\partial^2 \mu_{j,l}}{\partial x_k\,\partial x_{n+1}} = \frac{\partial^2 \mu_{j,n+1}}{\partial x_k\,\partial x_l} + \frac{\partial^2 \mu_{k,l}}{\partial x_j\,\partial x_{n+1}},$$

qui, différentié par rapport à x_j, donne

$$(28)\qquad \frac{\partial^3 \mu_{j,k}}{\partial x_j\,\partial x_l\,\partial x_{n+1}} + \frac{\partial^3 \mu_{l,n+1}}{\partial x_j^2\,\partial x_k} = \frac{\partial^3 \mu_{k,n+1}}{\partial x_j^2\,\partial x_l} + \frac{\partial^3 \mu_{j,l}}{\partial x_j\,\partial x_k\,\partial x_{n+1}}$$
$$= \frac{\partial^3 \mu_{j,n+1}}{\partial x_j\,\partial x_k\,\partial x_l} + \frac{\partial^3 \mu_{k,l}}{\partial x_j^2\,\partial x_{n+1}};$$

les diverses fonctions μ qui figurent dans les relations (28) ayant chacune leurs deux indices distincts, tandis que la fonction $\mu_{j,j}$ a ses deux indices égaux, les équations (28), convenablement résolues, font partie des groupes antérieurs à G, et, si l'on y remplace chacune des dérivées principales qui y figurent par son expression ultime unique, elles se réduisent à des identités : la même chose a donc lieu pour la relation (27).

Dans le second cas, les deux équations comparées sont de la forme

$$\frac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_{n+1}\,\partial x_k} = \frac{\partial^2 \mu_{j,n+1}}{\partial x_j\,\partial x_k} + \frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_j\,\partial x_{n+1}} - \frac{\partial^2 \mu_{k,n+1}}{\partial x_j^2},$$
$$\frac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_k\,\partial x_l} = \frac{\partial^2 \mu_{j,l}}{\partial x_j\,\partial x_k} + \frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_j\,\partial x_l} - \frac{\partial^2 \mu_{k,l}}{\partial x_j^2}.$$

En les différentiant par rapport à x_l et x_{n+1} respectivement, on obtient les deux équations suivantes du groupe G :

$$\frac{\partial^3 \mu_{j,j}}{\partial x_{n+1}\,\partial x_k\,\partial x_l} = \frac{\partial^3 \mu_{j,n+1}}{\partial x_j\,\partial x_k\,\partial x_l} + \frac{\partial^3 \mu_{j,k}}{\partial x_j\,\partial x_{n+1}\,\partial x_l} - \frac{\partial^3 \mu_{k,n+1}}{\partial x_j^2\,\partial x_l},$$
$$\frac{\partial^3 \mu_{j,j}}{\partial x_k\,\partial x_l\,\partial x_{n+1}} = \frac{\partial^3 \mu_{j,l}}{\partial x_j\,\partial x_k\,\partial x_{n+1}} + \frac{\partial^3 \mu_{j,k}}{\partial x_j\,\partial x_l\,\partial x_{n+1}} - \frac{\partial^3 \mu_{k,l}}{\partial x_j^2\,\partial x_{n+1}};$$

on vérifiera, comme dans le cas précédent, que la relation obtenue en les retranchant membre à membre se réduit à une identité par l'élimination des dérivées principales.

Dans le troisième cas, les deux équations comparées sont de la forme

$$\frac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_{n+1}\,\partial x_k} = \frac{\partial^2 \mu_{j,n+1}}{\partial x_j\,\partial x_k} + \frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_j\,\partial x_{n+1}} - \frac{\partial^2 \mu_{k,n+1}}{\partial x_j^2},$$
$$\frac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_k^2} = 2\,\frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_j\,\partial x_k} - \frac{\partial^2 \mu_{k,k}}{\partial x_j^2}.$$

En, les différentiant par rapport à x_k et x_{n+1} respectivement, on obtient les deux équations suivantes du groupe G :

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^3 \mu_{j,j}}{\partial x_{n+1}\, \partial x_k^2} &= \frac{\partial^3 \mu_{j,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_k^2} + \frac{\partial^3 \mu_{j,k}}{\partial x_j\, \partial x_{n+1}\, \partial x_k} - \frac{\partial^3 \mu_{k,n+1}}{\partial x_j^2\, \partial x_k}, \\ \frac{\partial^3 \mu_{j,j}}{\partial x_k^2\, \partial x_{n+1}} &= 2\frac{\partial^3 \mu_{j,k}}{\partial x_j\, \partial x_k\, \partial x_{n+1}} - \frac{\partial^3 \mu_{k,k}}{\partial x_j^2\, \partial x_{n+1}}, \end{aligned} \right.$$

d'où l'on déduit, par soustraction,

$$(30)\quad \frac{\partial^3 \mu_{j,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_k^2} + \frac{\partial^3 \mu_{k,k}}{\partial x_j^2\, \partial x_{n+1}} = \frac{\partial^3 \mu_{j,k}}{\partial x_j\, \partial x_k\, \partial x_{n+1}} + \frac{\partial^3 \mu_{k,n+1}}{\partial x_j^2\, \partial x_k}.$$

Or, dans notre système figure l'équation

$$\frac{\partial^2 \mu_{k,k}}{\partial x_j\, \partial x_{n+1}} = \frac{\partial^2 \mu_{k,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_k} + \frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_k\, \partial x_{n+1}} - \frac{\partial^2 \mu_{j,n+1}}{\partial x_k^2},$$

d'où l'on déduit, par une différentiation relative à x_j, la relation (30). Cette dernière, convenablement résolue, figure donc dans les groupes antérieurs à G, et se réduit dès lors à une identité par l'élimination des dérivées principales.

C. Troisième hypothèse. — Dans les premiers membres que l'on compare, les indices de la fonction μ sont tous deux égaux à $n+1$.

Deux cas sont à distinguer, suivant que les premiers membres dont on opère la comparaison sont respectivement

1° $$\frac{\partial^2 \mu_{n+1,n+1}}{\partial x_j^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \mu_{n+1,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_k},$$

où j, k désignent deux entiers distincts inférieurs à $n+1$;

2° $$\frac{\partial^2 \mu_{n+1,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \mu_{n+1,n+1}}{\partial x_j\, x_l},$$

où j, k, l désignent trois entiers distincts inférieurs à $n+1$.

Dans le premier cas, les deux équations seront [types (13) et (14)]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mu_{n+1,n+1}}{\partial x_j^2} &= 2\frac{\partial^2 \mu_{j,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_{n+1}} - \frac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_{n+1}^2}, \\ \frac{\partial^2 \mu_{n+1,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_k} &= \frac{\partial^2 \mu_{j,n+1}}{\partial x_k\, \partial x_{n+1}} + \frac{\partial^2 \mu_{k,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_{n+1}} - \frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_{n+1}^2}. \end{aligned}$$

En différentiant la première par rapport à x_k et la seconde par

rapport à x_j, on obtient les deux équations suivantes du groupe G :

$$\frac{\partial^3 \mu_{n+1,n+1}}{\partial x_j^2\, \partial x_k} = 2\frac{\partial^3 \mu_{j,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_k\, \partial x_{n+1}} - \frac{\partial^3 \mu_{j,j}}{\partial x_k\, \partial x_{n+1}^2},$$

$$\frac{\partial^3 \mu_{n+1,n+1}}{\partial x_j^2\, \partial x_k} = \frac{\partial^3 \mu_{j,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_k\, \partial x_{n+1}} + \frac{\partial^3 \mu_{k,n+1}}{\partial x_j^2\, \partial x_{n+1}} - \frac{\partial^3 \mu_{j,k}}{\partial x_j\, \partial x_{n+1}^2},$$

d'où l'on déduit, par soustraction,

$$(31) \qquad \frac{\partial^3 \mu_{j,j}}{\partial x_k\, \partial x_{n+1}^2} + \frac{\partial^3 \mu_{k,n+1}}{\partial x_j^2\, \partial x_{n+1}} = \frac{\partial^3 \mu_{j,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_k\, \partial x_{n+1}} + \frac{\partial^3 \mu_{j,k}}{\partial x_j\, \partial x_{n+1}^2}.$$

Or, dans notre système figure l'équation

$$\frac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_k\, \partial x_{n+1}} = \frac{\partial^2 \mu_{j,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_k} + \frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_j\, \partial x_{n+1}} - \frac{\partial^2 \mu_{k,n+1}}{\partial x_j^2},$$

d'où l'on déduit, par une différentiation relative à x_{n+1}, la relation (31). Cette dernière, convenablement résolue, fait donc partie des groupes antérieurs à G, et, dès lors, se réduit nécessairement à une identité quand on y remplace chacune des dérivées principales qui y figurent par son expression ultime unique.

Dans le second cas, les deux équations comparées seront [type (14)]

$$\frac{\partial^2 \mu_{n+1,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_k} = \frac{\partial^2 \mu_{j,n+1}}{\partial x_k\, \partial x_{n+1}} + \frac{\partial^2 \mu_{k,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_{n+1}} - \frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_{n+1}^2},$$

$$\frac{\partial^2 \mu_{n+1,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_l} = \frac{\partial^2 \mu_{j,n+1}}{\partial x_l\, \partial x_{n+1}} + \frac{\partial^2 \mu_{l,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_{n+1}} - \frac{\partial^2 \mu_{j,l}}{\partial x_{n+1}^2}.$$

En différentiant la première par rapport à x_l et la seconde par rapport à x_k, on tombe sur les deux équations suivantes du groupe G :

$$\frac{\partial^3 \mu_{n+1,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_k\, \partial x_l} = \frac{\partial^3 \mu_{j,n+1}}{\partial x_k\, \partial x_l\, \partial x_{n+1}} + \frac{\partial^3 \mu_{k,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_l\, \partial x_{n+1}} - \frac{\partial^3 \mu_{j,k}}{\partial x_l\, \partial x_{n+1}^2},$$

$$\frac{\partial^3 \mu_{n+1,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_k\, \partial x_l} = \frac{\partial^3 \mu_{j,n+1}}{\partial x_k\, \partial x_l\, \partial x_{n+1}} + \frac{\partial^3 \mu_{l,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_k\, \partial x_{n+1}} - \frac{\partial^3 \mu_{j,l}}{\partial x_k\, \partial x_{n+1}^2},$$

d'où l'on déduit, par soustraction,

$$(32) \qquad \frac{\partial^3 \mu_{k,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_l\, \partial x_{n+1}} + \frac{\partial^3 \mu_{j,l}}{\partial x_k\, \partial x_{n+1}^2} = \frac{\partial^3 \mu_{l,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_k\, \partial x_{n+1}} + \frac{\partial^3 \mu_{j,k}}{\partial x_l\, \partial x_{n+1}^2}.$$

Or, dans notre système figure (après résolution convenable) le couple d'équations

$$\frac{\partial^2 \mu_{k,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_l} + \frac{\partial^2 \mu_{j,l}}{\partial x_k\, \partial x_{n+1}} = \frac{\partial^2 \mu_{l,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_k} + \frac{\partial^2 \mu_{j,k}}{\partial x_l\, \partial x_{n+1}} = \frac{\partial^2 \mu_{j,n+1}}{\partial x_k\, \partial x_l} + \frac{\partial^2 \mu_{k,l}}{\partial x_j\, \partial x_{n+1}},$$

qui, différentié par rapport à x_{n+1}, donne

$$(33)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^3 \mu_{k,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_l\, \partial x_{n+1}} + \frac{\partial^3 \mu_{j,l}}{\partial x_k\, \partial x_{n+1}^2} &= \frac{\partial^3 \mu_{l,n+1}}{\partial x_j\, \partial x_k\, \partial x_{n+1}} + \frac{\partial^3 \mu_{j,k}}{\partial x_l\, \partial x_{n+1}^2} \\ &= \frac{\partial^3 \mu_{j,n+1}}{\partial x_k\, \partial x_l\, \partial x_{n+1}} + \frac{\partial^3 \mu_{k,l}}{\partial x_j\, \partial x_{n+1}^2}; \end{aligned} \right.$$

les diverses fonctions μ qui figurent dans les équations (33) ayant chacune leurs deux indices inégaux, tandis que la fonction $\mu_{n+1,n+1}$ a ses deux indices égaux, les équations (33), convenablement résolues, font partie des groupes antérieurs à G, et, si l'on y remplace chacune des dérivées principales qui y figurent par son expression ultime unique, elles se réduisent à des identités : la même chose a donc lieu pour la relation (32).

IV. *Si les conditions de passivité sont identiquement satisfaites dans le système* (aux inconnues μ) *qui correspond à la valeur* n, *elles ne peuvent manquer de l'être aussi dans celui qui correspond à la valeur* $n+1$.

C'est là une conséquence immédiate des alinéas II et III.

V. *Les conditions de passivité du système orthonome* (aux inconnues μ) *spécifié au début du présent n° 191 sont identiquement satisfaites, quel que soit* n.

Il suffit, pour s'en convaincre, de rapprocher l'un de l'autre les alinéas I et IV.

192. *Le système orthonome* (linéaire, mais non homogène, par rapport aux dérivées secondes des inconnues μ) *spécifié au n° 186 est passif.*

Les conditions de passivité de ce système se forment, comme il a été dit plus haut (n° 190), en éliminant les dérivées principales du second et du troisième ordre entre les équations du système lui-même et celles qu'on en déduit par différentiations premières. Or, il résulte du numéro précédent que tous les termes du troisième ordre disparaissent dans cette élimination : il suffit donc, pour établir que les conditions de passivité sont identiquement satisfaites, de faire voir qu'elles sont vérifiées pour toutes les valeurs *numériques* attribuées

aux fonctions μ, à leurs dérivées du premier ordre, et à leurs dérivées paramétriques du second ordre.

Effectivement, les relations dont il s'agit sont, au point de vue de l'intégration, des conséquences nécessaires du système (nº 112), et il suffit dès lors, pour prouver qu'elles sont identiquement vérifiées au point de vue numérique, d'établir que *le système en question admet certainement quelque groupe d'intégrales où les inconnues* μ, *leurs dérivées premières et leurs dérivées paramétriques secondes prennent, pour des valeurs numériques données de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *des valeurs numériques données :* dans cette démonstration, on devra supposer, puisque les termes d'ordre inférieur à 2 des équations du système ont pour dénominateur commun le déterminant

$$\begin{vmatrix} \mu_{1,1} & \mu_{1,2} & \cdots & \mu_{1,n} \\ \mu_{2,1} & \mu_{2,2} & \cdots & \mu_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{n,1} & \mu_{n,2} & \cdots & \mu_{n,n} \end{vmatrix} \qquad (\mu_{j,k} = \mu_{k,j}),$$

que, pour les valeurs numériques assignées aux μ, la forme quadratique spécifiée au nº 177 est décomposable en une somme algébrique de n carrés indépendants.

Cela étant, considérons les $\frac{n(n+1)}{2}$ équations

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} = \mu_{j,k}$$

du nº 177, les $\frac{n^2(n+1)}{2}$ équations du second ordre qui s'en déduisent par différentiations premières, et les $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ équations du troisième ordre qui s'en déduisent par différentiations secondes : comme au nº 179, nous désignerons ces trois groupes d'équations respectivement par S_1, S_1', S_1''. Si, dans les équations S_1, on remplace les μ par les valeurs qui leur sont assignées d'avance, on pourra trouver pour les n^2 quantités

$$(34)\qquad \left\{\begin{array}{llll} \frac{\partial u}{\partial x_1}, & \frac{\partial v}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial w}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}, & \frac{\partial v}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial w}{\partial x_2}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \frac{\partial u}{\partial x_n}, & \frac{\partial v}{\partial x_n}, & \ldots, & \frac{\partial w}{\partial x_n}, \end{array}\right.$$

considérées comme autant de variables indépendantes distinctes, des valeurs numériques qui vérifient les équations S_1; pour ces valeurs numériques, le déterminant des quantités (34) est d'ailleurs nécessairement différent de zéro. Si maintenant, dans les $\frac{n^2(n+1)}{2}$ équations S'_1, on remplace les dérivées premières des μ par les valeurs qui leur sont assignées d'avance, et les quantités (34) par les valeurs précédemment trouvées, on pourra déterminer, pour les $\frac{n^2(n+1)}{2}$ dérivées secondes de $u, v, \ldots, w$, considérées comme autant de variables indépendantes distinctes, des valeurs numériques qui vérifient ces $\frac{n^2(n+1)}{2}$ équations. Calculons finalement, à l'aide du système orthonome formé par les conditions de possibilité (n° 186), les valeurs numériques que doivent prendre les dérivées principales secondes des μ, quand on donne aux μ, à leurs dérivées premières et à leurs dérivées paramétriques secondes les valeurs numériques assignées d'avance; puis remplaçons, dans les $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ équations S''_1, les dérivées paramétriques secondes des μ par les valeurs numériques assignées d'avance, leurs dérivées principales secondes par les valeurs numériques ainsi calculées, et les dérivées premières et secondes de $u, v, \ldots, w$ par les valeurs numériques précédemment trouvées : les $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ équations résultantes se réduiront alors, en vertu du calcul d'élimination exécuté au n° 180, à un système de $\frac{n^2(n+1)(n+2)}{6}$ équations résolubles par rapport aux $\frac{n^2(n+1)(n+2)}{6}$ dérivées troisièmes de $u, v, \ldots, w$, et fourniront pour ces dernières des valeurs numériques déterminées.

Cela fait, choisissons à volonté, pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$, des valeurs initiales, $(x_1)_0, (x_2)_0, \ldots, (x_n)_0$, puis prenons pour $u, v, \ldots, w$ des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ arbitrairement choisies sous les seules restrictions que les valeurs initiales de leurs dérivées premières, secondes et troisièmes soient celles qui viennent d'être calculées successivement. Formons enfin, à l'aide des n fonctions dont il s'agit, les $\frac{n(n+1)}{2}$ expressions $\sum \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}$, où (j, k) désigne une combinaison quelconque de deux entiers, distincts ou non, pris dans la suite $1, 2, \ldots, n$: les $\frac{n(n+1)}{2}$ fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ainsi

obtenues et leurs dérivées premières et secondes ont alors comme valeurs initiales les valeurs numériques qui sont assignées d'avance aux μ, à leurs dérivées premières, à leurs dérivées paramétriques secondes, et celles que le système des conditions de possibilité (n° 186) détermine alors pour leurs dérivées principales secondes.

Cela étant, remplaçons dans le système S_1 les seconds membres μ par les $\frac{n(n+1)}{2}$ fonctions dont il s'agit : il est clair que le système résultant sera identiquement vérifié par les n fonctions $u, v, \ldots, w$, formées précédemment ; comme le déterminant différentiel de ces n fonctions est différent de zéro, les conditions de possibilité ne peuvent manquer d'être satisfaites, et, dès lors, les $\frac{n(n+1)}{2}$ fonctions que nous venons de choisir pour seconds membres de S_1 ne peuvent manquer de fournir un groupe d'intégrales du système formé par les conditions de possibilité : or, pour les valeurs initiales $(x_1)_0$, $(x_2)_0, \ldots, (x_n)_0$, elles prennent bien, ainsi que leurs dérivées premières et leurs dérivées paramétriques secondes, les valeurs initiales assignées d'avance.

193. Si aux équations (26), (27), (28) du n° 180 on applique la résolution indiquée au n° 186, les premiers membres des groupes résultants ne contiennent, s'il s'agit de (26) et (27), que des fonctions μ à indices égaux, et, s'il s'agit de (28), que des fonctions μ à indices inégaux : nous avons observé, en outre, qu'après cette résolution toute fonction μ à indices inégaux figurant dans un premier membre a son plus petit indice au moins égal à 2 et son plus grand indice au moins égal à 4. Nous venons de démontrer enfin que le système (orthonome) ainsi obtenu est passif (et, par suite, complètement intégrable).

Il résulte de là que *les n fonctions inconnues* (à indices inégaux)

$$(35)\qquad \begin{cases} \mu_{1,2}, & \mu_{1,3}, & \ldots & \mu_{1,n}, \\ & \mu_{2,3} & & \end{cases}$$

sont entièrement arbitraires dans la solution générale du système.

Si, parmi les fonctions μ à indices inégaux, on fait abstraction des n fonctions (35), il en reste $\frac{n(n-3)}{2}$: or (en supposant, comme de raison, $n > 3$), il est facile de voir que, dans le système ortho-

nome passif étudié au n° 192, *l'ensemble des conditions initiales relatives à ces* $\frac{n(n-3)}{2}$ *inconnues contient* (avec diverses fonctions arbitraires dépendant chacune de moins de $n-1$ variables) *n fonctions arbitraires de* $n-1$ *variables.*

Effectivement, les inconnues $\mu_{2,4}$ et $\mu_{3,4}$ n'ont l'une et l'autre qu'une seule dérivée figurant dans les premiers membres du système, et ces dérivées sont respectivement

$$\frac{\partial^2 \mu_{2,4}}{\partial x_1\, \partial x_3}, \quad \frac{\partial^2 \mu_{3,4}}{\partial x_1\, \partial x_2}.$$

En formant donc les conditions initiales relatives aux deux inconnues considérées, on trouve, d'après ce qui a été vu au n° 188 et à l'alinéa I du n° 81, qu'elles contiennent, s'il s'agit de $\mu_{2,4}$, deux fonctions arbitraires dépendant respeetivement des groupes de $n-1$ variables

$$(x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n), \quad (x_1, x_2, x_4, \ldots, x_n),$$

et, s'il s'agit de $\mu_{3,4}$, deux fonctions arbitraires dépendant respectivement des groupes de $n-1$ variables

$$(x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n), \quad (x_1, x_3, x_4, \ldots, x_n).$$

Si l'on désigne maintenant par g un entier quelconque, au moins égal à 5, de la suite $1, 2, \ldots, n$, les dérivées (secondes) de $\mu_{2,g}$ figurant dans les premiers membres du système étudié sont celles qui intéressent les divers couples de variables obtenus par l'association de x_1 avec l'une quelconque des variables $x_3, \ldots, x_{g-1}$. On voit alors qu'en vertu du n° 187 et de l'alinéa I du n° 81, les conditions initiales relatives à $\mu_{2,g}$ contiennent (avec diverses fonctions arbitraires dépendant de moins de $n-1$ variables) une fonction arbitraire des $n-1$ variables $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Quant aux inconnues à indices inégaux autres que celles dont l'examen a été fait ci-dessus, leurs conditions initiales ne contiennent que des fonctions arbitraires dépendant de moins de $n-1$ variables.

Nous constatons donc, en somme, pour les $\frac{n(n-3)}{2}$ inconnues à indices inégaux autres que (35), la présence, dans les conditions initiales, de n fonctions arbitraires dépendant chacune de $n-1$

variables (avec diverses fonctions arbitraires dépendant d'un nombre moindre de variables).

Enfin, *l'ensemble des conditions initiales relatives aux n inconnues à indices égaux,*

$$\mu_{1,1},\quad \mu_{2,2},\quad \ldots,\quad \mu_{n,n},$$

contient (avec diverses arbitraires dépendant de moins de deux variables) $\frac{n(n-1)}{2}$ *fonctions arbitraires de deux variables.*

Effectivement, si l'on désigne par g un entier quelconque de la suite 1, 2, ..., n, les dérivées (secondes) de $\mu_{g,g}$ figurant dans les premiers membres du système sont :

1° Toutes celles qui intéressent deux variables distinctes du groupe

$$x_1,\quad \ldots,\quad x_{g-1},\quad x_{g+1},\quad \ldots,\quad x_n;$$

2° Toutes celles qui intéressent deux fois une seule et même variable du groupe

$$x_1,\quad \ldots,\quad x_{g-1}.$$

Il en résulte, en vertu du n° **189** et de l'alinéa I du n° **81**, que dans le groupe des conditions initiales relatives à l'inconnue $\mu_{g,g}$ figurent (avec diverses fonctions arbitraires de moins de deux variables) $n-g$ fonctions arbitraires dépendant respectivement des couples de variables

$$(x_g, x_{g+1}),\quad (x_g, x_{g+2}),\quad \ldots,\quad (x_g, x_n).$$

En faisant g égal successivement à 1, 2, ..., $n-1$, n, et sommant les nombres correspondants,

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+1+0,$$

on trouve bien $\frac{n(n-1)}{2}$.

Nous aurons à revenir au Chapitre XIV (n° **224**) sur quelques-unes de ces remarques.

Examen d'un cas particulier.

194. Nous supposerons actuellement que, parmi les fonctions μ figurant dans les seconds membres du système

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial x_k} = \mu_{j,k}, \tag{1}$$

toutes celles qui sont pourvues d'indices inégaux se réduisent identiquement à zéro.

Les formules (6), (7), (8), (9), (10) du n° 178 deviennent alors

$$(2)\quad \begin{cases} \sum \dfrac{\partial u}{\partial x_i}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mu_{i,i}}{\partial x_i}, \\ \sum \dfrac{\partial u}{\partial x_q}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mu_{i,i}}{\partial x_q}, \end{cases}$$

où i désigne un entier quelconque de la suite $1, 2, \ldots, n$, et q un entier, différent de i, pris dans la même suite ;

$$(3)\quad \begin{cases} \sum \dfrac{\partial u}{\partial x_j}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mu_{j,j}}{\partial x_k}, \\ \sum \dfrac{\partial u}{\partial x_k}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mu_{k,k}}{\partial x_j}, \\ \sum \dfrac{\partial u}{\partial x_q}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k} = 0, \end{cases}$$

où j, k désignent deux entiers inégaux quelconques de la suite $1, 2, \ldots, n$, et q un entier, différent de j et k, pris dans la même suite.

Quant aux relations

(14), (15), (16), (17), (18), (19)

du n° 180, fournies par le calcul des conditions de possibilité du système (1), elles deviennent, dans le cas actuel,

$$(4)\quad \frac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 \mu_{k,k}}{\partial x_j^2} + 2\sum\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}\right)^2\right] = 0,$$

où j, k désignent deux entiers distincts arbitrairement choisis dans la suite $1, 2, \ldots, n$;

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mu_{i,i}}{\partial x_j\,\partial x_k} + 2\sum\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\right] = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_i\,\partial x_k} + 2\sum\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_i}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k}\right] = 0, \\ \dfrac{\partial^2 \mu_{k,k}}{\partial x_i\,\partial x_j} + 2\sum\left[\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_i}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_j}\right] = 0, \end{cases}$$

où i, j, k désignent trois entiers distincts arbitrairement choisis dans

la suite 1, 2, ..., n; et enfin

$$(6)\quad \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_l} = \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_l} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k},$$

où i, j, k, l désignent quatre entiers distincts, arbitrairement choisis dans la suite 1, 2, ..., n. Il va sans dire que, dans les relations (4), (5), (6), on devra, pour obtenir les conditions de possibilité, remplacer les dérivées secondes de $u, v, \ldots, w$ par leurs valeurs tirées de (2) et (3), en tenant compte des équations (1) (*voir* le calcul du n° 180).

Cela étant, nous établirons les divers points suivants :

I. *Les conditions de possibilité fournies par* (6) *sont identiquement vérifiées.*

Considérons en effet l'expression

$$\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l},$$

où i, j, k, l désignent quatre entiers distincts pris dans la suite 1, 2, ..., n, et évaluons-la à l'aide de la formule (25) du n° 180, en supposant que, dans cette dernière, les symboles de dérivation $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ soient respectivement $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}$. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} \mu_{1,1} & \mu_{1,2} & \cdots & \mu_{1,n} \\ \mu_{2,1} & \mu_{2,2} & \cdots & \mu_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_{n,1} & \mu_{n,2} & \cdots & \mu_{n,n} \end{vmatrix}$$

(désigné au n° 180 par M) a, dans le cas actuel, tous ses éléments identiquement nuls, à l'exception de ceux qui figurent dans la diagonale principale, et se réduit en conséquence au produit

$$(7)\quad \mu_{1,1},\ \mu_{2,2},\ \ldots,\ \mu_{n,n};$$

le coefficient $M_{r,r}$ de l'élément $\mu_{r,r}$, situé sur la diagonale principale, s'obtient en supprimant dans le produit (7) le facteur $\mu_{r,r}$, et le coefficient de tout élément non situé sur la diagonale principale se réduit à zéro. Quant aux quantités désignées, dans la formule (25) du n° 180, par α_r et α'_r, elles sont, dans le cas actuel, d'après leur définition

même, les seconds membres des deux formules, extraites de (3), qui ont respectivement pour premiers membres

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x_r}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j},\quad \sum \frac{\partial u}{\partial x_r}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_l};$$

les quatre entiers i, j, k, l étant distincts, l'entier r, arbitrairement choisi dans la suite $1, 2, \ldots, n$, ne figurera jamais à la fois dans les deux couples (i, j), (k, l), et dès lors, en vertu des formules (3), l'une au moins des quantités α_r, α'_r se réduira à zéro. La formule (25) du n° 180 a donc, ici, son second membre nul, d'où résulte

$$\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\,\partial x_l} = 0;$$

on a, de même,

$$\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_l} = 0,\qquad \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_l}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\,\partial x_k} = 0,$$

et les conditions de possibilité fournies par (6) se réduisent bien, comme nous l'avions annoncé, à des identités.

II. Restent les conditions de possibilité fournies par (4) et (5).

Pour en former un système orthonome, on appliquera les considérations du n° 186, en adoptant les simplifications qui s'y introduisent d'elles-mêmes, c'est-à-dire qu'on attribuera aux variables x_h et aux inconnues $\mu_{i,i}$ les cotes *premières* et *secondes* indiquées ci-dessous,

	x_h	$\mu_{i,i}$
Cotes premières...	1	0
Cotes secondes....	0	i

et qu'on résoudra :

1° L'équation (4) par rapport à $\frac{\partial^2 \mu_{k,k}}{\partial x_j^2}$ ou par rapport à $\frac{\partial^2 \mu_{j,j}}{\partial x_k^2}$, suivant que j est inférieur ou supérieur à k;

2° Chacune des équations (5) par rapport à la dérivée (unique) du second ordre qu'elle contient.

Je dis maintenant que *le système orthonome provenant de cette résolution est passif.*

Revenons, en effet, pour un instant au système orthonome que

forment, dans le cas général, les conditions de possibilité convenablement résolues (n° 186), et partageons ces équations en deux groupes, A_2, B_2, suivant que la dérivée (seconde) qui figure dans leur premier membre appartient à une fonction μ pourvue d'indices *inégaux* ou à une fonction μ pourvue d'indices *égaux;* désignons ensuite par A'_2, B'_2 les groupes respectivement déduits de A_2, B_2 par toutes les différentiations possibles du premier ordre. Le système (A_2, B_2) étant passif (n° 192), l'élimination des dérivées principales secondes et troisièmes entre les équations

$$(8) \qquad A_2, \quad B_2, \quad A'_2, \quad B'_2$$

conduit à des identités; pour avoir la solution numérique générale du système (8), il suffira donc d'adjoindre à (A_2, B_2) un groupe partiel extrait de (A'_2, B'_2) sous la seule condition qu'il ait pour premiers membres, sans omission ni répétition, les dérivées principales troisièmes des diverses fonctions μ, puis d'effectuer la résolution du système résultant par rapport aux dérivées principales du second et du troisième ordre. A cet effet, on tirera successivement : 1° des équations A_2, B_2, déjà résolues, les dérivées principales secondes des diverses fonctions μ; 2° du groupe partiel extrait de A'_2, et en tenant compte de (A_2, B_2), les dérivées principales troisièmes des fonctions μ à indices inégaux, ce qui donnera un groupe A_3; 3° du groupe partiel extrait de B'_2, et en tenant compte de A_2, B_2, A_3, les dérivées principales troisièmes des fonctions μ à indices égaux, ce qui donnera un groupe B_3. Finalement, la solution numérique générale du système (8) sera donnée par les formules

$$(9) \qquad A_2, \quad B_2, \quad A_3, \quad B_3.$$

Remplaçons maintenant, dans les conditions de possibilité (A_2, B_2), *tous les μ à indices inégaux par des fonctions identiquement nulles,* et convenons désormais, pour indiquer l'introduction de cette hypothèse dans un système quelconque déduit de (A_2, B_2), de mettre entre doubles crochets la notation primitivement adoptée pour le système dont il s'agit. Observons en outre :

1° Que si, dans les équations A_2 ou B_2, on se propose d'introduire *d'abord* l'hypothèse actuelle (toutes les fonctions μ à indices inégaux identiquement nulles), et d'effectuer *ensuite* toutes les différentiations premières possibles, on peut, sans changer le résultat

final, intervertir l'ordre de ces deux opérations consécutives; ou, en d'autres termes, que les systèmes

$$\left[[A_2]\right]', \quad \left[[B_2]\right]',$$

obtenus par la première suite d'opérations, sont respectivement identiques aux systèmes

$$\left[[A'_2]\right], \quad \left[[B'_2]\right],$$

obtenus par la deuxième suite;

2° Que l'hypothèse actuelle transforme en identités les équations A'_2; car les équations $\left[[A_2]\right]$ étant, comme nous l'avons vu (1), des identités, il en est de même des équations $\left[[A_2]\right]'$, qui s'en déduisent par toutes les différentiations premières possibles, et par suite aussi, en vertu de 1°, des équations $\left[[A'_2]\right]$;

3° Que cette même hypothèse, transformant en identités les équations A_2, et annulant identiquement leurs premiers membres, ne peut manquer d'annuler aussi identiquement leurs seconds membres;

4° Enfin, que l'hypothèse dont il s'agit ne peut manquer de transformer en identités les équations A_3 : on obtient, en effet, un groupe numériquement équivalent à A_3 en remplaçant d'abord, dans le groupe partiel extrait de A'_2 (*voir* plus haut), les dérivées principales secondes des μ à indices inégaux par leurs valeurs tirées de A_2, puis, dans les relations résultantes, les dérivées principales secondes des μ à indices égaux par leurs valeurs tirées de B_2; or, en vertu de 2° et 3°, l'hypothèse considérée, introduite après la première partie de l'opération, donnerait déjà des identités; elle en donne donc aussi après la seconde.

Cela étant, puisque la solution numérique générale du système (8) est donnée par les formules (9), les deux systèmes

$$\left[[A_2]\right], \quad \left[[B_2]\right], \quad \left[[A'_2]\right], \quad \left[[B'_2]\right],$$

et

$$\left[[A_2]\right], \quad \left[[B_2]\right], \quad \left[[A_3]\right], \quad \left[[B_3]\right],$$

qui se déduisent respectivement de (8) et (9) en y remplaçant tous les μ à indices inégaux par des fonctions identiquement nulles, s'équi-

vaudront numériquement l'un à l'autre ; c'est-à-dire, en tenant compte des diverses observations qui précèdent, que la solution numérique générale du système

$$\left[[B_2]\right], \quad \left[[B_2]\right]'$$

sera donnée par les formules

$$\left[[B_2]\right], \quad \left[[B_3]\right].$$

En conséquence, l'élimination des dérivées principales secondes et troisièmes, effectuée entre les équations du système orthonome $\left[[B_2]\right]$ et celles qui s'en déduisent par différentiations premières, conduira à des identités ; le système $\left[[B_2]\right]$ est donc passif, ce que nous proposions d'établir.

III. *Dans le système orthonome passif* $\left[[B_2]\right]$, examiné à l'alinéa précédent, *l'ensemble des conditions initiales contient* (avec diverses arbitraires dépendant chacune de moins de deux variables) $\frac{n(n-1)}{2}$ *fonctions arbitraires de deux variables.*

Il suffit, pour s'en convaincre, d'observer que les seules inconnues de ce système sont les fonctions μ à indices égaux, que la répartition de leurs dérivées en principales et paramétriques y est la même que dans (A_2, B_2), puis de se reporter à la remarque finale du n° 193.

Détermination des systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales à n variables.

195. Les considérations qui précèdent fournissent une méthode très simple pour étudier le système des $\frac{n(n-1)}{2}$ équations aux dérivées partielles

$$\sum \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0, \tag{1}$$

où (j, k) désigne une combinaison quelconque de deux entiers *distincts* pris dans la suite $1, 2, \ldots, n$, et où les sommations indiquées par le symbole $\sum$ doivent s'étendre aux n fonctions inconnues u,

v, ..., w : le système (1) est, comme on sait, celui qui détermine les systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales à n variables.

Pour en faire l'étude, on désignera par

$$\mu_{1,1}, \quad \mu_{2,2}, \quad \ldots, \quad \mu_{n,n}$$

n fonctions inconnues auxiliaires adjointes à u, v, ..., w, et l'on posera

$$(2) \quad \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 = \mu_{1,1}, \quad \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 = \mu_{2,2}, \quad \ldots, \quad \sum \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2 = \mu_{n,n}.$$

Ces inconnues auxiliaires devront satisfaire au système orthonome passif $\left[[B_2]\right]$, examiné dans les alinéas II et III du numéro précédent, et où l'ensemble des conditions initiales contient (avec diverses arbitraires dépendant de moins de deux variables) $\frac{n(n-1)}{2}$ *fonctions arbitraires de deux variables.*

La détermination des n inconnues auxiliaires une fois opérée, celle des n inconnues primitives s'effectue par l'intégration du système [(1), (2)], dont la solution générale dépend de $\frac{n(n+1)}{2}$ constantes arbitraires.

CHAPITRE XII.

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS OÙ LES CONDITIONS INITIALES PRÉSENTENT UNE DISPOSITION RÉGULIÈRE.

Simplification de certains théorèmes d'existence dans le cas où les conditions initiales du système proposé présentent une disposition régulière.

196. Étant donné un système différentiel résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, nous dirons que le damier des conditions initiales (n° 90) y est *régulier,* si, en adoptant pour ses lignes, c'est-à-dire pour les variables indépendantes du système, un ordre convenable, *les cases blanches de chaque colonne se trouvent toutes situées au bas de cette colonne.*

Nous supposerons actuellement qu'on ait affaire à *un système différentiel où le damier des conditions initiales soit régulier,* et nous établirons alors les deux points suivants :

1° Dans l'énoncé du troisième théorème d'existence (n° 168), toute restriction d'inégalité devient inutile, et les hypothèses restantes suffisent, en vertu du premier théorème d'existence (n° 163), à assurer l'intégrabilité complète du système;

2° Dans l'énoncé du quatrième théorème d'existence (n° 170), les restrictions d'inégalité posées peuvent être remplacées par d'autres notablement plus simples.

197. Considérons un système différentiel, S, satisfaisant aux diverses conditions ci-après :

1° *Le système* S *est résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et les dérivées dont il s'agit appartiennent respectivement à des inconnues toutes*

différentes; les seconds membres sont d'ailleurs indépendants de toute dérivée principale.

2° *En attribuant, dans toutes les équations du système, aux variables des cotes respectives toutes égales à* 1 *et aux inconnues des cotes respectives convenablement choisies, chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités* (*inconnues et dérivées*) *dont la cote ne surpasse pas celle du premier membre correspondant.*

(Les deux hypothèses ci-dessus figurent dans l'énoncé du troisième théorème d'existence, n° 168.)

3° *Le damier des conditions initiales du système est régulier.*

Cela étant, le système S *est forcément orthonome, et, par suite* (n° 163, premier théorème d'existence), *complètement intégrable.*

I. Considérons, d'une part, la détermination initiale schématique (n° 90) d'une inconnue quelconque, u, de notre système, et extrayons, d'autre part, du groupe total des différences $x - x_0$, $y - y_0$, ... (où x, y, ... désignent les variables indépendantes, x_0, y_0, ... des valeurs initiales quelconques), un groupe déterminé quelconque, par exemple celui des trois différences $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$. Cela étant, on aperçoit sans peine l'exactitude des deux points suivants :

1° *Si la détermination initiale schématique de u contient des termes élémentaires dont les degrés partiels en* $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ *puissent surpasser à la fois trois entiers arbitrairement donnés, toute somme schématique irréductible* (n° 79) *représentant cette détermination initiale contient quelque fonction schématique dépendant à la fois des trois variables* x, y, z (et éventuellement de quelques autres).

2° *Réciproquement, si une somme schématique irréductible représentant la détermination initiale de u contient quelque fonction schématique dépendant à la fois des trois variables* x, y, z, *cette détermination initiale contient des termes élémentaires dont les degrés partiels en* $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ *peuvent surpasser à la fois trois entiers arbitrairement donnés.*

II. La proposition qui fait l'objet de l'alinéa I peut encore s'énoncer de la manière suivante :

Pour que l'inconnue u du système proposé possède des dérivées

paramétriques dont les ordres partiels relatifs à des variables déterminées, x, y, z par exemple, puissent surpasser à la fois trois entiers arbitrairement donnés, il faut et il suffit que le groupe de conditions initiales relatif à cette inconnue contienne dans l'ensemble de ses seconds membres quelque fonction schématique dépendant à la fois des trois variables x, y, z (et éventuellement de quelques autres).

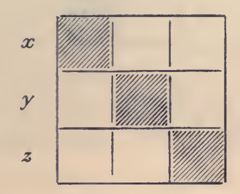
III. *Les diverses dérivées qui figurent dans les premiers membres du système* S, *défini par notre énoncé général, n'intéressent toutes qu'une seule et même variable indépendante.*

Il est impossible qu'une dérivée figurant dans un des premiers membres du système intéresse à la fois plusieurs variables indépendantes. Supposons en effet, pour fixer les idées, qu'elle en intéresse trois, et qu'elle soit de la forme

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} u}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta\, \partial z^\gamma},$$

où u désigne l'une des fonctions inconnues, et α, β, γ trois entiers *supérieurs* à zéro. Cela étant admis, on voit tout d'abord que les conditions initiales relatives à u et à ses dérivées ne peuvent contenir dans leurs seconds membres aucune fonction schématique dépendant à la fois de x, y, z : car, s'il en était ainsi, les ordres partiels relatifs à x, y, z d'une dérivée paramétrique de u pourraient surpasser à la fois trois entiers arbitrairement donnés (II), et notamment les trois entiers α, β, γ, ce qui est absurde. D'autre part, puisque α est > 0, les dérivées de u n'intéressant pas la variable x sont toutes paramétriques, et les ordres partiels de ces dérivées relatifs à y et à z peuvent surpasser à la fois deux entiers arbitrairement donnés : il en résulte (II) que les conditions initiales relatives à u et à ses dérivées contiennent dans leurs seconds membres quelque fonction schématique dépendant à la fois de y et z, mais en même temps, d'après ce qui précède, forcément indépendante de x. En vertu d'un raisonnement semblable, elles contiendront dans leurs seconds membres quelque fonction schématique dépendant à la fois de x et z sans dépendre de y, et aussi quelque fonction schématique dépendant à la fois de x et y sans dépendre de z. On pourra donc, du damier des

conditions initiales, extraire une portion offrant la disposition suivante de cases blanches et noires :



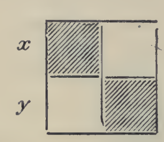
Une disposition régulière du damier total devient, dès lors, quelque ordre qu'on adopte pour les lignes, impossible à réaliser, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi, toute dérivée figurant dans un des premiers membres du système S n'intéresse qu'une seule variable indépendante. Je dis, de plus, que les dérivées figurant respectivement dans deux des premiers membres ne peuvent intéresser deux variables distinctes. Supposons, en effet, qu'en désignant par u et v deux des fonctions inconnues, le système proposé contienne les deux équations

$$\frac{\partial^\lambda u}{\partial x^\lambda} = \ldots, \qquad \frac{\partial^\mu v}{\partial y^\mu} = \ldots,$$

où λ et μ sont, naturellement, supérieurs à zéro. Cela étant admis, on voit tout d'abord que les conditions initiales relatives à u et à ses dérivées ne peuvent contenir dans leurs seconds membres aucune fonction schématique dépendant de x : car, s'il en était ainsi, l'ordre partiel relatif à x d'une dérivée paramétrique de u pourrait surpasser tout entier donné, et notamment l'entier λ, ce qui est absurde. D'autre part, puisque λ est > 0, les dérivées de u n'intéressant pas la variable x sont toutes paramétriques, et l'ordre partiel de ces dérivées par rapport à y peut surpasser tout entier donné : il en résulte que les conditions initiales relatives à u et à ses dérivées contiennent dans leurs seconds membres quelque fonction schématique dépendant de y, mais en même temps. d'après ce qui précède, forcément indépendante de x. En vertu d'un raisonnement semblable, les conditions initiales relatives à v et à ses dérivées contiennent dans leurs seconds membres quelque fonction schématique dépendant de x sans dépendre de y. On pourra donc, du damier des conditions initiales, extraire une portion offrant la disposition suivante de cases blanches

et noires :



Une disposition régulière du damier total devient, dès lors, quelque ordre qu'on adopte pour les lignes, impossible à réaliser, ce qui est contraire à l'hypothèse.

IV. *Tout système différentiel satisfaisant aux conditions* 1° *et* 2° *de notre énoncé général, et tel, en outre, que les dérivées figurant dans les premiers membres n'intéressent toutes qu'une seule et même variable indépendante,* x, *est nécessairement orthonome.*

Puisque les dérivées qui constituent les premiers membres de notre système appartiennent respectivement à des inconnues toutes différentes, le nombre des équations est au plus égal à celui des inconnues ; il peut d'ailleurs arriver qu'il soit moindre, ou, en d'autres termes, que certaines des inconnues n'aient aucune dérivée principale. En pareil cas, on peut (sans toucher aux cotes des variables indépendantes ni des inconnues restantes) choisir, pour les inconnues dépourvues de dérivées principales, des cotes algébriquement assez petites pour que les inconnues dont il s'agit, et celles d'entre leurs dérivées qui figurent dans les seconds membres du système, aient des cotes *inférieures* à celles des premiers membres : on peut donc, pour établir la nature orthonome du système, procéder comme si les inconnues restantes y étaient seules engagées, et supposer que le nombre des équations y est exactement égal à celui des inconnues. Nous plaçant dans cette hypothèse, nous désignerons par

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_g$$

les inconnues engagées dans le système, et nous ferons voir qu'on peut leur attribuer, ainsi qu'aux variables indépendantes, des cotes *secondes* telles, que la cote seconde de toute inconnue ou dérivée figurant dans un second membre soit *inférieure* à la cote seconde du premier membre correspondant.

Soient donc

$$\frac{\partial^{k_1} u_1}{\partial x^{k_1}} = \ldots, \qquad \frac{\partial^{k_2} u_2}{\partial x^{k_2}} = \ldots, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^{k_g} u_g}{\partial x^{k_g}} = \ldots$$

les équations dont se compose notre système; je dis qu'en attribuant à la variable x une cote seconde égale à 1, à toutes les autres variables une cote seconde nulle, et aux fonctions inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_g$ les cotes secondes respectives $-k_1, -k_2, \ldots, -k_g$, la condition ci-dessus énoncée se trouvera satisfaite. Si l'on désigne en effet par i, j deux entiers, distincts ou non, pris dans la suite 1, 2, ..., g, et que l'on considère l'équation du système qui a pour premier membre $\frac{\partial^{k_i} u_i}{\partial x^{k_i}}$, le second membre de l'équation dont il s'agit, indépendant par hypothèse de toute dérivée principale, ne contiendra aucune dérivée de u_j dont l'ordre partiel relatif à x soit égal ou supérieur à k_j. Cela étant, il suffit d'observer que le premier membre $\frac{\partial^{k_i} u_i}{\partial x^{k_i}}$ a pour cote seconde zéro, que la fonction u_j a pour cote seconde l'entier négatif $-k_j$, et que toute dérivée de u_j d'ordre partiel k par rapport à x a pour cote seconde la différence $k - k_j$, négative dans l'hypothèse $k < k_j$.

V. Le simple rapprochement des alinéas III et IV nous montre que le système proposé S est orthonome : il est donc complètement intégrable, en vertu du premier théorème d'existence (n° 163) [1].

198. Considérons un système différentiel, S, remplissant les diverses conditions ci-après :

1° *Le système* S *est résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et les seconds membres sont indépendants de toute dérivée principale; quant aux premiers membres, aucun d'entre eux n'est une dérivée de quelque autre, et deux au moins d'entre eux sont des dérivées d'une même inconnue.*

[1] Les systèmes différentiels visés par l'énoncé du n° 197 comprennent comme cas particulier ceux de Mme de Kowalevsky. Les mêmes notations étant adoptées que dans l'alinéa IV, il suffit, pour s'en convaincre, d'attribuer à toutes les variables indépendantes $x, y, \ldots$ une cote (première) égale à 1, et aux inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_g$ du système kowalevskien les cotes (premières) respectives $-k_1, -k_2, \ldots, -k_g$.

2° *En attribuant, dans toutes les équations du système, aux variables des cotes respectives toutes égales à* 1, *et aux inconnues des cotes respectives convenablement choisies, chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités* (*inconnues et dérivées*) *dont la cote ne surpasse pas celle du premier membre correspondant.*

(Les deux hypothèses ci-dessus figurent dans l'énoncé du quatrième théorème d'existence, n° 170.)

3° *Le damier des conditions initiales du système est régulier.*

4° *En désignant par* δ *la cote minima des premiers membres de* S, *par* Δ *leur cote maxima, et par* Γ *la cote maxima des premiers membres des conditions initiales écrites conformément aux indications du n°* 155 ($\Delta \leqq \Gamma + 1$), *on peut, des groupes*

$$S_\delta, \quad S_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad S_{\Gamma+1}$$

du système S *prolongé, extraire respectivement des groupes,*

$$t_\delta, \quad t_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad t_{\Gamma+1},$$

possédant la triple propriété de comprendre les groupes

$$s_\delta, \quad s_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad s_\Delta$$

du système S (n° 144), *de se composer d'équations en nombres respectivement égaux à ceux des dérivées principales de cotes*

$$\delta, \quad \delta+1, \quad \ldots, \quad \Gamma+1,$$

et d'être successivement résolubles par rapport à ces dérivées.

(La restriction d'inégalité à laquelle se trouvent ainsi assujetties les valeurs numériques des quantités figurant dans les seconds membres de S est, comme on le voit, notablement plus simple que celles qui figurent dans l'énoncé du quatrième théorème d'existence.)

Cela étant, pour que le système proposé S *soit complètement intégrable, il faut et il suffit* (comme dans les deuxième et quatrième théorèmes d'existence, n°s 163 et 170) *que l'élimination des dérivées principales de cotes*

$$\delta, \quad \delta+1, \quad \ldots, \quad \Gamma+1, \quad \Gamma+2,$$

effectuée entre les équations

$$S_\delta,\quad S_{\delta+1},\quad \ldots,\quad S_{\Gamma+1},\quad S_{\Gamma+2},$$

conduise à des identités.

I. *Les mêmes choses étant posées que dans l'énoncé ci-dessus, on peut, du groupe* $S_C (C \geqq \delta)$, *extraire un groupe résoluble par rapport aux dérivées principales de cote* C.

Pour l'établir, je construirai d'abord, à l'aide du mécanisme suivant, un autre système différentiel, F.

Considérant, parmi les inconnues et dérivées qui figurent dans un second membre du système S, celles dont la cote se trouve être précisément égale à celle du premier membre correspondant, je remplace ce second membre par une fonction linéaire et homogène des inconnues et dérivées dont il s'agit, en donnant pour coefficient à chacune de ces quantités la valeur initiale de la dérivée partielle du second membre primitif par rapport à la quantité considérée. (Il va sans dire que, dans le cas où le second membre primitif ne contient, outre les variables indépendantes, que des inconnues et dérivées de cote inférieure au premier membre correspondant, on remplacera ce second membre par zéro.) En répétant l'opération précédente sur chacun des seconds membres du système S, on tombe sur un système, F, ayant les mêmes premiers membres que S avec la même économie des conditions initiales, et présentant en outre les particularités suivantes : 1° Chaque équation du système F prolongé est *linéaire, homogène et à coefficients constants* par rapport à l'ensemble des fonctions inconnues et de leurs dérivées. 2° Si, dans le système F, on attribue aux variables indépendantes et aux inconnues les mêmes cotes respectives que dans le système S, *chaque second membre de* F *prolongé ne contient que des quantités* (*inconnues et dérivées*) *dont la cote soit exactement égale à celle du premier membre correspondant.* 3° Dans les systèmes

S prolongé, F prolongé,

les équations se correspondent chacune à chacune, et *l'on passe d'une équation quelconque de* S *prolongé à l'équation correspondante de* F *prolongé par le même mécanisme que l'on passe d'une équation quelconque de* S *à l'équation correspondante de* F.

Tout revient donc à prouver que du groupe F_C on peut extraire un groupe partiel résoluble par rapport aux dérivées principales de cote C.

Or, si, conformément à nos conventions du nº 144, on désigne par

$$(1) \qquad f_\delta, \; f_{\delta+1}, \; \ldots, \; f_\Delta$$

les équations du système F, partagées en groupes d'après leur cote croissante, il résulte de ce que nous venons de dire que, des groupes

$$F_\delta, \quad F_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad F_{\Gamma+1},$$

on peut extraire autant de groupes partiels possédant la triple propriété de comprendre les groupes (1), d'être composés d'équations en nombres respectivement égaux à ceux des dérivées principales de cotes

$$\delta, \quad \delta+1, \quad \ldots, \quad \Gamma+1,$$

et d'être respectivement résolubles par rapport à ces dérivées. On pourra donc, par le mécanisme décrit au nº 156, déduire de F un système, Φ, de grade 1, possédant la triple propriété ci-après :

1º Le Tableau du système Φ est régulier (parce que la disposition des cases pleines et vides y est identique à celle que présentent, dans le damier des conditions initiales de F, les cases noires et blanches).

2º Chaque second membre est une fonction linéaire, homogène, et à coefficients constants, des diverses dérivées paramétriques ou fonctions inconnues ayant même cote que le premier membre correspondant.

(Du rapprochement de ces deux propriétés résulte l'orthonomie de Φ, nº 161, I.)

3º Si l'on désigne par H l'ensemble des relations obtenues en égalant chaque inconnue adjointe de Φ à la dérivée ancienne qu'elle admet pour homonyme, les systèmes

$$^{(C)}\Phi \quad \text{et} \quad (^{(C)}H, {}^{(C)}F)$$

s'équivalent numériquement, d'où résulte, puisque chacune des équations linéaires et homogènes dont ils se composent ne contient que des quantités toutes de même cote, que les systèmes

$$\Phi_C \quad \text{et} \quad (H_C, F_C)$$

s'équivalent aussi numériquement.

Observons maintenant que toutes les dérivées principales du système F sont également principales dans le système Φ, et que, de plus, toute dérivée d'inconnue adjointe coïncidant, à la notation près, avec une dérivée principale de F est elle-même principale dans Φ; cela étant, partageons, comme il suit, en trois sortes les dérivées principales de cote (première) C du système Φ :

1° Les dérivées principales du système F;

2° Les dérivées d'inconnues adjointes qui coïncident, à la notation près, avec quelqu'une des précédentes;

3° Diverses dérivées coïncidant, soit exactement, soit à la notation près, avec des dérivées paramétriques du système F.

Le système Φ étant orthonome, on peut extraire de Φ_C un groupe partiel résoluble par rapport aux dérivées principales de cote (première) C du système Φ, et dès lors aussi *un groupe partiel résoluble par rapport à celles qui sont des deux premières sortes :* la même chose a donc nécessairement lieu pour (H_C, F_C), numériquement équivalent à Φ_C. Or, parmi les équations H_C, celles dont les deux membres coïncident (aux notations près) avec une même dérivée paramétrique de F ne peuvent évidemment nous fournir aucune équation pour le groupe partiel spécifié en dernier lieu, et celles qui restent nous donnent les dérivées de la deuxième sorte exprimées à l'aide des dérivées correspondantes de la première (auxquelles elles sont identiques, aux notations près) : cela étant, et les équations F_C ne contenant ni les inconnues adjointes, ni leurs dérivées, il faut bien que de F_C on puisse extraire un groupe partiel résoluble par rapport aux dérivées de la première sorte. C'est ce qu'il s'agissait d'établir.

II. Les mêmes choses étant posées que dans notre énoncé général, on peut, du système S, déduire, à l'aide du mécanisme décrit au n° 156, un système *de grade* 1, Σ, possédant la double propriété : 1° d'avoir un Tableau *régulier,* comme le damier des conditions initiales de S; 2° de ne contenir dans chacun de ses seconds membres, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues et dérivées) dont la cote ne surpasse pas celle du premier membre correspondant. *Le système Σ est,* d'après cela, nécessairement *orthonome* (n° 161, I).

Cela étant, *pour que le système* (régulier) S *soit passif, il faut et il suffit que le système* (orthonome) Σ *le soit lui-même.*

Considérons en effet, dans l'un quelconque des deux systèmes S, Σ, le total que forment le nombre des variables indépendantes $x, y, \ldots$, et celui des quantités paramétriques (inconnues et dérivées) dont la cote (unique ou première) ne surpasse pas C : à cause des relations qui existent entre S et Σ, ce nombre est le même dans les deux systèmes, et nous le désignerons par ${}^{(C)}q$. Cela posé :

1° *Pour que le système proposé* S *soit passif, il faut et il suffit qu'en considérant* $x, y, \ldots$ *et les diverses quantités (inconnues et dérivées) dont la cote ne surpasse pas* C, *comme autant de variables indépendantes distinctes, la solution numérique générale de* ${}^{(C)}S$ *soit fournie (quel que soit* C) *par des formules exprimant les diverses variables dont il s'agit à l'aide de* ${}^{(C)}q$ *arbitraires,* ${}^{(C)}q$ *d'entre ces formules étant résolubles par rapport aux arbitraires.*

C'est ce qui résulte immédiatement de l'alinéa I et du n° 162.

2° *Pour que le système* Σ *soit passif, il faut et il suffit que la solution numérique générale de* ${}^{(C)}\Sigma$ *soit fournie (quel que soit* C) *par de semblables formules.*

C'est ce qui résulte immédiatement de l'orthonomie de Σ et du n° 162.

3° *Pour que la solution numérique générale de* ${}^{(C)}S$ *soit fournie par des formules ayant la structure indiquée dans* 1°, *il faut et il suffit que la même chose ait lieu pour celle de* ${}^{(C)}\Sigma$.

La condition posée est nécessaire.

Si l'on désigne en effet par H l'ensemble des relations obtenues en égalant chaque inconnue adjointe de Σ à la dérivée ancienne qu'elle admet pour homonyme, et si l'on suppose que la solution numérique générale de ${}^{(C)}S$ soit fournie comme l'indique l'énoncé, il est manifeste qu'il en sera de même pour celle de $({}^{(C)}H, {}^{(C)}S)$, et, par suite, de ${}^{(C)}\Sigma$.

La condition posée est suffisante.

Supposons en effet que la solution générale de ${}^{(C)}\Sigma$ soit fournie par des formules ayant la structure qu'indique l'énoncé, et répartissons

ces formules en deux groupes, ${}^{(C)}J$, ${}^{(C)}K$, suivant qu'elles ont ou non pour premier membre quelque dérivée (d'ordre positif ou nul) d'une inconnue adjointe. Le système $({}^{(C)}J, {}^{(C)}K)$ ayant pour conséquence numérique ${}^{(C)}\Sigma$, qui, à son tour, a pour conséquence numérique ${}^{(C)}H$, il est clair que $({}^{(C)}J, {}^{(C)}K)$ a pour conséquence numérique $({}^{(C)}H, {}^{(C)}K)$; et comme ces deux systèmes, visiblement réduits ([1]), comprennent le même nombre d'équations, ils sont numériquement équivalents (n° 131) : or, le premier d'entre eux contient ${}^{(C)}q$ équations résolubles par rapport aux arbitraires; il en est donc de même du second (n° 137), et, comme le groupe ${}^{(C)}H$ est indépendant des arbitraires, les ${}^{(C)}q$ équations dont il s'agit sont forcément contenues dans le groupe ${}^{(C)}K$.

Cela posé, observons qu'en vertu de l'équivalence entre

$$ {}^{(C)}\Sigma \quad \text{et} \quad ({}^{(C)}H, {}^{(C)}S), $$

les formules $({}^{(C)}J, {}^{(C)}K)$, qui fournissent la solution générale de ${}^{(C)}\Sigma$, fournissent également celle de $({}^{(C)}H, {}^{(C)}S)$, et que, par suite, les formules ${}^{(C)}K$ ne peuvent manquer de vérifier constamment le système ${}^{(C)}S$. Si l'on désigne alors par ${}^{(C)}p$ le nombre des dérivées principales du système S dont la cote première ne surpasse pas C, et si l'on extrait de ${}^{(C)}S$ un groupe partiel résoluble par rapport aux ${}^{(C)}p$ dérivées dont il s'agit (I), les formules ${}^{(C)}K$, en nombre ${}^{(C)}q + {}^{(C)}p$, vérifieront en particulier le groupe partiel; et comme ce dernier, composé de ${}^{(C)}p$ équations, est réduit, elles en fourniront (n° 140) la solution *générale*, à plus forte raison celle du groupe total ${}^{(C)}S$.

4° *Pour que* S *soit passif, il faut et il suffit que* Σ *le soit.*

C'est ce qui résulte du simple rapprochement de 1°, 2° et 3°.

III. *La recherche, dans le système* S, *d'une solution ordinaire (hypothétique) répondant à des conditions initiales données, se ramène à une semblable recherche exécutée dans le système* Σ.

Il suffit, pour s'en convaincre, d'observer ce qui suit :

([1]) Ils sont, en effet, résolubles l'un et l'autre par rapport aux variables indépendantes $x, y, \ldots$ et aux quantités (inconnues et dérivées de Σ) dont la cote première ne surpasse pas C.

1° Si, comme plus haut (II, 3°), on désigne par H l'ensemble des relations obtenues en égalant chaque inconnue adjointe de Σ à la dérivée ancienne correspondante, il résulte immédiatement de l'alinéa V du n° 156 que les deux systèmes

$$(H, S) \quad \text{et} \quad \Sigma$$

s'équivalent au point de vue de l'intégration. En conséquence, toute solution ordinaire de S en fournit une de Σ par la simple adjonction aux fonctions qui la composent de quelques-unes de leurs dérivées; et, inversement, toute solution ordinaire de Σ en fournit une de S par la simple suppression des fonctions trouvées pour les inconnues adjointes.

2° L'économie des conditions initiales est la même, aux notations près, dans les deux systèmes S et Σ (n° 156, I).

IV. *Pour que le système* S *soit complètement intégrable, il faut et il suffit que le système* Σ *soit passif.*

Effectivement, si le système S est complètement intégrable, le simple rapprochement de l'alinéa I et du n° 103 montre qu'il est passif; le système Σ l'est donc aussi en vertu de II.

Réciproquement, si le système Σ est passif, il ne peut manquer, puisqu'il est orthonome, d'être complètement intégrable ; le système S l'est donc aussi en vertu de III.

V. *Pour que le système, orthonome et de grade* 1, Σ, *soit passif, il faut et il suffit que la solution numérique générale de* ${}^{(\Gamma+2)}\Sigma$ *soit fournie par des formules exprimant les variables indépendantes* $x, y, \ldots$ *et les quantités (inconnues ou dérivées de* Σ) *dont la cote (première) ne surpasse pas* $\Gamma+2$ *à l'aide de* ${}^{(\Gamma+2)}q$ *arbitraires,* ${}^{(\Gamma+2)}q$ *d'entre ces formules étant résolubles par rapport aux arbitraires.*

La condition posée est évidemment nécessaire (II, 2°).

Elle est d'ailleurs suffisante.

Supposons en effet que la solution numérique générale de ${}^{(\Gamma+2)}\Sigma$ soit fournie par des formules ayant la structure qu'indique l'énoncé.

Si l'on désigne par ${}^{(\Gamma+2)}\varpi$ le nombre des dérivées principales du système Σ dont la cote première ne surpasse pas $\Gamma + 2$, et si l'on extrait de ${}^{(\Gamma+2)}\Sigma$ un groupe partiel ayant pour premiers membres, sans omission ni répétition, les ${}^{(\Gamma+2)}\varpi$ dérivées principales dont il s'agit, les formules, en nombre ${}^{(\Gamma+2)}q + {}^{(\Gamma+2)}\varpi$, qui donnent la solution générale de ${}^{(\Gamma+2)}\Sigma$ ne peuvent manquer de vérifier constamment le groupe partiel; et comme ce dernier, composé de ${}^{(\Gamma+2)}\varpi$ équations, est réduit, elles en fournissent aussi la solution *générale* (n° 140). Le système ${}^{(\Gamma+2)}\Sigma$ équivaut donc numériquement au groupe partiel, et, dès lors, si entre les équations ${}^{(\Gamma+2)}\Sigma$ on élimine les diverses dérivées principales de Σ dont la cote première ne surpasse pas $\Gamma + 2$, on est conduit à des identités.

Cela étant, comme, dans le système Σ, orthonome et de grade 1, la cote première maxima des inconnues est Γ, et, par suite, celle des dérivées cardinales (toutes du second ordre) $\Gamma + 2$, il résulte de la règle provisoire du n° 112 que le système Σ est passif : c'est ce qu'il s'agissait d'établir.

VI. *Pour que la solution numérique générale de* ${}^{(\Gamma+2)}\Sigma$ *soit fournie par des formules ayant la structure indiquée à l'alinéa précédent, il faut et il suffit qu'il en soit de même pour celle de* ${}^{(\Gamma+2)}S$.

C'est ce qui résulte immédiatement de l'alinéa II, 3°.

VII. *Pour que la solution numérique générale de* ${}^{(\Gamma+2)}S$ *soit fournie par des formules ayant la structure dont il s'agit, il faut et il suffit que l'élimination des dérivées principales de cotes*

$$\delta,\quad \delta+1,\quad \ldots,\quad \Gamma+1,\quad \Gamma+2,$$

effectuée entre les équations

(2) $$S_\delta,\quad S_{\delta+1},\quad \ldots,\quad S_{\Gamma+1},\quad S_{\Gamma+2},$$

conduise à des identités.

Observons tout d'abord qu'en vertu de l'alinéa I, on peut, des groupes (2), extraire des groupes,

(3) $$t_\delta,\quad t_{\delta+1},\quad \ldots,\quad t_{\Gamma+1},\quad t_{\Gamma+2},$$

successivement résolubles par rapport aux dérivées principales dont il s'agit.

Cela étant, la condition posée est évidemment suffisante.

Elle est d'ailleurs nécessaire. Désignons en effet par ${}^{(\Gamma+2)}p$ le nombre des dérivées principales de S dont la cote ne surpasse pas $\Gamma+2$. Si la solution numérique générale de ${}^{(\Gamma+2)}\mathrm{S}$ est exprimable comme l'indique notre énoncé, les formules, en nombre ${}^{(\Gamma+2)}q+{}^{(\Gamma+2)}p$, qui la fournissent ne peuvent manquer de vérifier constamment le système réduit des ${}^{(\Gamma+2)}p$ équations (3), et en donnent par suite (n° 140) la solution *générale :* les systèmes (2) et (3) sont donc numériquement équivalents, et l'élimination indiquée entre les équations (2) conduit forcément à des identités.

VIII. Le simple rapprochement des alinéas IV, V, VI et VII suffit à prouver l'exactitude de notre énoncé.

199. Considérons, par exemple, le système différentiel fort simple

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathrm{H}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \mathrm{M}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mathrm{K}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \mathrm{N}, \end{cases}$$

où u désigne une fonction inconnue, et H, K, M, N quatre fonctions connues des deux variables indépendantes x et y. En désignant par x_0, y_0 les valeurs initiales de x, y, et par a_1, a_2, a_3, a_4 des constantes schématiques, les conditions initiales sont ici de la forme

$$\left.\begin{aligned} u &= a_1 \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= a_2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= a_3 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} &= a_4 \end{aligned}\right\}\quad \text{pour } x-x_0=y-y_0=0:$$

elles présentent donc une disposition régulière (puisque toutes les cases du damier sont noires), et l'hypothèse 3°, posée au début du numéro précédent, se trouve réalisée. Des deux hypothèses 1° et 2°, la première est évidemment vérifiée, et, si l'on attribue à x, y, u les cotes respectives 1, 1, 0, la seconde l'est également. Enfin, les entiers δ, Γ sont l'un et l'autre égaux à 2, en sorte que les groupes

$$\mathrm{S}_\delta,\quad \mathrm{S}_{\delta+1},\quad \ldots,\quad \mathrm{S}_{\Gamma+1},$$

spécifiés dans l'hypothèse 4°, se réduisent ici, le premier (S_δ ou S_2) au système (4) lui-même, le deuxième et dernier ($S_{\Gamma+1}$ ou S_3) à

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= \mathrm{H}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x},\\
\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} &= \mathrm{H}\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y},\\
\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} &= \mathrm{K}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x},\\
\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} &= \mathrm{K}\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} + \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Chacun de ces groupes, S_2, S_3, contient, comme on le voit, un nombre d'équations précisément égal à celui des dérivées principales de cote égale à son indice ; le premier, S_2, se trouve, en fait, résolu par rapport aux dérivées principales de cote 2, et le second, S_3, a, par rapport aux dérivées principales de cote 3, un déterminant différentiel égal à $1 - \mathrm{HK}$. En supposant alors, comme l'exige la restriction d'inégalité posée dans l'hypothèse 4° du n° 198, que le produit HK soit différent de 1 dans les limites où l'on fait varier x, y, la condition d'intégrabilité complète du système (4) s'obtiendra par l'élimination des dérivées principales entre les équations S_2, S_3, S_4.

Si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} + \mathrm{H}\dfrac{\partial \mathrm{K}}{\partial x}}{1-\mathrm{HK}} = \mathrm{P}, \qquad \frac{\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} + \mathrm{H}\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}}{1-\mathrm{HK}} = \mathrm{Q},$$

$$\frac{\dfrac{\partial \mathrm{K}}{\partial x} + \mathrm{K}\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}}{1-\mathrm{HK}} = \mathrm{V}, \qquad \frac{\dfrac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} + \mathrm{K}\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial y}}{1-\mathrm{HK}} = \mathrm{W},$$

on tombe sur la relation

$$\left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \mathrm{PW} - \mathrm{QV} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x} = 0,$$

qui doit avoir lieu quels que soient x, y, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$, considérés comme trois variables indépendantes distinctes [1].

---

[1] Les relations S_3, résolues par rapport aux dérivées troisièmes de u, donnent, en effet,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} = \mathrm{P}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \mathrm{Q}, \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2} = \mathrm{V}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \mathrm{W};$$

considérant ces deux dernières formules, on différentiera la première par rapport

Dans le cas particulier où les fonctions H, K se réduisent à deux constantes (n'ayant pas pour produit l'unité), cette relation devient

$$\frac{\partial^2 M}{\partial y^2} + H \frac{\partial^2 N}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + K \frac{\partial^2 M}{\partial x \, \partial y}.$$

200. Dans un système différentiel résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, faisons provisoirement abstraction de toute équation dont le premier membre serait une dérivée de quelque autre, et supposons que le système résultant, S, satisfasse aux hypothèses formulées dans l'un ou l'autre des nos 197, 198. Cela étant, pour que le système primitivement donné soit complètement intégrable, il faut et il suffit : 1° que le système S le soit lui-même; 2° que les équations jusqu'ici négligées soient de simples conséquences numériques de S prolongé.

On raisonnera comme au n° 171.

Réduction des systèmes auxquels s'appliquent les considérations précédentes.

201. Nous nommerons *système simple* un système différentiel du premier ordre résolu par rapport aux diverses dérivées (premières) qui intéressent une seule et même variable, et linéaire par rapport à l'ensemble de toutes les dérivées (premières). Un pareil système est visiblement orthonome : il suffit, pour s'en convaincre, d'attribuer à toutes les variables indépendantes la cote 1, à toutes les inconnues la cote zéro, et de se reporter à l'alinéa I du n° 161.

Cela posé, *dans tout système différentiel,* S, *auquel s'applique l'un ou l'autre des deux théorèmes d'existence établis aux nos* 197 *et* 198, *la recherche d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données se ramène à une semblable recherche successivement exécutée dans divers systèmes simples.*

I. *La recherche, dans le système différentiel* S, *visé par l'énoncé ci-dessus, d'intégrales ordinaires répondant à des condi-*

à y, la seconde par rapport à x, et l'on éliminera, entre les quatre équations, les trois dérivées

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \, \partial y}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \, \partial y^2}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \, \partial y^2}.$$

tions initiales données, se ramène à une semblable recherche exécutée dans un système orthonome, passif et régulier, de grade 1.

Nous distinguerons deux cas, suivant que le théorème d'existence du n° 197 ou celui du n° 198 est applicable au système proposé S.

Dans le dernier cas, le point formulé au début du présent alinéa I résulte de la démonstration même du théorème d'existence (n° 198).

Dans le premier cas, le système S est (n° 197, III) de la forme

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = \ldots, \qquad \frac{\partial^\beta v}{\partial x^\beta} = \ldots, \qquad \ldots,$$

et, si l'on considère les conditions initiales

$$\left.\begin{aligned} u &= \quad F_0(y, \ldots) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \quad F_1(y, \ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial^{\alpha-1} u}{\partial x^{\alpha-1}} &= F_{\alpha-1}(y, \ldots) \end{aligned}\right\} \quad \text{pour } x = x_0,$$

$$\left.\begin{aligned} v &= \quad G_0(y, \ldots) \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \quad G_1(y, \ldots) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial^{\beta-1} v}{\partial x^{\beta-1}} &= G_{\beta-1}(y, \ldots) \end{aligned}\right\} \quad \text{pour } x = x_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on voit que les diverses circonstances spécifiées au n° 155 s'y trouvent réalisées. En appliquant au système S, nécessairement orthonome, le mécanisme décrit au n° 156, on le ramènera à un système orthonome (n° 157) et régulier de grade 1, et ce dernier, se trouvant résolu par rapport à des dérivées (premières) qui n'intéressent toutes qu'une seule et même variable, x, sera nécessairement passif.

II. *Dans un système orthonome, passif et régulier, de grade* 1, *la recherche d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données se ramène à une semblable recherche exécutée successivement dans divers systèmes orthonomes de grade* 1, *dont chacun, impliquant un certain nombre d'inconnues, se trouve*

résolu par rapport aux dérivées premières qui intéressent une seule et même variable.

Supposons, par exemple, qu'on ait affaire au système

(1)

	u	v	w	r
x	$\frac{\partial u}{\partial x}=\ldots$	$\frac{\partial v}{\partial x}=\ldots$	$\frac{\partial w}{\partial x}=\ldots$	$\frac{\partial r}{\partial x}=\ldots$
y	$\frac{\partial u}{\partial y}=\ldots$	$\frac{\partial v}{\partial y}=\ldots$	$\frac{\partial w}{\partial y}=\ldots$	
z	$\frac{\partial u}{\partial z}=\ldots$			
s	$\frac{\partial u}{\partial s}=\ldots$			
t				

où u, v, w, r désignent quatre fonctions inconnues des cinq variables indépendantes x, y, z, s, t. Désignons en outre par x_0, y_0, z_0, s_0, t_0 les valeurs initiales choisies pour ces dernières, par

$$U_5(t),\quad V_3(z,s,t),\quad W_3(z,s,t),\quad R_2(y,z,s,t)$$

quatre fonctions données, et supposons qu'on cherche les intégrales ordinaires, u, v, w, r, du système (1), déterminées par les conditions initiales

$$\begin{aligned}
u &= U_5(t) &&\text{pour } x-x_0=y-y_0=z-z_0=s-s_0=0,\\
v &= V_3(z,s,t) &&\text{pour } x-x_0=y-y_0=0,\\
w &= W_3(z,s,t) &&\text{pour } x-x_0=y-y_0=0,\\
r &= R_2(y,z,s,t) &&\text{pour } x-x_0=0.
\end{aligned}$$

Si l'on désigne par

$$\begin{aligned}
&U_1(x,y,z,s,t),\quad U_2(y,z,s,t),\quad U_3(z,s,t),\quad U_4(s,t),\\
&V_1(x,y,z,s,t),\quad V_2(y,z,s,t),\\
&W_1(x,y,z,s,t),\quad W_2(y,z,s,t),\\
&R_1(x,y,z,s,t)
\end{aligned}$$

certaines fonctions, pour le moment inconnues, il est clair que les intégrales dont il s'agit peuvent, par un groupement convenable des termes de leurs développements, être mises sous la forme

$$(2)\quad \begin{cases} u = (x - x_0)\, U_1 + (y - y_0)\, U_2 + (z - z_0)\, U_3 + (s - s_0)\, U_4 + U_5, \\ v = (x - x_0)\, V_1 + (y - y_0)\, V_2 + V_3, \\ w = (x - x_0)\, W_1 + (y - y_0)\, W_2 + W_3, \\ r = (x - x_0)\, R_1 + R_2. \end{cases}$$

Si l'on pose en outre

$$(3)\qquad (s - s_0)\, U_4 + U_5 = \Upsilon_4(s, t),$$

la première formule (2) devient

$$(4)\qquad u = (x - x_0)\, U_1 + (y - y_0)\, U_2 + (z - z_0)\, U_3 + \Upsilon_4.$$

Cela étant, considérons, dans le Tableau (1), la quatrième ligne, où ne figurent, avec le premier membre $\frac{\partial u}{\partial s}$, que les variables indépendantes, les intégrales, et leurs dérivées paramétriques; ces dernières se rapportent :

S'il s'agit de u, à la variable t;
S'il s'agit de v ou w, aux variables z, s, t;
S'il s'agit de r, aux variables y, z, s, t.

Si dans la ligne considérée on introduit l'hypothèse numérique

$$x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0,$$

on voit, par la formule (4) et les trois dernières formules (2), d'une part, que la fonction u et ses dérivées relatives à s, t se réduisent respectivement à la fonction $\Upsilon_4(s, t)$ et à des dérivées semblables; d'autre part, que les fonctions v, w, r et leurs dérivées paramétriques se réduisent à des fonctions toutes connues de s, t. La fonction Υ_4 satisfait donc à une équation orthonome ayant pour premier membre $\frac{\partial \Upsilon_4}{\partial s}$; elle satisfait de plus, en vertu de (3), à la condition initiale

$$\Upsilon_4 = U_5(t) \qquad \text{pour} \qquad s - s_0 = 0 :$$

on se trouve ramené dès lors, pour la déterminer, à une recherche de la nature qu'indique l'énoncé.

Supposons maintenant connue la fonction $\Upsilon_4(s, t)$, et posons

(5) $$(z-z_0)\,U_3+\Upsilon_4=\Upsilon_3(z, s, t),$$

moyennant quoi la première formule (2) devient

(6) $$u=(x-x_0)\,U_1+(y-y_0)\,U_2+\Upsilon_3.$$

Si, dans la troisième ligne du Tableau (1), où ne figurent, avec le premier membre $\frac{\partial u}{\partial z}$, que les variables indépendantes, les intégrales et leurs dérivées paramétriques, on introduit l'hypothèse numérique

$$x-x_0=y-y_0=0,$$

on voit, par la formule (6) et les trois dernières formules (2), d'une part, que la fonction u et ses dérivées relatives à z, s, t se réduisent respectivement à la fonction $\Upsilon_3(z, s, t)$ et à ses dérivées semblables; d'autre part, que les fonctions v, w, r et leurs dérivées paramétriques se réduisent à des fonctions toutes connues de z, s, t. La fonction Υ_3 satisfait donc à une équation orthonome ayant pour premier membre $\frac{\partial \Upsilon_3}{\partial z}$; elle satisfait de plus, en vertu de (5), à la condition initiale

$$\Upsilon_3=\Upsilon_4(s, t) \qquad \text{pour} \qquad z-z_0=0,$$

ce qui nous ramène à une recherche de même nature que lorsqu'il s'agissait de Υ_4.

Supposons connue à son tour la fonction $\Upsilon_3(z, s, t)$, et posons

(7) $$\begin{cases} (y-y_0)\,U_2+\ \Upsilon_3=\Upsilon_2(y, z, s, t), \\ (y-y_0)\,V_2+\ V_3=\Phi_2(y, z, s, t), \\ (y-y_0)\,W_2+W_3=\Psi_2(y, z, s, t), \end{cases}$$

moyennant quoi les trois premières formules (2) deviennent

(8) $$\begin{cases} u=(x-x_0)\,U_1+\Upsilon_2, \\ v=(x-x_0)\,V_1+\Phi_2, \\ w=(x-x_0)\,W_1+\Psi_2. \end{cases}$$

Si, dans la deuxième ligne du Tableau (1), où ne figurent, avec les premiers membres $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, que les variables indépendantes, les intégrales et leurs dérivées paramétriques, on introduit l'hypothèse numérique

$$x-x_0=0,$$

on voit, par les formules (8) et la dernière formule (2), d'une part, que les fonctions u, v, w et leurs dérivées relatives à y, z, s, t se réduisent respectivement aux fonctions $\Upsilon_2(y, z, s, t)$, $\Phi_2(y, z, s, t)$, $\Psi_2(y, z, s, t)$ et à leurs dérivées semblables; d'autre part, que la fonction r et ses dérivées paramétriques se réduisent à des fonctions toutes connues de y, z, s, t. Les fonctions Υ_2, Φ_2, Ψ_2 satisfont donc à un système orthonome ayant pour premiers membres $\frac{\partial\Upsilon_2}{\partial y}$, $\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}$, $\frac{\partial\Psi_2}{\partial y}$; elles satisfont de plus, en vertu de (7), aux conditions initiales

$$\left.\begin{aligned}\Upsilon_2 &= \Upsilon_3(z, s, t)\\ \Phi_2 &= V_3(z, s, t)\\ \Psi_2 &= W_3(z, s, t)\end{aligned}\right\}\qquad \text{pour } y - y_0 = 0,$$

ce qui nous ramène encore une fois à une recherche de la nature qu'indique l'énoncé.

Finalement, si l'on suppose connues les fonctions Υ_2, Φ_2, Ψ_2, les intégrales cherchées vérifient les équations de la première ligne de (1), et se réduisent, pour $x - x_0 = 0$, à des fonctions connues, Υ_2, Φ_2, Ψ_2, R_2. On se trouve donc ramené une dernière fois à une recherche de même nature que dans les cas précédents.

III. *Dans un système orthonome de grade* 1, *résolu par rapport aux dérivées premières qui intéressent une seule et même variable, la recherche d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données se ramène à une semblable recherche exécutée dans un système de même nature, mais d'ordre* 1.

Soient $x, y, z, \ldots$ les variables indépendantes; $u_1, u_2, \ldots, u_k$ les inconnues du système proposé; Θ la cote première maxima de ces inconnues;

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u_k}{\partial x}$$

les premiers membres du système. Aux inconnues u_1, u_2, ..., u_k adjoignons, comme inconnues nouvelles, toutes celles d'entre leurs dérivées qui possèdent la double propriété : 1° d'avoir zéro pour ordre partiel relatif à x; 2° d'avoir une cote première inférieure ou égale à Θ. Cela étant, considérons, dans le système orthonome proposé, les diverses relations ultimes (n° 109) dont les premiers membres possèdent la double propriété : 1° d'avoir l'unité pour ordre

partiel relatif à x; 2° d'avoir une cote première inférieure ou égale à $\Theta + 1$. Il est clair que, moyennant de simples changements d'écriture, les premiers membres de ces relations ultimes sont les dérivées premières par rapport à x de toutes les inconnues anciennes et nouvelles. Quant aux seconds membres, ils ne peuvent contenir, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées anciennes) possédant la double propriété : 1° d'avoir zéro pour ordre partiel relatif à x; 2° d'avoir une cote première au plus égale à $\Theta + 1$: donc, moyennant de simples changements d'écriture, ces seconds membres ne contiendront, outre les variables indépendantes, que les inconnues anciennes et nouvelles, et les dérivées premières, relatives à y, z, ..., de ces inconnues.

Enfin, les déterminations initiales des inconnues anciennes et nouvelles sont données s'il s'agit des anciennes, et se déduisent des données par de simples différentiations relatives à y, z, ... s'il s'agit des nouvelles.

IV. *Dans un système du premier ordre résolu par rapport aux dérivées qui intéressent une seule et même variable, la recherche d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données se ramène à une semblable recherche exécutée dans un système de même nature, mais linéaire par rapport aux dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, ou, en d'autres termes, dans un système simple.*

Soient x, y, z, ... les variables indépendantes ; u_1, u_2, ..., u_k les inconnues du système donné;

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad \dots, \quad \frac{\partial u_k}{\partial x}$$

les premiers membres. Posons

$$(9) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x} = p_i^x \qquad (i = 1, 2, \dots, k),$$

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial u_i}{\partial y} = p_i^y \\ &\frac{\partial u_i}{\partial z} = p_i^z \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2, \dots, k),$$

et adjoignons aux inconnues anciennes toutes les dérivées premières

à titre d'inconnues nouvelles. En remplaçant, dans le système donné, les diverses dérivées premières par leurs notations nouvelles, on obtient les relations

$$(11)\qquad p_i^x = \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

dont les seconds membres ne contiennent, avec les variables indépendantes, que les quantités u_i, p_i^y, p_i^z, ... ($i = 1, 2, \ldots, k$). Une différentiation relative à x, exécutée sur chacune des relations (11), donne

$$(12)\qquad \frac{\partial p_i^x}{\partial x} = \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

système évidemment linéaire par rapport aux dérivées qui y figurent, et dont les seconds membres ne contiennent, avec les variables indépendantes, que les inconnues u_i, p_i^y, p_i^z, ... ($i = 1, 2, \ldots, k$) et leurs dérivées premières relatives à x. Enfin, les relations

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u_i}{\partial x},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u_i}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial u_i}{\partial x},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

peuvent, en vertu de (9) et (10), s'écrire sous la forme

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial p_i^y}{\partial x} = \dfrac{\partial p_i^x}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial p_i^z}{\partial x} = \dfrac{\partial p_i^x}{\partial z}, \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Cela posé, si l'on considère le système formé par les équations (9), (12) et (13), et qu'on remplace, dans les seconds membres de (12), les dérivées relatives à x des fonctions u_i, p_i^y, p_i^z, ... ($i = 1, 2, \ldots, k$) par leurs valeurs tirées de (9) et (13), on obtient visiblement un système simple ayant pour premiers membres les dérivées premières relatives à x de u_i, p_i^x, p_i^y, p_i^z, ... ($i = 1, 2, \ldots, k$), c'est-à-dire de toutes les inconnues anciennes et nouvelles.

On connaît d'ailleurs, dans ce système, les déterminations initiales de toutes les inconnues : car celle de u_i est donnée directement,

celles de p_i^y, p_i^z, ... s'en déduisent par de simples différentiations relatives à y, z, ... respectivement, et celle de p_i^x se calcule ensuite à l'aide de (11).

V. Le simple rapprochement des alinéas I, II, III et IV suffit à établir l'exactitude de notre énoncé général.

CHAPITRE XIII.

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS DONT L'INTÉGRATION SE RAMÈNE A CELLE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

Systèmes passifs d'équations linéaires et homogènes du premier ordre à une seule fonction inconnue; méthode de Jacobi.

202. Un système du premier ordre impliquant une seule fonction inconnue, et résolu par rapport à certaines dérivées (premières) de cette inconnue, est nécessairement orthonome. Il suffit, pour s'en convaincre, de se reporter à l'alinéa I du n° 161, et d'observer : 1° que le Tableau du système a une disposition régulière; 2° qu'en attribuant à l'inconnue une cote égale à zéro, et à chaque variable indépendante une cote égale à 1, la cote de chaque dérivée est égale à son ordre même, et que, dès lors, celle d'un second membre quelconque ne peut surpasser celle du premier membre correspondant.

Nous nous proposons actuellement d'étudier les systèmes passifs d'équations aux dérivées partielles du premier ordre impliquant une seule fonction inconnue, ayant par rapport aux dérivées de la fonction la forme linéaire et homogène, et tels, en outre, que les coefficients des dérivées n'y renferment que les seules variables indépendantes *à l'exclusion de l'inconnue.* Un pareil système est donc de la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \mathrm{A}_{1,1}\dfrac{\partial f}{\partial u_1} + \ldots + \mathrm{A}_{1,q}\dfrac{\partial f}{\partial u_q}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_p} = \mathrm{A}_{p,1}\dfrac{\partial f}{\partial u_1} + \ldots + \mathrm{A}_{p,q}\dfrac{\partial f}{\partial u_q}, \end{array}\right.$$

où f désigne la fonction inconnue, $x_1, \ldots, x_p, u_1, \ldots, u_q$ les variables

indépendantes, et

$$\begin{matrix} A_{1,1}, & \ldots, & A_{1,q}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ A_{p,1}, & \ldots, & A_{p,q} \end{matrix}$$

diverses fonctions données des seules variables

$$x_1, \quad \ldots, \quad x_p, \qquad u_1, \quad \ldots, \quad u_q,$$

à l'exclusion de f; ces fonctions données se nomment les *coefficients* du système (1).

Cela posé, et les conditions de passivité du système (1) étant supposées satisfaites, nous choisirons pour les variables indépendantes des valeurs initiales quelconques à partir desquelles les coefficients soient développables; puis, considérant parmi les intégrales de (1) celles qui sont, comme les coefficients, développables à partir des valeurs en question, nous ferons voir que leur recherche se ramène à celle des équations intégrales générales d'un système passif d'équations différentielles totales (n° 116).

203. Considérons, en même temps que le système (1), le système différentiel total

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} = - A_{1,1}, & \ldots, & \dfrac{\partial u_q}{\partial x_1} = - A_{1,q}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial x_p} = - A_{p,1}, & \ldots, & \dfrac{\partial u_q}{\partial x_p} = - A_{p,q}, \end{cases}$$

qui s'en déduit par un mécanisme facile à apercevoir, et où $u_1, \ldots, u_q$ désignent des fonctions inconnues de $x_1, \ldots, x_p$. Je dis que *la passivité de l'un quelconque des systèmes* (1), (2) *entraîne nécessairement celle de l'autre.*

I. Considérons d'abord le système (1).

Pour former ses conditions de passivité, il suffit, puisque les dérivées cardinales des inconnues sont du second ordre, d'adjoindre aux équations (1) celles qui s'en déduisent par toutes les différentiations premières possibles, et d'éliminer, entre les équations du système résultant, toutes les dérivées principales du premier et du second ordre. A cet effet, nous partagerons les équations dont il

s'agit en trois groupes successifs, suivant qu'elles ont pour premiers membres : 1° les dérivées principales du premier ordre, c'est-à-dire les dérivées du premier ordre qui se rapportent à une des variables x; 2° les dérivées du second ordre intéressant une des variables x et une des variables u; 3° les dérivées du second ordre n'intéressant que les variables x. De ces trois groupes, les deux premiers ne fournissent visiblement, pour chacune des dérivées principales qui figurent dans leurs premiers membres, qu'une seule expression indépendante de toute dérivée principale. Cela étant, si, dans le troisième groupe, on tient compte des deux premiers, on n'aura encore, pour chacune des dérivées secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2},$$

qu'une seule expression de cette nature; mais on en aura deux pour chacune des dérivées cardinales. A chaque dérivée cardinale correspondra donc une condition de passivité, obtenue en écrivant que les deux expressions dont il s'agit sont identiquement égales. Chacune des deux expressions qu'on doit ainsi égaler entre elles a d'ailleurs la forme linéaire et homogène par rapport aux dérivées paramétriques premières et secondes de l'inconnue, et les coefficients de ces dérivées ne contiennent que les seules variables indépendantes : la condition de passivité qui résulte de leur comparaison peut donc (puisqu'elle doit être *identiquement* vérifiée) se décomposer en plusieurs relations, qu'on obtiendra en égalant les coefficients des dérivées semblables, et dont chacune (ne renfermant que les seules variables) devra elle-même être identiquement vérifiée.

On effectuera un pareil calcul en faisant varier de toutes les manières possibles le choix de la dérivée cardinale du système (1). Parmi les relations obtenues, un certain nombre sont nécessairement satisfaites d'elles-mêmes : en les négligeant, comme de raison, il restera finalement $q\frac{p(p-1)}{2}$ relations, représentables à l'aide de la formule unique

$$(3) \qquad -\frac{\partial A_{m,S}}{\partial x_n} + \sum_{R=1}^{R=q} \frac{\partial A_{m,S}}{\partial u_R} A_{n,R} = -\frac{\partial A_{n,S}}{\partial x_m} + \sum_{R=1}^{R=q} \frac{\partial A_{n,S}}{\partial u_R} A_{m,R}.$$

Dans cette formule, il faut prendre successivement pour S les

nombres 1, 2, ..., q, et pour m, n toutes les combinaisons deux à deux ($m \neq n$) des entiers 1, 2, ..., p. Les relations dont il s'agit doivent, comme nous l'avons dit, être vérifiées pour toutes valeurs numériques de

$$x_1, \quad \ldots, \quad x_p, \qquad u_1, \quad \ldots, \quad u_q.$$

II. Considérons maintenant le système différentiel total (2).

A chaque dérivée cardinale correspond, comme nous l'avons vu au n° **116**, une condition de passivité, ce qui donne en tout $q\frac{p(p-1)}{2}$ conditions : or, celle qui correspond à la dérivée cardinale

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial x_m \partial x_n} \qquad (m \neq n)$$

n'est autre que la condition (3), fournie par le calcul précédent.

204. Le système (1), supposé passif, admet (n° **115**) une intégrale ordinaire se réduisant, pour les valeurs initiales des variables x_1, ..., x_p, à une fonction donnée des variables restantes u_1, ..., u_q; il admet donc, notamment, q intégrales particulières,

$$f_1, \quad \ldots, \quad f_q,$$

dont le déterminant différentiel relatif à

$$u_1, \quad \ldots, \quad u_q$$

a une valeur initiale différente de zéro. Cela étant, je dis que *sa solution générale est une fonction arbitraire de* f_1, ..., f_q (la composante étant, bien entendu, choisie de façon que le principe général des fonctions composées soit applicable).

Effectivement, considérons le Tableau rectangulaire

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}, & \ldots, & \frac{\partial f_1}{\partial u_q}, & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \frac{\partial f_q}{\partial u_1}, & \ldots, & \frac{\partial f_q}{\partial u_q}, & \frac{\partial f_q}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial f_q}{\partial x_p}, \\ \frac{\partial f}{\partial u_1}, & \ldots, & \frac{\partial f}{\partial u_q}, & \frac{\partial f}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial f}{\partial x_p}, \end{array} \right.$$

qui contient $q+p$ colonnes et $q+1$ lignes, par suite au moins autant de colonnes que de lignes. En supposant que f soit, comme $f_1, \ldots, f_q$, une intégrale du système (1), on a les identités

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} = A_{1,1}\dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} + \ldots + A_{1,q}\dfrac{\partial f_1}{\partial u_q}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial f_q}{\partial x_1} = A_{1,1}\dfrac{\partial f_q}{\partial u_1} + \ldots + A_{1,q}\dfrac{\partial f_q}{\partial u_q}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = A_{1,1}\dfrac{\partial f}{\partial u_1} + \ldots + A_{1,q}\dfrac{\partial f}{\partial u_q}; \end{array}\right. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p} = A_{p,1}\dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} + \ldots + A_{p,q}\dfrac{\partial f_1}{\partial u_q}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial f_q}{\partial x_p} = A_{p,1}\dfrac{\partial f_q}{\partial u_1} + \ldots + A_{p,q}\dfrac{\partial f_q}{\partial u_q}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_p} = A_{p,1}\dfrac{\partial f}{\partial u_1} + \ldots + A_{p,q}\dfrac{\partial f}{\partial u_q}. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

En vertu de ces identités, chacune des p dernières colonnes du Tableau (4) a tous ses éléments exprimables par une même fonction linéaire et homogène des éléments de mêmes rangs des q premières; dès lors, tout déterminant d'ordre $q+1$ extrait du Tableau (4) se décompose en une somme de plusieurs autres dont chacun est nul comme ayant au moins deux colonnes proportionnelles. Ainsi, les déterminants différentiels des intégrales

$$f_1, \quad \ldots, \quad f_q, \quad f$$

par rapport à $q+1$ quelconques des variables indépendantes sont tous identiquement nuls; d'ailleurs celui des q premières intégrales par rapport aux q variables $u_1, \ldots, u_q$ a, par hypothèse, une valeur initiale différente de zéro. Donc, en vertu du n° **124**, f est une fonction composée de $f_1, \ldots, f_q$.

Réciproquement, toute fonction composée de $f_1, \ldots, f_q$ est une intégrale de (1). La relation

$$f = F(f_1, \ldots, f_q)$$

donne, en effet, par différentiation,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial f_q}\frac{\partial f_q}{\partial x_1},$$
$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{\partial F}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial f_q}\frac{\partial f_q}{\partial u_1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial f}{\partial u_q} = \frac{\partial F}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial u_q} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial f_q}\frac{\partial f_q}{\partial u_q}.$$

Ces relations, respectivement multipliées par -1, $A_{1,1}$, ..., $A_{1,q}$, et ajoutées membre à membre en tenant compte des q premières équations (5), fait retomber sur la première équation (1), et l'on retomberait de même sur les suivantes.

205. *Les systèmes* (1) *et* (2) *étant supposés passifs* (n° 203), *l'intégration de l'un se ramène à celle de l'autre.*

I. *Si l'on connaît q intégrales particulières du système* (1) *satisfaisant à la seule restriction que leur déterminant différentiel relatif à u_1, ..., u_q ait une valeur initiale différente de zéro, on a par là même les intégrales générales du système* (2).

Soient en effet f_1, ..., f_q les q intégrales particulières dont il s'agit; j l'un quelconque des entiers 1, 2, ..., q; i l'un quelconque des entiers 1, 2, ..., p. En multipliant respectivement par

$$\frac{\partial f_j}{\partial u_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f_j}{\partial u_q}$$

les q équations contenues dans la ligne de rang i du système (2), et ajoutant les produits membre à membre, il vient

$$\frac{\partial f_j}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial f_j}{\partial u_q}\frac{\partial u_q}{\partial x_i} + A_{i,1}\frac{\partial f_j}{\partial u_1} + \ldots + A_{i,q}\frac{\partial f_j}{\partial u_q} = 0;$$

d'ailleurs, f_j étant une intégrale particulière de (1), l'expression

$$A_{i,1}\frac{\partial f_j}{\partial u_1} + \ldots + A_{i,q}\frac{\partial f_j}{\partial u_q}$$

est, quels que soient x_1, ..., x_p, u_1, ..., u_q, identiquement égale à

$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, en sorte que la relation précédente peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \frac{\partial f_j}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial f_j}{\partial u_q}\frac{\partial u_q}{\partial x_i} = 0.$$

En faisant donc successivement $i = 1, 2, \ldots, p$ et $j = 1, 2, \ldots, q$, on obtient les pq équations

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial u_q}\frac{\partial u_q}{\partial x_1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_p} + \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_p} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial u_q}\frac{\partial u_q}{\partial x_p} = 0; \end{array}\right.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f_q}{\partial x_1} + \frac{\partial f_q}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f_q}{\partial u_q}\frac{\partial u_q}{\partial x_1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_p} + \frac{\partial f_q}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_p} + \ldots + \frac{\partial f_q}{\partial u_q}\frac{\partial u_q}{\partial x_p} = 0. \end{array}\right.$$

Ces pq équations sont partagées ci-dessus en q groupes composés chacun de p équations; on peut aussi les partager, comme il suit, en p groupes composés chacun de q équations :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial u_q}\frac{\partial u_q}{\partial x_1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1} + \frac{\partial f_q}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f_q}{\partial u_q}\frac{\partial u_q}{\partial x_1} = 0; \end{array}\right.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x_p} + \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_p} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial u_q}\frac{\partial u_q}{\partial x_p} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_p} + \frac{\partial f_q}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_p} + \ldots + \frac{\partial f_q}{\partial u_q}\frac{\partial u_q}{\partial x_p} = 0. \end{array}\right.$$

De ces p nouveaux groupes, celui de rang i, composé de q équations comme la ligne de rang i du système (2), s'en déduit à l'aide des q systèmes de multiplicateurs

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}, & \ldots, & \frac{\partial f_1}{\partial u_q}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \frac{\partial f_q}{\partial u_1}, & \ldots, & \frac{\partial f_q}{\partial u_q}, \end{array}$$

dont le déterminant est, par hypothèse, différent de zéro ; il en résulte que ce groupe est en corrélation multiplicatoire (n° 122) avec cette ligne, et, par suite, que le système des p groupes est en corrélation multiplicatoire avec le système (2). L'intégration du système (2) se ramène donc à celle du système formé par les p groupes de q équations : or, si l'on se reporte au groupement primitif (q groupes de p équations), l'intégration est immédiate et donne

$$(6) \qquad f_1 = C_1, \quad \ldots, \quad f_q = C_q,$$

où $C_1, \ldots, C_q$ désignent des constantes arbitraires. Le déterminant différentiel du système (6) par rapport à $u_1, \ldots, u_q$ est, par hypothèse, différent de zéro, et il est manifeste qu'en donnant aux constantes des valeurs numériques convenables, la résolution du système (6) par rapport à $u_1, \ldots, u_q$ fournira les intégrales particulières de (2) répondant à des conditions initiales données : pour avoir celles qui répondent aux conditions initiales

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = \upsilon_1 \\ \cdots\cdots \\ u_q = \upsilon_q \end{array}\right\} \quad \text{pour } x_1 - \xi_1 = \ldots = x_p - \xi_p = 0,$$

il suffira de donner à $C_1, \ldots, C_q$ les valeurs numériques

$$\begin{array}{l} \Gamma_1 = f_1(\upsilon_1, \ldots, \upsilon_q, \xi_1, \ldots, \xi_p), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \Gamma_q = f_q(\upsilon_1, \ldots, \upsilon_q, \xi_1, \ldots, \xi_p). \end{array}$$

II. *Si l'on connaît les intégrales générales du système* (2), *on connaît par là même q intégrales particulières de* (1) *dont le déterminant différentiel relatif à $u_1, \ldots, u_q$ a une valeur initiale différente de zéro.*

Soit

$$(7) \qquad f_1 = C_1, \quad \ldots, \quad f_q = C_q$$

un système qui, résolu par rapport à $u_1, \ldots, u_q$, fournit les intégrales générales de (2) [de là résulte, notamment, que le déterminant différentiel de $f_1, \ldots, f_q$ par rapport à $u_1, \ldots, u_q$ est différent de zéro]. Je dis que chacune des fonctions $f_1, \ldots, f_q$ est une solution particulière de (1).

Soient, en effet,

$$\xi_1, \quad \ldots, \quad \xi_p, \quad \upsilon_1, \quad \ldots, \quad \upsilon_q$$

des valeurs numériques arbitraires de

$$x_1, \quad \ldots, \quad x_p, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_q.$$

Si, dans le système (7), on donne aux constantes $C_1, \ldots, C_q$ les valeurs numériques

$$\Gamma_1 = f_1(\upsilon_1, \ldots, \upsilon_q, \xi_1, \ldots, \xi_p),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Gamma_q = f_q(\upsilon_1, \ldots, \upsilon_q, \xi_1, \ldots, \xi_p),$$

la résolution du système

(8) $$f_1 = \Gamma_1, \quad \ldots, \quad f_q = \Gamma_q,$$

effectuée par rapport à $u_1, \ldots, u_q$, fournira les intégrales particulières du système (2) qui répondent aux conditions initiales

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = \upsilon_1 \\ \ldots\ldots \\ u_q = \upsilon_q \end{array}\right\} \quad \text{pour } x_1 - \xi_1 = \ldots = x_p - \xi_p = 0.$$

Cela étant, remplaçons mentalement, dans le système (8), $u_1, \ldots, u_q$ par les intégrales particulières dont il s'agit : les équations (8) sont alors des identités en $x_1, \ldots, x_p$, et, en les différentiant, on a encore des identités. Or, l'équation $f_j = \Gamma_j$, différentiée par rapport à x_i, donne

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \frac{\partial f_j}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial f_j}{\partial u_q}\frac{\partial u_q}{\partial x_i} = 0;$$

d'autre part, puisque $u_1, \ldots, u_q$ sont des intégrales particulières de (2), on a identiquement, en $x_1, \ldots, x_p$,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_i} = -A_{i,1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u_q}{\partial x_i} = -A_{i,q}:$$

on a donc aussi, quels que soient $x_1, \ldots, x_p$,

(9) $$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = A_{i,1}\frac{\partial f_j}{\partial u_1} + \ldots + A_{i,q}\frac{\partial f_j}{\partial u_q}.$$

Si, dans cette dernière relation, on introduit les hypothèses numériques

$$x_1 = \xi_1, \quad \ldots, \quad x_p = \xi_p,$$

$u_1, \ldots, u_q$ prennent respectivement les valeurs numériques $\upsilon_1, \ldots, \upsilon_q$; et, comme les valeurs numériques

$$\upsilon_1, \quad \ldots, \quad \upsilon_q, \quad \xi_1, \quad \ldots, \quad \xi_p$$

sont arbitraires, l'équation (9) est identiquement vérifiée en

$$u_1. \quad \ldots, \quad u_q, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_p.$$

Ainsi, l'une quelconque des fonctions $f_1, \ldots, f_q$ vérifie identiquement l'une quelconque des équations (1) : c'est ce que nous voulions établir.

III. En rapprochant du numéro précédent les alinéas I et II du présent numéro, on aperçoit immédiatement l'exactitude de notre énoncé général.

Systèmes passifs d'équations linéaires et non homogènes du premier ordre à une seule fonction inconnue; méthode de Jacobi; son extension à un cas qui comporte plusieurs inconnues.

206. Pour éviter d'inutiles longueurs, nous exposerons la méthode de Jacobi, non sur le cas, devenu classique, d'une seule inconnue, mais sur le cas un peu plus général auquel fait allusion le titre ci-dessus : en supposant, dans ce qui suit, le nombre des inconnues égal à 1, on retombera sur le problème classique.

Si l'on considère le système (évidemment orthonome) [1]

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{U}_x + \mathrm{S}_x \dfrac{\partial u}{\partial s} + \mathrm{T}_x \dfrac{\partial u}{\partial t}, & \dfrac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{V}_x + \mathrm{S}_x \dfrac{\partial v}{\partial s} + \mathrm{T}_x \dfrac{\partial v}{\partial t}, & \dfrac{\partial w}{\partial x} = \mathrm{W}_x + \mathrm{S}_x \dfrac{\partial w}{\partial s} + \mathrm{T}_x \dfrac{\partial w}{\partial t} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \mathrm{U}_y + \mathrm{S}_y \dfrac{\partial u}{\partial s} + \mathrm{T}_y \dfrac{\partial u}{\partial t}, & \dfrac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{V}_y + \mathrm{S}_y \dfrac{\partial v}{\partial s} + \mathrm{T}_y \dfrac{\partial v}{\partial t}, & \dfrac{\partial w}{\partial y} = \mathrm{W}_y + \mathrm{S}_y \dfrac{\partial w}{\partial s} + \mathrm{T}_y \dfrac{\partial w}{\partial t} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = \mathrm{U}_z + \mathrm{S}_z \dfrac{\partial u}{\partial s} + \mathrm{T}_z \dfrac{\partial u}{\partial t}, & \dfrac{\partial v}{\partial z} = \mathrm{V}_z + \mathrm{S}_z \dfrac{\partial v}{\partial s} + \mathrm{T}_z \dfrac{\partial v}{\partial t}, & \dfrac{\partial w}{\partial z} = \mathrm{W}_z + \mathrm{S}_z \dfrac{\partial w}{\partial s} + \mathrm{T}_z \dfrac{\partial w}{\partial t} \end{array}\right.$$

où u, v, w désignent des fonctions inconnues de x, y, z, s, t, et

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{c} \mathrm{U}_x, \quad \mathrm{U}_y, \quad \mathrm{U}_z, \quad \mathrm{V}_x, \quad \mathrm{V}_y, \quad \mathrm{V}_z, \quad \mathrm{W}_x, \quad \mathrm{W}_y, \quad \mathrm{W}_z, \\ \mathrm{S}_x, \quad \mathrm{S}_y, \quad \mathrm{S}_z, \quad \mathrm{T}_x, \quad \mathrm{T}_y, \quad \mathrm{T}_z \end{array}\right.$$

---

[1] Il suffit, pour se convaincre de la nature orthonome du système (1), d'attribuer à chacune des variables indépendantes la cote 1, à chacune des fonctions inconnues la cote zéro, et de se reporter à l'alinéa I du n° 161.

des fonctions connues de x, y, z, s, t, u, v, w satisfaisant aux conditions voulues pour que le système (1) *soit passif, l'intégration de ce dernier se ramène à celle d'un système passif d'équations différentielles totales* (n° 116).

I. Pour former les conditions de passivité du système (1), il suffit (n° 112) d'adjoindre aux équations qui le composent celles qui s'en déduisent par toutes les différentiations premières possibles, et d'éliminer entre les équations du système résultant toutes les dérivées principales du premier et du second ordre. Aux diverses dérivées cardinales,

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z}, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z}, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y}, & \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial z}, & \dfrac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial z}, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}, & \dfrac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial z}, & \dfrac{\partial^2 w}{\partial y\, \partial z}, \end{array}$$

correspondent respectivement des conditions de passivité ayant la forme

$$(3)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} A_{xy,s}\dfrac{\partial u}{\partial s} + A_{xy,t}\dfrac{\partial u}{\partial t} + A_{xy,u} = 0, \\ A_{xz,s}\dfrac{\partial u}{\partial s} + A_{xz,t}\dfrac{\partial u}{\partial t} + A_{xz,u} = 0, \\ A_{yz,s}\dfrac{\partial u}{\partial s} + A_{yz,t}\dfrac{\partial u}{\partial t} + A_{yz,u} = 0, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} A_{xy,s}\dfrac{\partial v}{\partial s} + A_{xy,t}\dfrac{\partial v}{\partial t} + A_{xy,v} = 0, \\ A_{xz,s}\dfrac{\partial v}{\partial s} + A_{xz,t}\dfrac{\partial v}{\partial t} + A_{xz,v} = 0, \\ A_{yz,s}\dfrac{\partial v}{\partial s} + A_{yz,t}\dfrac{\partial v}{\partial t} + A_{yz,v} = 0, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} A_{xy,s}\dfrac{\partial w}{\partial s} + A_{xy,t}\dfrac{\partial w}{\partial t} + A_{xy,w} = 0, \\ A_{xz,s}\dfrac{\partial w}{\partial s} + A_{xz,t}\dfrac{\partial w}{\partial t} + A_{xz,w} = 0, \\ A_{yz,s}\dfrac{\partial w}{\partial s} + A_{yz,t}\dfrac{\partial w}{\partial t} + A_{yz,w} = 0, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où les A désignent certaines expressions composées avec les fonctions (2) et leurs dérivées partielles du premier ordre, et ne conte-

nant, par suite, que x, y, z, s, t, u, v, w. Pour que le système (1) soit passif, il est donc nécessaire et suffisant que l'on ait, quels que soient x, y, z, s, t, u, v, w,

$$\begin{gathered}
A_{xy,s} = A_{xy,t} = A_{xy,u} = A_{xy,v} = A_{xy,w} = 0, \\
A_{xz,s} = A_{xz,t} = A_{xz,u} = A_{xz,v} = A_{xz,w} = 0, \\
A_{yz,s} = A_{yz,t} = A_{yz,u} = A_{yz,v} = A_{yz,w} = 0.
\end{gathered}$$

On arrive exactement au même résultat, si, au lieu du système (1), ci-dessus défini, on considère le système

$$(4) \quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= S_x \frac{\partial f}{\partial s} + T_x \frac{\partial f}{\partial t} - U_x \frac{\partial f}{\partial u} - V_x \frac{\partial f}{\partial v} - W_x \frac{\partial f}{\partial w}, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= S_y \frac{\partial f}{\partial s} + T_y \frac{\partial f}{\partial t} - U_y \frac{\partial f}{\partial u} - V_y \frac{\partial f}{\partial v} - W_y \frac{\partial f}{\partial w}, \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= S_z \frac{\partial f}{\partial s} + T_z \frac{\partial f}{\partial t} - U_z \frac{\partial f}{\partial u} - V_z \frac{\partial f}{\partial v} - W_z \frac{\partial f}{\partial w},
\end{aligned}\right.$$

où f désigne une fonction inconnue des variables indépendantes

$$(5) \qquad x,\ y,\ z,\ s,\ t,\ u,\ v,\ w.$$

Il est facile de vérifier par le calcul l'exactitude de cette double remarque.

Le système (4) *est donc passif, puisque le système* (1) *est supposé l'être.*

II. *Si l'on désigne par* f_1, f_2, f_3 *trois solutions ordinaires du système* (4) *telles que le système des équations finies*

$$(6) \qquad f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad f_3 = 0$$

soit résoluble par rapport à u, v, w *conformément au principe général des fonctions implicites, les fonctions de* x, y, z, s, t *fournies par cette résolution constituent un groupe d'intégrales ordinaires du système* (1).

Effectivement, les fonctions implicites u, v, w fournies par la résolution de (6) vérifient les relations

$$(7) \quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \\
\frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial f_1}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial s} &= 0, \\
\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} &= 0,
\end{aligned}\right.$$

obtenues en différentiant la première des relations (6) successivement par rapport à x, s, t. En multipliant les relations (7) respectivement par 1, $-S_x$, $-T_x$, et ajoutant membre à membre, il vient

$$(8)\quad \frac{\partial f_1}{\partial x} - S_x \frac{\partial f_1}{\partial s} - T_x \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - S_x \frac{\partial u}{\partial s} - T_x \frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - S_x \frac{\partial v}{\partial s} - T_x \frac{\partial v}{\partial t}\right) + \frac{\partial f_1}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - S_x \frac{\partial w}{\partial s} - T_x \frac{\partial w}{\partial t}\right) = 0.$$

D'un autre côté, la relation

$$(9)\qquad \frac{\partial f_1}{\partial x} - S_x \frac{\partial f_1}{\partial s} - T_x \frac{\partial f_1}{\partial t} = - U_x \frac{\partial f_1}{\partial u} - V_x \frac{\partial f_1}{\partial v} - W_x \frac{\partial f_1}{\partial w}$$

est vérifiée pour toutes les valeurs des quantités (5), puisque f_1 est une intégrale de (4); et, si l'on y remplace u, v, w par leurs valeurs en x, y, z, s, t tirées du système (6), elle le sera, comme (8), pour toutes valeurs de x, y, z, s, t. Cela étant, la combinaison de (8) et (9) donne immédiatement

$$(10)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - U_x - S_x \frac{\partial u}{\partial s} - T_x \frac{\partial u}{\partial t}\right) \\ &+ \frac{\partial f_1}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - V_x - S_x \frac{\partial v}{\partial s} - T_x \frac{\partial v}{\partial t}\right) \\ &+ \frac{\partial f_1}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - W_x - S_x \frac{\partial w}{\partial s} - T_x \frac{\partial w}{\partial t}\right) = 0. \end{aligned}$$

En opérant sur les équations $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ comme on vient de le faire sur $f_1 = 0$, on obtiendrait deux autres relations ne différant de (10) que par le changement de f_1 en f_2 et en f_3. Finalement, puisque le système (6) est supposé résoluble conformément au principe général des fonctions implicites, le déterminant différentiel de ses premiers membres par rapport à u, v, w est différent de zéro, et les trois relations que nous venons de former donnent immédiatement

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} - U_x - S_x \frac{\partial u}{\partial s} - T_x \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ &\frac{\partial v}{\partial x} - V_x - S_x \frac{\partial v}{\partial s} - T_x \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \\ &\frac{\partial w}{\partial s} - W_x - S_x \frac{\partial w}{\partial s} - T_x \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \end{aligned}$$

On reproduit ainsi la première ligne du système (1), et l'on en reproduirait de même les deux autres lignes.

III. *Réciproquement, toute solution ordinaire du système* (1) *peut s'obtenir en égalant à zéro trois solutions ordinaires convenablement choisies du système* (4), *et résolvant le système ainsi obtenu par rapport à* u, v, w *conformément au principe général des fonctions implicites.*

Désignons par x_0, y_0, z_0, s_0, t_0 les valeurs des variables à partir desquelles nous supposons développées les intégrales considérées du système (1), et par

$$\upsilon(s, t), \quad \varphi(s, t), \quad \psi(s, t)$$

les fonctions de s, t auxquelles ces intégrales se réduisent dans l'hypothèse numérique

$$x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0.$$

Désignons d'un autre côté par

$$(11) \qquad \Gamma_1, \quad \Gamma_2, \quad \Gamma_3, \quad \Gamma_4, \quad \Gamma_5$$

cinq intégrales particulières du système (4) possédant la double propriété : 1° d'être développables à partir des valeurs

$$x_0, \quad y_0, \quad z_0, \quad s_0, \quad t_0,$$
$$u_0 = \upsilon(s_0, t_0), \qquad v_0 = \varphi(s_0, t_0), \qquad w_0 = \psi(s_0, t_0);$$

2° d'avoir, relativement à s, t, u, v, w, un déterminant différentiel différent de zéro pour ces mêmes valeurs. On sait (n° 204) qu'en désignant par F une composante arbitraire, la fonction composée

$$F(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5)$$

est nécessairement aussi une solution du système (4).

Cela étant, introduisons dans les fonctions (11) l'hypothèse collective

$$(12) \qquad \begin{cases} x = x_0, & y = y_0, & z = z_0, \\ u = \upsilon(s, t), & v = \varphi(s, t), & w = \psi(s, t); \end{cases}$$

nous obtiendrons ainsi cinq fonctions,

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \gamma_3, \quad \gamma_4, \quad \gamma_5,$$

des seules variables s, t, fonctions telles, comme nous allons le prou-

ver, que l'un au moins des déterminants du second ordre extraits du Tableau

$$\begin{matrix} \frac{\partial\gamma_1}{\partial s}, & \frac{\partial\gamma_2}{\partial s}, & \frac{\partial\gamma_3}{\partial s}, & \frac{\partial\gamma_4}{\partial s}, & \frac{\partial\gamma_5}{\partial s}, \\ \frac{\partial\gamma_1}{\partial t}, & \frac{\partial\gamma_2}{\partial t}, & \frac{\partial\gamma_3}{\partial t}, & \frac{\partial\gamma_4}{\partial t}, & \frac{\partial\gamma_5}{\partial t} \end{matrix}$$

possède une valeur initiale différente de zéro.

Considérons en effet le déterminant

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial\Gamma_1}{\partial s} & \frac{\partial\Gamma_2}{\partial s} & \frac{\partial\Gamma_3}{\partial s} & \frac{\partial\Gamma_4}{\partial s} & \frac{\partial\Gamma_5}{\partial s} \\ \frac{\partial\Gamma_1}{\partial t} & \frac{\partial\Gamma_2}{\partial t} & \frac{\partial\Gamma_3}{\partial t} & \frac{\partial\Gamma_4}{\partial t} & \frac{\partial\Gamma_5}{\partial t} \\ \frac{\partial\Gamma_1}{\partial u} & \frac{\partial\Gamma_2}{\partial u} & \frac{\partial\Gamma_3}{\partial u} & \frac{\partial\Gamma_4}{\partial u} & \frac{\partial\Gamma_5}{\partial u} \\ \frac{\partial\Gamma_1}{\partial v} & \frac{\partial\Gamma_2}{\partial v} & \frac{\partial\Gamma_3}{\partial v} & \frac{\partial\Gamma_4}{\partial v} & \frac{\partial\Gamma_5}{\partial v} \\ \frac{\partial\Gamma_1}{\partial w} & \frac{\partial\Gamma_2}{\partial w} & \frac{\partial\Gamma_3}{\partial w} & \frac{\partial\Gamma_4}{\partial w} & \frac{\partial\Gamma_5}{\partial w} \end{vmatrix},$$

dont la valeur initiale est, par hypothèse, différente de zéro. Dans ce déterminant, on peut, par l'application des règles élémentaires, substituer respectivement à $\frac{\partial\Gamma_i}{\partial s}$ et $\frac{\partial\Gamma_i}{\partial t}$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$, éléments de rang i des deux premières lignes, les expressions respectives

$$\frac{\partial\Gamma_i}{\partial s} + \frac{\partial\Gamma_i}{\partial u}\frac{\partial\upsilon}{\partial s} + \frac{\partial\Gamma_i}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial s} + \frac{\partial\Gamma_i}{\partial w}\frac{\partial\psi}{\partial s},$$
$$\frac{\partial\Gamma_i}{\partial t} + \frac{\partial\Gamma_i}{\partial u}\frac{\partial\upsilon}{\partial t} + \frac{\partial\Gamma_i}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\Gamma_i}{\partial w}\frac{\partial\psi}{\partial t};$$

on peut, d'autre part, pour calculer les valeurs initiales de ces deux expressions, introduire dans la fonction Γ_i l'hypothèse (12), prendre les deux dérivées premières de la fonction $\gamma_i(s, t)$, ainsi obtenue, et calculer finalement les valeurs initiales de ces dérivées [1]. Le déter-

---

[1] Effectivement, pour obtenir les valeurs initiales des expressions dont il s'agit, il faut y remplacer x, y, z, s, t, u, v, w par les valeurs numériques respectives x_0, y_0, z_0, s_0, t_0, u_0, v_0, w_0.

Or, si, dans la fonction $\Gamma_i(x, y, z, s, t, u, v, w)$, on introduit les hypothèses numériques $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ (sans toucher aux variables s, t, u, v, w), et qu'on prenne ensuite une dérivée quelconque de la fonction de s, t, u, v, w ainsi

minant (13) a donc même valeur initiale que le suivant :

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial\gamma_1}{\partial s} & \frac{\partial\gamma_2}{\partial s} & \frac{\partial\gamma_3}{\partial s} & \frac{\partial\gamma_4}{\partial s} & \frac{\partial\gamma_5}{\partial s} \\ \frac{\partial\gamma_1}{\partial t} & \frac{\partial\gamma_2}{\partial t} & \frac{\partial\gamma_3}{\partial t} & \frac{\partial\gamma_4}{\partial t} & \frac{\partial\gamma_5}{\partial t} \\ \frac{\partial\Gamma_1}{\partial u} & \frac{\partial\Gamma_2}{\partial u} & \frac{\partial\Gamma_3}{\partial u} & \frac{\partial\Gamma_4}{\partial u} & \frac{\partial\Gamma_5}{\partial u} \\ \frac{\partial\Gamma_1}{\partial v} & \frac{\partial\Gamma_2}{\partial v} & \frac{\partial\Gamma_3}{\partial v} & \frac{\partial\Gamma_4}{\partial v} & \frac{\partial\Gamma_5}{\partial v} \\ \frac{\partial\Gamma_1}{\partial w} & \frac{\partial\Gamma_2}{\partial w} & \frac{\partial\Gamma_3}{\partial w} & \frac{\partial\Gamma_4}{\partial w} & \frac{\partial\Gamma_5}{\partial w} \end{vmatrix},$$

et, dès lors, si les déterminants du second ordre qu'on peut extraire des deux premières lignes de (14) avaient tous des valeurs initiales

---

obtenue, le résultat final est le même que si l'on avait d'abord effectué sur $\Gamma_i(x, y, z, s, t, u, v, w)$ la dérivation dont il s'agit, et qu'on eût introduit dans la dérivée résultante les hypothèses numériques $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ (on le voit immédiatement en développant la fonction Γ_i suivant les puissances de $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$). D'après cela, si l'on pose

$$\Gamma_i(x_0, y_0, z_0, s, t, u, v, w) = \Delta_i(s, t, u, v, w),$$

les deux valeurs initiales qu'il s'agit de calculer seront respectivement les mêmes que celles des deux expressions

$$\frac{\partial\Delta_i}{\partial s} + \frac{\partial\Delta_i}{\partial u}\frac{\partial\upsilon}{\partial s} + \frac{\partial\Delta_i}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial s} + \frac{\partial\Delta_i}{\partial w}\frac{\partial\psi}{\partial s},$$

$$\frac{\partial\Delta_i}{\partial t} + \frac{\partial\Delta_i}{\partial u}\frac{\partial\upsilon}{\partial t} + \frac{\partial\Delta_i}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\Delta_i}{\partial w}\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Cela posé, et les valeurs initiales de υ, φ, ψ étant respectivement u_0, v_0, w_0, on peut, pour effectuer ce dernier calcul, remplacer, dans la fonction Δ_i, les variables u, v, w par υ, φ, ψ, et substituer aux deux expressions précédentes les expressions respectives

$$\frac{\partial\Delta_i}{\partial s} + \frac{\partial\Delta_i}{\partial\upsilon}\frac{\partial\upsilon}{\partial s} + \frac{\partial\Delta_i}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial s} + \frac{\partial\Delta_i}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial s},$$

$$\frac{\partial\Delta_i}{\partial t} + \frac{\partial\Delta_i}{\partial\upsilon}\frac{\partial\upsilon}{\partial t} + \frac{\partial\Delta_i}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\Delta_i}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

qui, d'après la définition de γ_i,

$$\gamma_1(s, t) = \Delta_i(s, t, \upsilon, \varphi, \psi),$$

combinée avec la règle des fonctions composées, auront respectivement mêmes valeurs initiales que $\frac{\partial\gamma_i}{\partial s}$, $\frac{\partial\gamma_i}{\partial t}$.

nulles, il en serait de même du déterminant (13), ce qui est absurde. Nous supposerons, pour fixer les idées, que

(15) $$\begin{vmatrix} \frac{\partial \gamma_1}{\partial s} & \frac{\partial \gamma_2}{\partial s} \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial t} & \frac{\partial \gamma_2}{\partial t} \end{vmatrix}$$

a une valeur initiale différente de zéro.

Cela étant, considérons les expressions

$$\Gamma_3 - H_3(\Gamma_1, \Gamma_2), \quad \Gamma_4 - H_4(\Gamma_1, \Gamma_2), \quad \Gamma_5 - H_5(\Gamma_1, \Gamma_2),$$

et cherchons à déterminer les composantes H_3, H_4, H_5 de telle manière que la résolution, par rapport à u, v, w, du système

(16) $$\begin{cases} \Gamma_3 - H_3(\Gamma_1, \Gamma_2) = 0, \\ \Gamma_4 - H_4(\Gamma_1, \Gamma_2) = 0, \\ \Gamma_5 - H_5(\Gamma_1, \Gamma_2) = 0, \end{cases}$$

fournisse précisément les intégrales considérées du système (1).

Observons tout d'abord que si les premiers membres des équations (16) s'annulent, quels que soient x, y, z, s, t, par la substitution à u, v, w des intégrales dont il s'agit, ils s'annuleront forcément, quels que soient s, t, dans l'hypothèse (12); on doit donc avoir, quels que soient s, t,

(17) $$\begin{cases} \gamma_3 - H_3(\gamma_1, \gamma_2) = 0, \\ \gamma_4 - H_4(\gamma_1, \gamma_2) = 0, \\ \gamma_5 - H_5(\gamma_1, \gamma_2) = 0. \end{cases}$$

Faisons alors un changement de variables, et posons

$$\gamma_1(s, t) = \theta_1, \qquad \gamma_2(s, t) = \theta_2;$$

puisque le déterminant différentiel de γ_1 et γ_2 par rapport à s, t a une valeur initiale différente de zéro, on peut de ces formules tirer s et t en fonction de θ_1 et θ_2, et, si l'on substitue à s et t dans (17) les expressions ainsi obtenues, les relations résultantes doivent être vérifiées quels que soient θ_1 et θ_2 ([1]) : en désignant donc par

$$M_3(\theta_1, \theta_2), \quad M_4(\theta_1, \theta_2), \quad M_5(\theta_1, \theta_2)$$

([1]) Car à tout système de valeurs de θ_1, θ_2 (suffisamment voisines des valeurs initiales) les formules de résolution font correspondre un système de valeurs de s, t.

ce que deviennent $\gamma_3(s, t)$, $\gamma_4(s, t)$, $\gamma_5(s, t)$ par cette substitution, on devra avoir identiquement

$$\begin{aligned} M_3(\theta_1, \theta_2) - H_3(\theta_1, \theta_2) &= 0, \\ M_4(\theta_1, \theta_2) - H_4(\theta_1, \theta_2) &= 0, \\ M_5(\theta_1, \theta_2) - H_5(\theta_1, \theta_2) &= 0, \end{aligned}$$

ce qui nous conduit à prendre pour H_3, H_4, H_5 les déterminations respectives M_3, M_4, M_5. Par suite de ce choix, les équations (16) deviennent

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Gamma_3 - M_3(\Gamma_1, \Gamma_2) &= 0, \\ \Gamma_4 - M_4(\Gamma_1, \Gamma_2) &= 0, \\ \Gamma_5 - M_5(\Gamma_1, \Gamma_2) &= 0, \end{aligned} \right.$$

et leurs premiers membres acquièrent la propriété de s'annuler identiquement dans l'hypothèse (12); dès lors, en admettant pour un instant que le déterminant différentiel, relatif à u, v, w, des équations (18) ait une valeur initiale différente de zéro, les fonctions implicites qu'elles définissent, et qui, en vertu de l'alinéa II, vérifient identiquement le système (1), coïncideront précisément avec les intégrales particulières que l'on considère. Reste donc à établir que le déterminant différentiel dont il s'agit a une valeur initiale différente de zéro.

Considérons à cet effet le déterminant (14), dont la valeur initiale, égale, comme nous l'avons vu, à celle du déterminant (13), est par là même différente de zéro. Aux trois dernières colonnes du déterminant (14), on peut, par l'application des règles élémentaires, substituer respectivement les trois suivantes :

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial\gamma_3}{\partial s} - \dfrac{\partial M_3}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial s} - \dfrac{\partial M_3}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\gamma_2}{\partial s}, & \dfrac{\partial\gamma_4}{\partial s} - \dfrac{\partial M_4}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial s} - \dfrac{\partial M_4}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\gamma_2}{\partial s}, & \dfrac{\partial\gamma_5}{\partial s} - \dfrac{\partial M_5}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial s} - \dfrac{\partial M_5}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\gamma_2}{\partial s} \\ \dfrac{\partial\gamma_3}{\partial t} - \dfrac{\partial M_3}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial t} - \dfrac{\partial M_3}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\gamma_2}{\partial t}, & \dfrac{\partial\gamma_4}{\partial t} - \dfrac{\partial M_4}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial t} - \dfrac{\partial M_4}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\gamma_2}{\partial t}, & \dfrac{\partial\gamma_5}{\partial t} - \dfrac{\partial M_5}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\gamma_1}{\partial t} - \dfrac{\partial M_5}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\gamma_2}{\partial t} \\ \dfrac{\partial\Gamma_3}{\partial u} - \dfrac{\partial M_3}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\Gamma_1}{\partial u} - \dfrac{\partial M_3}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\Gamma_2}{\partial u}, & \dfrac{\partial\Gamma_4}{\partial u} - \dfrac{\partial M_4}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\Gamma_1}{\partial u} - \dfrac{\partial M_4}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\Gamma_2}{\partial u}, & \dfrac{\partial\Gamma_5}{\partial u} - \dfrac{\partial M_5}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\Gamma_1}{\partial u} - \dfrac{\partial M_5}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\Gamma_2}{\partial u} \\ \dfrac{\partial\Gamma_3}{\partial v} - \dfrac{\partial M_3}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\Gamma_1}{\partial v} - \dfrac{\partial M_3}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\Gamma_2}{\partial v}, & \dfrac{\partial\Gamma_4}{\partial v} - \dfrac{\partial M_4}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\Gamma_1}{\partial v} - \dfrac{\partial M_4}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\Gamma_2}{\partial v}, & \dfrac{\partial\Gamma_5}{\partial v} - \dfrac{\partial M_5}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\Gamma_1}{\partial v} - \dfrac{\partial M_5}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\Gamma_2}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\Gamma_3}{\partial w} - \dfrac{\partial M_3}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\Gamma_1}{\partial w} - \dfrac{\partial M_3}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\Gamma_2}{\partial w}, & \dfrac{\partial\Gamma_4}{\partial w} - \dfrac{\partial M_4}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\Gamma_1}{\partial w} - \dfrac{\partial M_4}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\Gamma_2}{\partial w}, & \dfrac{\partial\Gamma_5}{\partial w} - \dfrac{\partial M_5}{\partial\Gamma_1}\dfrac{\partial\Gamma_1}{\partial w} - \dfrac{\partial M_5}{\partial\Gamma_2}\dfrac{\partial\Gamma_2}{\partial w} \end{array} \right.$$

Or, dans le Tableau ci-dessus, les éléments des deux premières

lignes ont tous pour valeur initiale zéro : car, si l'on observe que Γ_1, Γ_2 ont respectivement les mêmes valeurs initiales que γ_1, γ_2, et si l'on considère, par exemple, le premier élément de la première ligne, il a évidemment même valeur initiale que l'expression

$$\frac{\partial\gamma_3}{\partial s} - \frac{\partial M_3}{\partial\gamma_1}\frac{\partial\gamma_1}{\partial s} - \frac{\partial M_3}{\partial\gamma_2}\frac{\partial\gamma_2}{\partial s},$$

laquelle est nulle quels que soient s, t, puisque l'expression

$$\gamma_3 - M_3(\gamma_1, \gamma_2)$$

jouit elle-même de cette propriété. Cela étant, le déterminant (14) a évidemment même valeur initiale que le produit du déterminant (15) par le déterminant formé avec les trois dernières lignes de (19); le second facteur de ce produit a donc, comme le produit lui-même, une valeur initiale différente de zéro, ce qu'il s'agissait d'établir.

IV. Il résulte de ce qui précède que l'intégration du système passif (1) se ramène à celle du système passif (4), et par suite (n° 205) à celle d'un système passif d'équations différentielles totales du premier ordre.

Intégration des systèmes orthonomes passifs de grade 1 dont le Tableau n'offre de cases vides que dans une seule colonne.

207. Pour familiariser le lecteur avec la méthode exposée, nous n'aborderons que progressivement le cas général formulé dans le titre ci-dessus, et nous commencerons par supposer que les seconds membres du système ne sont pas d'ordre supérieur à 1.

Observons à ce propos qu'un système du premier ordre, résolu par rapport à certaines dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, ne peut manquer d'être orthonome, si toutes les cases vides de son Tableau se trouvent situées dans une même colonne. Supposons, en effet, pour fixer les idées, qu'il implique les trois fonctions inconnues u, v, w des cinq variables indépendantes x, y, z, s, t, et que toutes les cases de son Tableau soient pleines, à l'exception des cases (s) et (t) de la colonne (w); pour se convaincre de la nature orthonome d'un pareil système, il suffit d'attribuer : 1° à x, y, z, s, t des cotes premières égales à 1, et à u, v, w des cotes premières nulles;

2° à x, y, z et u, v des cotes secondes égales à 1, à s, t et w des cotes secondes nulles ([1]).

Dans le cas où les seconds membres du système en question sont linéaires par rapport aux dérivées (premières) des fonctions inconnues, nous dirons, pour abréger, que le système est *linéaire*.

208. *Si, dans le Tableau d'un système passif et linéaire du premier ordre, toutes les cases vides appartiennent à une même colonne, la recherche de la solution ordinaire qui répond à des conditions initiales données se ramène à l'intégration successive de deux systèmes passifs d'équations différentielles totales du premier ordre, donl le second est indépendant du choix des conditions initiales*

I. En supposant, comme au numéro précédent, que le Tableau contienne cinq lignes et trois colonnes, avec deux cases vides dans sa dernière colonne, le système proposé est de la forme suivante :

$$
\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial u}{\partial x} = B_{ux} + B^{ws}_{ux}\dfrac{\partial w}{\partial s} + B^{wt}_{ux}\dfrac{\partial w}{\partial t}, & \dfrac{\partial v}{\partial x} = B_{vx} + B^{ws}_{vx}\dfrac{\partial w}{\partial s} + B^{wt}_{vx}\dfrac{\partial w}{\partial t}, & \dfrac{\partial w}{\partial x} = B_{wx} + B^{ws}_{wx}\dfrac{\partial w}{\partial s} + B^{wt}_{wx}\dfrac{\partial w}{\partial t}, \\
\dfrac{\partial u}{\partial y} = B_{uy} + B^{ws}_{uy}\dfrac{\partial w}{\partial s} + B^{wt}_{uy}\dfrac{\partial w}{\partial t}, & \dfrac{\partial v}{\partial y} = B_{vy} + B^{ws}_{vy}\dfrac{\partial w}{\partial s} + B^{wt}_{vy}\dfrac{\partial w}{\partial t}, & \dfrac{\partial w}{\partial y} = B_{wy} + B^{ws}_{wy}\dfrac{\partial w}{\partial s} + B^{wt}_{wy}\dfrac{\partial w}{\partial t}, \\
\dfrac{\partial u}{\partial z} = B_{uz} + B^{ws}_{uz}\dfrac{\partial w}{\partial s} + B^{wt}_{uz}\dfrac{\partial w}{\partial t}, & \dfrac{\partial v}{\partial z} = B_{vz} + B^{ws}_{vz}\dfrac{\partial w}{\partial s} + B^{wt}_{vz}\dfrac{\partial w}{\partial t}, & \dfrac{\partial w}{\partial z} = B_{wz} + B^{ws}_{wz}\dfrac{\partial w}{\partial s} + B^{wt}_{wz}\dfrac{\partial w}{\partial t}, \\
\dfrac{\partial u}{\partial s} = B_{us} + B^{ws}_{us}\dfrac{\partial w}{\partial s} + B^{wt}_{us}\dfrac{\partial w}{\partial t}, & \dfrac{\partial v}{\partial s} = B_{vs} + B^{ws}_{vs}\dfrac{\partial w}{\partial s} + B^{wt}_{vs}\dfrac{\partial w}{\partial t}, & \\
\dfrac{\partial u}{\partial t} = B_{ut} + B^{ws}_{ut}\dfrac{\partial w}{\partial s} + B^{wt}_{ut}\dfrac{\partial w}{\partial t}, & \dfrac{\partial v}{\partial t} = B_{vt} + B^{ws}_{vt}\dfrac{\partial w}{\partial s} + B^{wt}_{vt}\dfrac{\partial w}{\partial t}, &
\end{array}
$$

où les B désignent des fonctions données de x, y, z, s, t, u, v, w. L'hypothèse de la passivité y entraîne, comme nous allons voir, de grandes simplifications.

Considérons en effet les conditions de passivité correspondant aux dérivées cardinales qui intéressent les variables des lignes non entièrement pleines, c'est-à-dire ici les variables s, t. Dans les deux expressions ultimes (n° 109) de la dérivée cardinale $\dfrac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}$ que le calcul des conditions de passivité conduit à égaler entre elles, les termes du

([1]) Ce n'est là d'ailleurs qu'un cas très particulier de la proposition établie à l'alinéa I du n° 161.

second ordre sont, pour l'une,

$$B_{us}^{ws}\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial t}+B_{us}^{wt}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

et, pour l'autre,

$$B_{ut}^{ws}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+B_{ut}^{wt}\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial t};$$

on a donc, quels que soient x, y, z, s, t, u, v, w,

$$(1)\qquad B_{us}^{wt}=0,\qquad B_{ut}^{ws}=0,\qquad B_{us}^{ws}=B_{ut}^{wt}.$$

On a, de même, par le changement de u en v,

$$(2)\qquad B_{vs}^{wt}=0,\qquad B_{vt}^{ws}=0,\qquad B_{vs}^{ws}=B_{vt}^{wt}.$$

Considérons maintenant les conditions de passivité correspondant aux dérivées cardinales qui intéressent, avec l'une des variables s, t, l'une des variables x, y, z. En désignant par H_u la valeur commune des quantités B_{us}^{ws}, B_{ut}^{wt}, par H_v la valeur commune des quantités B_{vs}^{ws}, B_{vt}^{wt}, et introduisant dans le système donné les simplifications qu'indiquent les relations (1), (2), on trouve, pour les termes du second ordre contenus dans les deux expressions ultimes de la dérivée cardinale $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial s}$, les quantités

$$B_{ux}^{ws}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+B_{ux}^{wt}\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial t},\qquad H_u\left(B_{wx}^{ws}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+B_{wx}^{wt}\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial t}\right);$$

et, de même, pour les termes du second ordre contenus dans les deux expressions ultimes de la dérivée cardinale $\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial s}$, les quantités

$$B_{vx}^{ws}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+B_{vx}^{wt}\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial t},\qquad H_v\left(B_{wx}^{ws}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+B_{wx}^{wt}\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial t}\right).$$

On en déduit, à cause de la passivité supposée,

$$(3)\qquad \begin{cases} B_{ux}^{ws}=H_u B_{wx}^{ws}, & B_{ux}^{wt}=H_u B_{wx}^{wt},\\ B_{vx}^{ws}=H_v B_{wx}^{ws}, & B_{vx}^{wt}=H_v B_{wx}^{wt},\end{cases}$$

d'où, par le changement de x en y et z successivement,

$$(4)\qquad \begin{cases} B_{uy}^{ws}=H_u B_{wy}^{ws}, & B_{uy}^{wt}=H_u B_{wy}^{wt},\\ B_{vy}^{ws}=H_v B_{wy}^{ws}, & B_{vy}^{wt}=H_v B_{wy}^{wt},\end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} B_{uz}^{ws}=H_u B_{wz}^{ws}, & B_{uz}^{wt}=H_u B_{wz}^{wt},\\ B_{vz}^{ws}=H_v B_{wz}^{ws}, & B_{vz}^{wt}=H_v B_{wz}^{wt}.\end{cases}$$

En tenant compte des diverses identités (1), (2), (3), (4), (5), et

introduisant certains changements de notations, le système proposé prend la forme

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = B_{ux} + H_u\left(S_x \frac{\partial w}{\partial s} + T_x \frac{\partial w}{\partial t}\right), &&\frac{\partial v}{\partial x} = B_{vx} + H_v\left(S_x \frac{\partial w}{\partial s} + T_x \frac{\partial w}{\partial t}\right), &&\frac{\partial w}{\partial x} = W_x + S_x \frac{\partial w}{\partial s} + T \frac{\partial w}{\partial t}\\
&\frac{\partial u}{\partial y} = B_{uy} + H_u\left(S_y \frac{\partial w}{\partial s} + T_y \frac{\partial w}{\partial t}\right), &&\frac{\partial v}{\partial y} = B_{vy} + H_v\left(S_y \frac{\partial w}{\partial s} + T_y \frac{\partial w}{\partial t}\right), &&\frac{\partial w}{\partial y} = W_y + S_y \frac{\partial w}{\partial s} + T \frac{\partial w}{\partial t}\\
&\frac{\partial u}{\partial z} = B_{uz} + H_u\left(S_z \frac{\partial w}{\partial s} + T_z \frac{\partial w}{\partial t}\right), &&\frac{\partial v}{\partial z} = B_{vz} + H_v\left(S_z \frac{\partial w}{\partial s} + T_z \frac{\partial w}{\partial t}\right), &&\frac{\partial w}{\partial z} = W_z + S_z \frac{\partial w}{\partial s} + T \frac{\partial w}{\partial t}\\
&\frac{\partial u}{\partial s} = U_s + H_u \frac{\partial w}{\partial s}, &&\frac{\partial v}{\partial s} = V_s + H_v \frac{\partial w}{\partial s},\\
&\frac{\partial u}{\partial t} = U_t + H_u \frac{\partial w}{\partial t}, &&\frac{\partial v}{\partial t} = V_t + H_v \frac{\partial w}{\partial t},
\end{aligned}
\right.
$$

les coefficients (fonctions de x, y, z, s, t, u, v, w) qui figurent dans les seconds membres se trouvant, en vertu de la passivité, liés entre eux par certaines relations qu'il est inutile d'écrire.

Le problème que nous nous posons actuellement consiste à rechercher, dans un pareil système, la solution ordinaire qui répond à un groupe donné de conditions initiales, savoir :

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned} u &= u_0\\ v &= v_0 \end{aligned}\right\} &&\text{pour } x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = s - s_0 = t - t_0 = 0,\\
&w = \psi(s, t) &&\text{pour } x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

II. Dans les trois premières équations de la colonne (u) du système (6), remplaçons $H_u \frac{\partial w}{\partial s}$ et $H_u \frac{\partial w}{\partial t}$ par leurs valeurs tirées des deux dernières; puis, dans les trois premières équations de la colonne (v), remplaçons de même $H_v \frac{\partial w}{\partial s}$ et $H_v \frac{\partial w}{\partial t}$ par leurs valeurs tirées des deux dernières; en posant, pour abréger,

$$
\begin{aligned}
B_{ux} - U_s S_x - U_t T_x &= U_x, \qquad & B_{vx} - V_s S_x - V_t T_x &= V_x,\\
B_{uy} - U_s S_y - U_t T_y &= U_y, \qquad & B_{vy} - V_s S_y - V_t T_y &= V_y,\\
B_{uz} - U_s S_z - U_t T_z &= U_z, \qquad & B_{vz} - V_s S_z - V_t T_z &= V_z,
\end{aligned}
$$

les trois premières lignes du système (6) deviennent

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = U_x + S_x \frac{\partial u}{\partial s} + T_x \frac{\partial u}{\partial t}, &&\frac{\partial v}{\partial x} = V_x + S_x \frac{\partial v}{\partial s} + T_x \frac{\partial v}{\partial t}, &&\frac{\partial w}{\partial x} = W_x + S_x \frac{\partial w}{\partial s} + T_x \frac{\partial w}{\partial t},\\
&\frac{\partial u}{\partial y} = U_y + S_y \frac{\partial u}{\partial s} + T_y \frac{\partial u}{\partial t}, &&\frac{\partial v}{\partial y} = V_y + S_y \frac{\partial v}{\partial s} + T_y \frac{\partial v}{\partial t}, &&\frac{\partial w}{\partial y} = W_y + S_y \frac{\partial w}{\partial s} + T_y \frac{\partial w}{\partial t},\\
&\frac{\partial u}{\partial z} = U_z + S_z \frac{\partial u}{\partial s} + T_z \frac{\partial u}{\partial t}, &&\frac{\partial v}{\partial z} = V_z + S_z \frac{\partial v}{\partial s} + T_z \frac{\partial v}{\partial t}, &&\frac{\partial w}{\partial z} = W_z + S_z \frac{\partial w}{\partial s} + T_z \frac{\partial w}{\partial t}.
\end{aligned}
\right.
$$

Je dis que *le système* (8), *indépendant des conditions initiales imposées aux intégrales du système* (6), *est passif comme ce dernier*.

Effectivement, ce système est de la forme (1), définie au n° 206, et les relations obtenues en égalant entre elles les deux expressions ultimes de chacune des dérivées cardinales sont de la forme (3), spécifiée à l'alinéa I du même numéro. Parmi ces relations (3), qui sont toutes, au point de vue de l'intégration, des conséquences de (8), par suite de (6), les trois dernières ne contiennent aucune dérivée qui soit principale relativement au système (6) : elles doivent dès lors, puisque ce dernier est passif, être vérifiées pour toutes valeurs numériques des quantités qu'elles renferment, c'est-à-dire être identiquement vérifiées. On a donc identiquement

$$A_{xy,s} = 0, \quad A_{xy,t} = 0, \quad A_{xy,w} = 0,$$
$$A_{xz,s} = 0, \quad A_{xz,t} = 0, \quad A_{xz,w} = 0,$$
$$A_{yz,s} = 0, \quad A_{yz,t} = 0, \quad A_{yz,w} = 0,$$

et les six premières relations (3) du n° 206 se réduisent alors à

$$A_{xy,u} = 0, \quad A_{xz,u} = 0, \quad A_{yz,u} = 0, \quad A_{xy,v} = 0, \quad A_{xz,v} = 0, \quad A_{yz,v} = 0;$$

celles-ci, ne contenant que x, y, z, s, t, u, v, w, doivent, à cause de la passivité de (6), être vérifiées pour toutes valeurs numériques de ces quantités, c'est-à-dire être identiquement vérifiées comme les précédentes. En conséquence, toutes les conditions de passivité du système (8) se trouvent identiquement satisfaites, ce que nous voulions établir.

III. Cela posé, considérons, dans le système (6), le groupe des intégrales ordinaires, u, v, w, qui répondent aux conditions initiales données (7) : si l'on désigne par

$$\upsilon(s, t), \quad \varphi(s, t)$$

ce que deviennent u, v dans l'hypothèse numérique

$$(9) \qquad x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0,$$

et par

$$\Upsilon(x, y, z, s, t), \quad \Phi(x, y, z, s, t), \quad \Psi(x, y, z, s, t)$$

certaines fonctions dont chacune s'annule dans la même hypothèse, il

est clair que les intégrales dont il s'agit peuvent, par un groupement convenable des termes de leurs développements, être mises sous la forme

$$(10) \qquad u = \Upsilon + \upsilon, \qquad v = \Phi + \varphi, \qquad w = \Psi + \psi;$$

on voit d'ailleurs qu'en vertu des conditions initiales (7), les fonctions $\upsilon(s, t)$, $\varphi(s, t)$ satisfont elles-mêmes aux suivantes :

$$(11) \qquad \left.\begin{array}{l} \upsilon = u_0 \\ \varphi = v_0 \end{array}\right\} \quad \text{pour } s - s_0 = t - t_0 = 0.$$

Cela étant, si, dans les deux dernières lignes du système (6),

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \mathrm{U}_s + \mathrm{H}_u \frac{\partial w}{\partial s}, \qquad \frac{\partial v}{\partial s} = \mathrm{V}_s + \mathrm{H}_v \frac{\partial w}{\partial s},$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{U}_t + \mathrm{H}_u \frac{\partial w}{\partial t}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \mathrm{V}_t + \mathrm{H}_v \frac{\partial w}{\partial t},$$

on introduit l'hypothèse numérique (9), il résulte des formules (10) (où Υ, Φ, Ψ s'annulent dans cette hypothèse) que u, $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, v, $\frac{\partial v}{\partial s}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$ se réduisent respectivement à υ, $\frac{\partial \upsilon}{\partial s}$, $\frac{\partial \upsilon}{\partial t}$, φ, $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, et w, $\frac{\partial w}{\partial s}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ aux fonctions connues ψ, $\frac{\partial \psi}{\partial s}$, $\frac{\partial \psi}{\partial t}$. Les fonctions υ, φ vérifient donc, avec les conditions initiales (11), un système différentiel total du premier ordre, dont la passivité est d'ailleurs évidente : car, le système (6) étant passif, on peut, sans toucher aux valeurs numériques x_0, y_0, z_0 ni à la fonction $\psi(s, t)$, qui figurent dans les conditions initiales (7) en même temps que les valeurs numériques s_0, t_0, u_0, v_0, faire varier arbitrairement ces dernières, qui figurent seules dans les conditions initiales (11).

Si maintenant on suppose connues les fonctions υ, φ, on se trouve ramené, pour connaître u, v, w, à rechercher, dans le système passif (8), la solution ordinaire répondant aux conditions initiales

$$\left.\begin{array}{l} u = \upsilon(s, t) \\ v = \varphi(s, t) \\ w = \psi(s, t) \end{array}\right\} \quad \text{pour } x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0.$$

Or, l'intégration du système (8), indépendant du choix des conditions initiales imposées aux intégrales de (6), se ramène, comme

nous l'avons vu au n° 206, à celle d'un système passif d'équations différentielles totales du premier ordre.

209. *La conclusion formulée au numéro précédent est applicable à un système passif et non linéaire du premier ordre, dont le Tableau n'offre de cases vides que dans une seule colonne.*

Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait affaire au système

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = U_x, & \dfrac{\partial v}{\partial x} = V_x, & \dfrac{\partial w}{\partial x} = W_x, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = U_y, & \dfrac{\partial v}{\partial y} = V_y, & \dfrac{\partial w}{\partial y} = W_y, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = U_z, & \dfrac{\partial v}{\partial z} = V_z, & \dfrac{\partial w}{\partial z} = W_z, \\ \dfrac{\partial u}{\partial s} = U_s, & \dfrac{\partial v}{\partial s} = V_s, & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = U_t, & \dfrac{\partial v}{\partial t} = V_t, & \end{cases}$$

où u, v, w désignent trois fonctions inconnues des cinq variables indépendantes x, y, z, s, t; ces équations (12) ont pour seconds membres certaines fonctions connues de

$$x,\quad y,\quad z,\quad s,\quad t,\quad u,\quad v,\quad w,\quad \frac{\partial w}{\partial s}\quad \frac{\partial w}{\partial t},$$

et nous supposons, comme le dit l'énoncé, qu'elles forment un système passif. Le problème que nous nous posons consiste à rechercher, dans un pareil système, la solution ordinaire qui répond à un groupe donné de conditions initiales, savoir :

$$(13)\quad \begin{cases} \left.\begin{aligned} u &= u_0 \\ v &= v_0 \end{aligned}\right\} & \text{pour } x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = s - s_0 = t - t_0 = 0, \\ w = \psi(s, t) & \text{pour } x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0. \end{cases}$$

I. Posons

$$(14)\qquad \frac{\partial w}{\partial s} = w'_s, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = w'_t$$

$\left(\text{d'où } \dfrac{\partial w'_s}{\partial t} = \dfrac{\partial w'_t}{\partial s}\right)$, introduisons ce changement de notations dans les équations (12), et considérons les équations suivantes, qui, moyennant le changement de notations, sont évidemment, au point de vue

de l'intégration, des conséquences de (12) :

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{U}_x + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial w'_s}\left(\dfrac{\partial u}{\partial s} - \mathrm{U}_s\right) + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial w'_t}\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{U}_t\right), \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{V}_x + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial w'_s}\left(\dfrac{\partial v}{\partial s} - \mathrm{V}_s\right) + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial w'_t}\left(\dfrac{\partial v}{\partial t} - \mathrm{V}_t\right), \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} = \mathrm{W}_x + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial w'_s}\left(\dfrac{\partial w}{\partial s} - w'_s\right) + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial w'_t}\left(\dfrac{\partial w}{\partial t} - w'_t\right), \\ \dfrac{\partial w'_s}{\partial x} = \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial s} + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial u}\mathrm{U}_s + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial v}\mathrm{V}_s + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial w}w'_s + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial w'_s}\dfrac{\partial w'_s}{\partial s} + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial w'_t}\dfrac{\partial w'_s}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial w'_t}{\partial x} = \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial t} + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial u}\mathrm{U}_t + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial v}\mathrm{V}_t + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial w}w'_t + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial w'_s}\dfrac{\partial w'_t}{\partial s} + \dfrac{\partial \mathrm{W}_x}{\partial w'_t}\dfrac{\partial w'_t}{\partial t}. \end{cases}$$

Adjoignons ensuite aux équations (15) un groupe,

(16),

se déduisant de (15) par le changement de x en y dans les indices et dans les différentielles, puis un groupe,

(17),

se déduisant de (15) par le changement de x en z dans les notations dont il s'agit; les équations

(15), (16), (17)

constituent, dans leur ensemble, un système du premier ordre, S, impliquant les inconnues

$$u,\quad v,\quad w,\quad w'_s,\quad w'_t,$$

et indépendant des conditions initiales imposées aux intégrales de (12) : je dis que *ce système* S *est passif, comme* (12).

Effectivement, il est de la forme (1) définie au n° 206, et, par conséquent, les conditions de passivité correspondant respectivement aux diverses dérivées cardinales sont de la forme suivante :

$$(18)\quad \begin{cases} \mathrm{A}_{xy,s}\dfrac{\partial u}{\partial s} + \mathrm{A}_{xy,t}\dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{A}_{xy,u} = 0, \\ \mathrm{A}_{xz,s}\dfrac{\partial u}{\partial s} + \mathrm{A}_{xz,t}\dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{A}_{xz,u} = 0, \\ \mathrm{A}_{yz,s}\dfrac{\partial u}{\partial s} + \mathrm{A}_{yz,t}\dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{A}_{yz,u} = 0, \end{cases}$$

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &A_{xy,s}\frac{\partial v}{\partial s} + A_{xy,t}\frac{\partial v}{\partial t} + A_{xy,v} = 0,\\ &A_{xz,s}\frac{\partial v}{\partial s} + A_{xz,t}\frac{\partial v}{\partial t} + A_{xz,v} = 0,\\ &A_{yz,s}\frac{\partial v}{\partial s} + A_{yz,t}\frac{\partial v}{\partial t} + A_{yz,v} = 0,\end{aligned}\right.$$

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &A_{xy,s}\frac{\partial w}{\partial s} + A_{xy,t}\frac{\partial w}{\partial t} + A_{xy,w} = 0,\\ &A_{xz,s}\frac{\partial w}{\partial s} + A_{xz,t}\frac{\partial w}{\partial t} + A_{xz,w} = 0,\\ &A_{yz,s}\frac{\partial w}{\partial s} + A_{yz,t}\frac{\partial w}{\partial t} + A_{yz,w} = 0,\end{aligned}\right.$$

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &A_{xy,s}\frac{\partial w'_s}{\partial s} + A_{xy,t}\frac{\partial w'_s}{\partial t} + A_{xy,w'_s} = 0,\\ &A_{xz,s}\frac{\partial w'_s}{\partial s} + A_{xz,t}\frac{\partial w'_s}{\partial t} + A_{xz,w'_s} = 0,\\ &A_{yz,s}\frac{\partial w'_s}{\partial s} + A_{yz,t}\frac{\partial w'_s}{\partial t} + A_{yz,w'_s} = 0,\end{aligned}\right.$$

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &A_{xy,s}\frac{\partial w'_t}{\partial s} + A_{xy,t}\frac{\partial w'_t}{\partial t} + A_{xy,w'_t} = 0,\\ &A_{xz,s}\frac{\partial w'_t}{\partial s} + A_{xz,t}\frac{\partial w'_t}{\partial t} + A_{xz,w'_t} = 0,\\ &A_{yz,s}\frac{\partial w'_t}{\partial s} + A_{yz,t}\frac{\partial w'_t}{\partial t} + A_{yz,w'_t} = 0,\end{aligned}\right.$$

où les A désignent certaines fonctions de

$$(23)\qquad x,\ y,\ z,\ s,\ t,\ u,\ v,\ w,\ w'_s,\ w'_t.$$

Parmi les relations ci-dessus, qui sont toutes, au point de vue de l'intégration, des conséquences de S, et par suite [moyennant le changement de notations (14)] de (12), les trois dernières ne contiennent, avec les quantités (23), que $\frac{\partial w'_t}{\partial s}$ et $\frac{\partial w'_t}{\partial t}$: elles doivent donc, à cause de la passivité de (12), être vérifiées pour toutes valeurs numériques des quantités qu'elles renferment, c'est-à-dire être identiquement vérifiées. Les divers coefficients A qui figurent dans les relations (22) sont donc tous identiquement nuls, et les rela-

tions (18), (19), (20) et (21) se réduisent alors à

$$\begin{array}{lll} A_{xy,u} = 0, & A_{xz,u} = 0, & A_{yz,u} = 0, \\ A_{xy,v} = 0, & A_{xz,v} = 0, & A_{yz,v} = 0, \\ A_{xy,w} = 0, & A_{xz,w} = 0, & A_{yz,w} = 0, \\ A_{xy,w'_s} = 0, & A_{xz,w'_s} = 0, & A_{yz,w'_s} = 0; \end{array}$$

ces dernières, ne contenant que les quantités (23), doivent, à cause de la passivité de (12), être vérifiées pour toutes valeurs numériques de ces quantités, c'est-à-dire être identiquement vérifiées comme les précédentes. En conséquence, toutes les conditions de passivité du système S se trouvent identiquement satisfaites, ce que nous voulions établir.

II. Cela posé, considérons, dans le système (12), le groupe des intégrales ordinaires, u, v, w, qui répondent aux conditions initiales données (13) : si l'on désigne par $\upsilon(s, t)$, $\varphi(s, t)$ ce que deviennent u, v dans l'hypothèse numérique

$$x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0,$$

on verra, comme au numéro précédent, que les fonctions υ, φ vérifient, avec les conditions initiales

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon = u_0 \\ \varphi = v_0 \end{array}\right\} \quad \text{pour } s - s_0 = t - t_0 = 0,$$

un système passif d'équations différentielles totales du premier ordre, qui se déduit des deux dernières lignes de (12) par l'introduction de cette hypothèse numérique.

Les fonctions υ, φ étant supposées connues, on observera que les fonctions

$$u, \qquad v, \qquad w, \qquad w'_s = \frac{\partial w}{\partial s}, \qquad w'_t = \frac{\partial w}{\partial t}$$

vérifient le système passif S, et l'on se trouvera ramené à rechercher, dans ce dernier système, la solution ordinaire qui répond aux conditions initiales

$$\left.\begin{array}{l} u = \upsilon(s, t) \\ v = \varphi(s, t) \\ w = \psi(s, t) \\ w'_s = \dfrac{\partial \psi(s, t)}{\partial s} \\ w'_t = \dfrac{\partial \psi(s, t)}{\partial t} \end{array}\right\} \quad \text{pour } x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0.$$

Or l'intégration du système S, indépendant du choix des conditions initiales imposées aux intégrales de (12), se ramène, comme nous savons (nº **206**), à celle d'un système passif d'équations différentielles totales du premier ordre.

210. Les exemples suivants, quelque peu d'intérêt qu'ils offrent par eux-mêmes, aideront à mieux comprendre les méthodes que nous venons d'exposer.

I. Étant donné le système linéaire passif

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+2(u-2v-x^2)\dfrac{\partial v}{\partial y}+2\dfrac{\partial v}{\partial z}, & \dfrac{\partial v}{\partial x}=(u-2v-x^2)\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=2\dfrac{\partial v}{\partial y}, & \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=x^2+2v-u+2\dfrac{\partial v}{\partial z}, & \end{cases}$$

où se trouvent engagées deux fonctions inconnues des trois variables indépendantes x, y, z, on propose d'en rechercher la solution (u, v) satisfaisant aux conditions initiales

$$u = \mathrm{A} \quad \text{pour} \quad x = y = z = 0,$$
$$v = y - z \quad \text{pour} \quad x = 0.$$

En désignant par $\upsilon(y, z)$ ce que devient u dans l'hypothèse numérique $x = 0$, la fonction υ vérifie, avec la condition initiale

$$\upsilon = \mathrm{A} \quad \text{pour} \quad y = z = 0,$$

le système passif d'équations différentielles totales

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial y} = 2,$$
$$\frac{\partial \upsilon}{\partial z} = 2(y - z - 1) - \upsilon.$$

Ce dernier a pour intégrale générale

$$\upsilon = 2(y - z) + \mathrm{C}\, e^{-z} \quad (^1);$$

---

(1) La notation e^x désigne, suivant l'usage, la fonction olotrope définie par la somme de la série entière

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

dont le rayon de convergence est illimité; les quelques propriétés de cette fonction dont la connaissance est utile pour traiter les exemples ci-dessus ont été établies incidemment au Chapitre VII (nº 114, III).

d'ailleurs, à cause de la condition initiale à laquelle satisfait v, on doit avoir $C = A$, ce qui donne

$$v = 2(y - z) + A\,e^{-z}.$$

On se trouve ainsi ramené, par l'application de la méthode exposée ci-dessus, à intégrer le système

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= u - 2v - x^2 + 2x + (u - 2v - x^2)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= (u - 2v - x^2)\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \end{aligned}$$

avec les conditions initiales

$$(25) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= 2(y - z) + A\,e^{-z} \\ v &= y - z \end{aligned} \right\} \quad \text{pour } x = 0.$$

A cet effet, on forme l'équation aux dérivées partielles (homogène)

$$\frac{\partial f}{\partial x} - (u - 2v - x^2)\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} + (u - 2v - x^2 + 2x)\frac{\partial f}{\partial u} = 0,$$

où f désigne une fonction inconnue de x, y, z, u, v; son intégrale générale est (n° 204) une fonction arbitraire des quatre quantités

$$x + z, \quad v, \quad (u - 2v - x^2)\,e^{-x}, \quad y + u - 2v - x^2.$$

On pose alors

$$(26) \qquad \left\{ \begin{aligned} v &= \Phi(x + z, y + u - 2v - x^2), \\ (u - 2v - x^2)\,e^{-x} &= \Psi(x + z, y + u - 2v - x^2), \end{aligned} \right.$$

et l'on détermine les composantes Φ, Ψ de manière que les valeurs de u, v, tirées de (26), vérifient les conditions initiales (25). Pour cela, il faut que l'on ait, quels que soient y et z,

$$\begin{aligned} y - z &= \Phi(z, y + A\,e^{-z}), \\ A\,e^{-z} &= \Psi(z, y + A\,e^{-z}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en effectuant le changement de variables

$$z = \theta_1, \qquad y + A\,e^{-z} = \theta_2,$$

que l'on ait, quels que soient θ_1 et θ_2,

$$\begin{aligned} \theta_2 - \theta_1 - A\,e^{-\theta_1} &= \Phi(\theta_1, \theta_2), \\ A\,e^{-\theta_1} &= \Psi(\theta_1, \theta_2). \end{aligned}$$

Les composantes Φ et Ψ étant connues, les formules (26) deviennent

$$v = y + u - 2v - x^2 - (x + z) - A\,e^{-(x+z)},$$
$$(u - 2v - x^2)\,e^{-x} = A\,e^{-(x+z)},$$

et la résolution de ces dernières par rapport à u et v fournit les intégrales cherchées du système (24), savoir

$$u = x^2 + 2(y - x - z) + A\,e^{-z}(3 - 2\,e^{-x}),$$
$$v = y - x - z + A\,e^{-z}(1 - e^{-x}).$$

II. Considérons le système passif non linéaire

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2(u - 2v - x^2)\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\dfrac{\partial v}{\partial z}, \quad \dfrac{\partial v}{\partial x} = (u - 2v - x^2)\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = x^2 + 2v - u + 2\dfrac{\partial v}{\partial z}, \end{cases}$$

où se trouvent engagées deux fonctions inconnues des trois variables indépendantes x, y, z, et proposons-nous d'en rechercher la solution (u, v) satisfaisant aux conditions initiales

$$u = A \qquad \text{pour} \qquad x = y = z = 0,$$
$$v = y + z^2 \qquad \text{pour} \qquad x = 0.$$

En désignant par $\upsilon(y, z)$ ce que devient u dans l'hypothèse numérique $x = 0$, la fonction υ vérifie, avec la condition initiale

$$\upsilon = A \qquad \text{pour} \qquad y = z = 0,$$

le système passif d'équations différentielles totales

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial y} = 2,$$
$$\frac{\partial \upsilon}{\partial z} = 2(y + 2z + z^2) - \upsilon.$$

Ce dernier a pour intégrale générale

$$\upsilon = 2(y + z^2) + C\,e^{-z};$$

d'ailleurs, à cause de la condition initiale imposée à υ, on doit avoir $C = A$, ce qui donne

$$\upsilon = 2(y + z^2) + A\,e^{-z}.$$

On se trouve ainsi ramené, par l'application de notre méthode, à intégrer le système

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + (u - 2v - x^2)(1 - 2v_y'^2) + 2v_y'(u - 2v - x^2)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (x^2 + 2v - u)v_y'^2 + 2v_y'(u - 2v - x^2)\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\frac{\partial v_y'}{\partial x} = 2v_y'(u - 2v - x^2)\frac{\partial v_y'}{\partial y} + \frac{\partial v_y'}{\partial z},$$

$$\frac{\partial v_z'}{\partial x} = (x^2 + 2v - u)v_y'^2 + 2v_y'(u - 2v - x^2)\frac{\partial v_z'}{\partial y} + \frac{\partial v_z'}{\partial z},$$

aux quatre inconnues u, v, v_y', v_z', avec les conditions initiales

$$(28) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= 2(y + z^2) + A e^{-z} \\ v &= y + z^2 \\ v_y' &= 1 \\ v_z' &= 2z \end{aligned} \right\} \quad \text{pour } x = 0.$$

A cet effet, on forme l'équation aux dérivées partielles (homogène)

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 2v_y'(u - 2v - x^2)\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} + [2x + (u - 2v - x^2)(1 - 2v_y'^2)]\frac{\partial f}{\partial u}$$
$$- v_y'^2(u - 2v - x^2)\frac{\partial f}{\partial v} - v_y'^2(u - 2v - x^2)\frac{\partial f}{\partial v_z'} = 0,$$

où f désigne une fonction inconnue de x, y, z, u, v, v_y', v_z'; son intégrale générale est une fonction arbitraire des six quantités

$$v_y', \quad x + z, \quad v_z' - v, \quad y v_y' - 2v_z', \quad (u - 2v - x^2)e^{-x}, \quad v + v_y'^2(u - 2v - x^2).$$

On pose alors

$$(29) \qquad \left\{ \begin{aligned} (u - 2v - x^2)e^{-x} &= \Upsilon(x + z, v_z' - v), \\ v_y' &= \Phi(x + z, v_z' - v), \\ v + v_y'^2(u - 2v - x^2) &= \Psi(x + z, v_z' - v), \\ y v_y' - 2v_z' &= \Omega(x + z, v_z' - v), \end{aligned} \right.$$

et l'on détermine les composantes Υ, Φ, Ψ, Ω de manière que les relations (29) soient identiquement vérifiées quand on tient compte des conditions initiales (28). Il vient ainsi

$$\begin{aligned} A e^{-z} &= \Upsilon(z, 2z - y - z^2), \\ 1 &= \Phi(z, 2z - y - z^2), \\ A e^{-z} + y + z^2 &= \Psi(z, 2z - y - z^2), \\ y - 4z &= \Omega(z, 2z - y - z^2), \end{aligned}$$

relations qui, par le changement de variables

$$z = \theta_1, \qquad 2z - y - z^2 = \theta_2,$$

prennent la forme

$$\begin{aligned} A\, e^{-\theta_1} &= \Upsilon(\theta_1, \theta_2), \\ 1 &= \Phi(\theta_1, \theta_2), \\ A\, e^{-\theta_1} + 2\theta_1 - \theta_2 &= \Psi(\theta_1, \theta_2), \\ -\theta_1^2 - 2\theta_1 - \theta_2 &= \Omega(\theta_1, \theta_2). \end{aligned}$$

Les composantes Υ, Φ, Ψ, Ω étant connues, les relations (29) deviennent

$$\begin{aligned} (u - 2v - x^2)\, e^{-x} &= A\, e^{-(x+z)}, \\ v'_y &= 1, \\ v + v'^2_y(u - 2v - x^2) &= A\, e^{-(x+z)} + 2(x+z) + v - v'_z, \\ y v'_y - 2 v'_z &= v - v'_z - 2(x+z) - (x+z)^2, \end{aligned}$$

et l'on en tire

$$\begin{aligned} v &= y + (x+z)^2 + A\, e^{-z} - A\, e^{-(x+z)}, \\ u &= 2v + x^2 + A\, e^{-z}, \end{aligned}$$

solution cherchée du système (27).

III. La méthode d'intégration exposée au n° 209 est évidemment applicable à tout système passif du premier ordre où ne se trouve engagée qu'une seule fonction inconnue, puisque le Tableau d'un pareil système ne comprend qu'une seule colonne.

Considérons, par exemple, l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u + \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2, \tag{30}$$

où u désigne une fonction inconnue des trois variables indépendantes x, y, z, et proposons-nous d'en rechercher l'intégrale particulière qui, pour $x = 0$, se réduit à $e^y + yz$. On se trouve ramené, par l'application de notre méthode, à intégrer le système

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= u - u'^2_z + \frac{\partial u}{\partial y} + 2u'_z \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{\partial u'_y}{\partial x} &= u'_y \qquad + \frac{\partial u'_y}{\partial y} + 2u'_z \frac{\partial u'_y}{\partial z}, \\ \frac{\partial u'_z}{\partial x} &= u'_z \qquad + \frac{\partial u'_z}{\partial y} + 2u'_z \frac{\partial u'_z}{\partial z}, \end{aligned}$$

aux trois inconnues u, u'_y, u'_z, avec les conditions initiales

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= e^y + yz \\ u'_y &= e^y + z \\ u'_z &= y \end{aligned}\right\} \quad \text{pour } x = 0.$$

On forme, à cet effet, l'équation aux dérivées partielles (homogène)

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} - 2u'_z \frac{\partial f}{\partial z} + (u - u'^2_z)\frac{\partial f}{\partial u} + u'_y \frac{\partial f}{\partial u'_y} + u'_z \frac{\partial f}{\partial u'_z} = 0,$$

où f désigne une fonction inconnue de x, y, z, u, u'_y, u'_z ; son intégrale générale est une fonction arbitraire des cinq quantités

$$x + y, \quad z + 2u'_z, \quad u'_y e^{-x}, \quad u'_z e^{-x}, \quad (u + u'^2_z) e^{-x}.$$

On pose alors

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} (u + u'^2_z) e^{-x} &= \Phi(x + y, z + 2u'_z), \\ u'_y e^{-x} &= \Psi(x + y, z + 2u'_z), \\ u'_z e^{-x} &= \Omega(x + y, z + 2u'_z), \end{aligned}\right.$$

et l'on détermine les composantes Φ, Ψ, Ω de manière que les relations (32) soient identiquement vérifiées quand on tient compte des conditions initiales (31). Il vient ainsi

$$\begin{aligned} e^y + yz + y^2 &= \Phi(y, z + 2y), \\ e^y + z &= \Psi(y, z + 2y), \\ y &= \Omega(y, z + 2y), \end{aligned}$$

relations qui, par le changement de variables

$$y = \theta_1, \qquad z + 2y = \theta_2,$$

prennent la forme

$$\begin{aligned} e^{\theta_1} - \theta_1^2 + \theta_1\theta_2 &= \Phi(\theta_1, \theta_2), \\ e^{\theta_1} - 2\theta_1 + \theta_2 &= \Psi(\theta_1, \theta_2), \\ \theta_1 &= \Omega(\theta_1, \theta_2). \end{aligned}$$

Les composantes Φ, Ψ, Ω étant connues, les relations (32) deviennent

$$\begin{aligned} u + u'^2_z &= e^x[e^{x+y} - (x + y)^2 + (x + y)(z + 2u'_z)], \\ u'_y &= e^x[e^{x+y} - 2(x + y) + z + 2u'_z], \\ u'_z &= e^x(x + y), \end{aligned}$$

et l'on en tire

$$u = z(x+y)e^x + e^{2x+y} + e^x(e^x - 1)(x+y)^2,$$

intégrale cherchée de l'équation (30) [1].

---

[1] Il n'est pas sans intérêt d'examiner ici le cas de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre non résolue. En supposant, pour fixer les idées, qu'il y ait trois variables indépendantes, x, y, z, et désignant par u la fonction inconnue qui s'y trouve engagée, cette équation sera de la forme

$$F\left(x, y, z, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0,$$

et nous la supposerons théoriquement résoluble (conformément au principe général des fonctions implicites) par rapport à quelqu'une des trois dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, par exemple $\frac{\partial u}{\partial x}$: cela étant, proposons-nous d'en déterminer l'intégrale (ordinaire) qui satisfait à la condition initiale

$$u = \upsilon(y, z) \quad \text{pour} \quad x = x_0.$$

Nous poserons

$$(1') \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = q, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = r,$$

moyennant quoi l'équation proposée devient

$$F(x, y, z, u, p, q, r) = 0;$$

nous poserons, en outre,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = Z, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = U, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = Q, \quad \frac{\partial F}{\partial r} = R.$$

L'intégrale cherchée u et ses trois dérivées premières p, q, r vérifient les équations

$$(2') \qquad \begin{cases} X + pU + P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial x} + R\frac{\partial r}{\partial x} = 0, \\ Y + qU + P\frac{\partial p}{\partial y} + Q\frac{\partial q}{\partial y} + R\frac{\partial r}{\partial y} = 0, \\ Z + rU + P\frac{\partial p}{\partial z} + Q\frac{\partial q}{\partial z} + R\frac{\partial r}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

qui se déduisent de la proposée en la différentiant successivement par rapport à x, y, z. Les relations (1') entraînent d'ailleurs comme conséquences nécessaires

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial x}, \qquad \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial y},$$

211. *La conclusion formulée au n° 208 est applicable à un système orthonome passif, de grade* 1 *et d'ordre supérieur à* 1, *dont le Tableau n'offre de cases vides que dans une seule colonne.*

Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait affaire au système orthonome et passif, de grade 1,

$$(33)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = U_x, & \dfrac{\partial v}{\partial x} = V_x, & \dfrac{\partial w}{\partial x} = W_x, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = U_y, & \dfrac{\partial v}{\partial y} = V_y, & \dfrac{\partial w}{\partial y} = W_y, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = U_z, & \dfrac{\partial v}{\partial z} = V_z, \\ \dfrac{\partial u}{\partial s} = U_s, & \dfrac{\partial v}{\partial s} = V_s, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = U_t, & \dfrac{\partial v}{\partial t} = V_t, \end{cases}$$

---

et les relations (2′) peuvent alors se mettre sous la forme

$$(3')\quad \begin{cases} P\dfrac{\partial p}{\partial x} + Q\dfrac{\partial p}{\partial y} + R\dfrac{\partial p}{\partial z} = -(X + pU), \\ P\dfrac{\partial q}{\partial x} + Q\dfrac{\partial q}{\partial y} + R\dfrac{\partial q}{\partial z} = -(Y + qU), \\ P\dfrac{\partial r}{\partial x} + Q\dfrac{\partial r}{\partial y} + R\dfrac{\partial r}{\partial z} = -(Z + rU); \end{cases}$$

on a enfin, en vertu de (1′),

$$(4')\quad P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z} = Pp + Qq + Rr.$$

L'intégrale cherchée et ses trois dérivées premières vérifient donc le système [(3′), (4′)], et satisfont, en outre, aux conditions initiales

$$(5')\quad \left.\begin{cases} u = \upsilon(y, z) \\ q = \dfrac{\partial\upsilon(y, z)}{\partial y} \\ r = \dfrac{\partial\upsilon(y, z)}{\partial z} \\ p = \varpi(y, z) \end{cases}\right\} \text{ pour } x = x_0,$$

où $\varpi(y, z)$ désigne la fonction implicite définie par l'équation

$$F\left[x_0, y, z, \upsilon(y, z), \varpi(y, z), \frac{\partial\upsilon(y, z)}{\partial y}, \frac{\partial\upsilon(y, z)}{\partial z}\right] = 0$$

(cette équation est nécessairement résoluble par rapport à ϖ, comme la proposée

où u, v, w désignent trois fonctions inconnues des cinq variables x, y, z, s, t, et soit N l'ordre maximum (plus grand que 1) des dérivées figurant dans les seconds membres : ces derniers sont alors fonctions des diverses quantités

$$x, \quad y, \quad z, \quad s, \quad t, \quad u, \quad v, \quad w \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} w}{\partial z^\alpha \, \partial s^\beta \, \partial t^\gamma}$$
$$(\alpha+\beta+\gamma = 1, 2, \ldots, \mathrm{N}).$$

Le problème que nous nous posons consiste à rechercher, dans un pareil système, la solution ordinaire répondant à un groupe donné de conditions initiales, savoir :

$$(34) \quad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} u = u_0 \\ v = v_0 \end{array}\right\} & \text{pour } x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = s - s_0 = t - t_0 = 0, \\ w = \psi(z, s, t) & \text{pour } x - x_0 = y - y_0 = 0. \end{cases}$$

I. Considérant, à l'exclusion de toutes autres, les solutions, *en nombres entiers positifs ou nuls,* de l'équation indéterminée

$$(35) \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_p = \mathrm{N},$$

où x_1, x_2, ..., x_p désignent des inconnues en nombre quelconque

---

l'est, en vertu de l'hypothèse, par rapport à p : car, à cause de la relation

$$\left[\frac{\partial \mathrm{F}(x, y, z, u, p, q, r)}{\partial p}\right]_{x=x_0} = \frac{\partial \mathrm{F}(x_0, y, z, u, p, q, r)}{\partial p},$$

dont on aperçoit immédiatement l'exactitude en développant $\mathrm{F}(x, y, z, u, p, q, r)$ suivant les puissances de $x - x_0$, les deux dérivées partielles

$$\frac{\partial \mathrm{F}(x, y, z, u, p, q, r)}{\partial p}, \qquad \frac{\partial \mathrm{F}\left(x_0, y, z, \upsilon, \varpi, \dfrac{\partial \upsilon}{\partial y}, \dfrac{\partial \upsilon}{\partial z}\right)}{\partial \varpi}$$

ont manifestement même valeur initiale).

En appliquant au système [(3′), (4′)], complété par les conditions initiales (5′), la méthode exposée au n° 206, on est ramené à intégrer l'équation aux dérivées partielles linéaire et homogène

$$\mathrm{P}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{Q}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathrm{R}\frac{\partial f}{\partial z} + (\mathrm{P}p + \mathrm{Q}q + \mathrm{R}r)\frac{\partial f}{\partial u} - (\mathrm{X} + p\mathrm{U})\frac{\partial f}{\partial p}$$
$$- (\mathrm{Y} + q\mathrm{U})\frac{\partial f}{\partial q} - (\mathrm{Z} + r\mathrm{U})\frac{\partial f}{\partial r} = 0$$

$\left(\text{résoluble par rapport à } \dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$, où f désigne une fonction inconnue de x, y, z, u, p, q, r.

(au moins égal à 2), et N un entier positif donné, nous dirons que deux semblables solutions,

$$x'_1,\quad x'_2,\quad \ldots,\quad x'_p,$$
$$x''_1,\quad x''_2,\quad \ldots,\quad x''_p,$$

sont *voisines,* si les différences

$$x'_1 - x''_1,\quad x'_2 - x''_2,\quad \ldots,\quad x'_p - x''_p$$

sont toutes nulles, à l'exception de deux, dont une égale à 1, et l'autre à -1.

Cela posé, *on peut, avec les diverses solutions* (*en nombres entiers positifs ou nuls*) *de l'équation* (35), *former une suite ayant pour termes extrêmes*

$$(\mathrm{N}, 0, \ldots, 0),\quad (0, 0, \ldots, \mathrm{N}),$$

et telle que deux termes consécutifs quelconques soient des solutions voisines.

La proposition est évidente pour $p = 2$, car les solutions de l'équation (35) peuvent alors être rangées comme il suit :

$$(\mathrm{N}, 0);\quad (\mathrm{N}-1, 1);\quad (\mathrm{N}-2, 2);\quad \ldots;\quad (1, \mathrm{N}-1);\quad (0, \mathrm{N}).$$

Il suffit donc de faire voir qu'en la supposant vraie pour $p - 1$ inconnues ($p > 2$), elle l'est nécessairement encore pour p inconnues.

Or, les diverses solutions de l'équation (35) peuvent évidemment se partager en $\mathrm{N}+1$ groupes, suivant qu'elles vérifient l'un ou l'autre des systèmes

$$\begin{array}{ll}
x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1} = \mathrm{N}, & x_p = 0; \\
x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1} = \mathrm{N}-1, & x_p = 1; \\
x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1} = \mathrm{N}-2, & x_p = 2; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots; \\
x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1} = 1, & x_p = \mathrm{N}-1; \\
x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1} = 0, & x_p = \mathrm{N}.
\end{array}$$

D'un autre côté, la proposition étant supposée vraie pour $p - 1$ inconnues, on peut, avec les solutions de ces $\mathrm{N}+1$ groupes, former

les $N+1$ suites

$$\begin{array}{llll}
(N, 0, \ldots, 0, 0), & \ldots, & (0, 0, \ldots, N, 0); \\
(0, 0, \ldots, N-1, 1), & \ldots, & (N-1, 0, \ldots, 0, 1); \\
(N-2, 0, \ldots, 0, 2), & \ldots, & (0, 0, \ldots, N-2, 2); \\
(0, 0, \ldots, N-3, 3), & \ldots, & (N-3, 0, \ldots, 0, 3); \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots; \\
& (0, 0, \ldots, 0, N), &
\end{array}$$

dans chacune desquelles deux termes consécutifs quelconques sont des solutions voisines de l'équation (35). Cela étant, il nous suffit, pour achever la démonstration, d'observer que la première suite commence par $(N, 0, \ldots, 0, 0)$, que la dernière comprend le terme unique $(0, 0, \ldots, 0, N)$, et enfin que, dans deux suites consécutives quelconques, le terme final de la première et le terme initial de la seconde sont deux solutions voisines.

II. L'inconnue w étant, dans le système proposé (33), la seule qui admette quelque dérivée paramétrique, il résulte immédiatement de l'orthonomie du système que, si l'on considère la relation ultime ayant pour premier membre

$$(36) \qquad \frac{\partial^{N+1} w}{\partial x\, \partial z^{\alpha}\, \partial s^{\beta}\, \partial t^{\gamma}} \qquad (\alpha+\beta+\gamma=N),$$

son second membre est d'ordre au plus égal à $N+1$. Cela posé, je dis que *l'ensemble des termes d'ordre* $N+1$ *dans le second membre dont il s'agit est de la forme*

$$(37) \qquad H\frac{\partial^{N+1} w}{\partial z^{\alpha+1}\, \partial s^{\beta}\, \partial t^{\gamma}} + K\frac{\partial^{N+1} w}{\partial z^{\alpha}\, \partial s^{\beta+1}\, \partial t^{\gamma}} + L\frac{\partial^{N+1} w}{\partial z^{\alpha}\, \partial s^{\beta}\, \partial t^{\gamma+1}},$$

où les fonctions H, K, L *satisfont aux conditions suivantes : 1° elles ne contiennent, avec* x, y, z, s, t, u, v, w, *que des dérivées paramétriques de* w *d'ordre inférieur à* $N+1$; *2° elles sont indépendantes des valeurs attribuées à* α, β, γ (*sous la condition* $\alpha+\beta+\gamma=N$).

1° J'établirai, en premier lieu, que l'expression ultime de la dérivée (36) est linéaire par rapport aux dérivées paramétriques d'ordre $N+1$, et qu'elle n'en contient pas *effectivement* plus de trois, celles qui se trouvent mises en évidence dans l'expression (37).

Exécutons en effet, comme il suit, sur l'équation $\frac{\partial w}{\partial x} = W_x$, α dérivations premières relatives à z, β relatives à s, γ relatives à t ; la première dérivation n'introduit dans le second membre, en fait de dérivées principales, que des dérivées premières de u et v, qu'on remplacera par leurs expressions ultimes, et, en vertu de l'orthonomie du système, le second membre de la relation résultante sera d'ordre au plus égal à 2 ; en effectuant sur celle-ci une nouvelle dérivation première, et remplaçant par leurs expressions ultimes les dérivées premières de u et v que cette opération y introduit, le second membre de la relation ainsi obtenue sera d'ordre au plus égal à 3. Ainsi de suite. Quand on aura effectué $N - 1$ dérivations premières, en ayant soin de remplacer après chacune d'elles les dérivées premières de u et v par leurs expressions ultimes, on tombera sur une formule dont le premier membre sera d'ordre N, et dont le second, indépendant de toute dérivée principale, sera d'ordre au plus égal à N. En exécutant alors, sur la formule dont il s'agit, la $N^{\text{ième}}$ dérivation première, la relation résultante aura pour premier membre la dérivée (36); quant à son second membre, il ne pourra contenir, en fait de dérivées d'ordre $N + 1$, que des dérivées paramétriques ; il sera, de plus, linéaire par rapport à elles, et, en remplaçant finalement les dérivées premières de u et v par leurs expressions ultimes, qui sont au plus d'ordre N, cette double propriété subsistera. En résumé donc, la suite des opérations que nous venons d'indiquer conduit, pour la dérivée (36), à une expression indépendante de toute dérivée principale, et linéaire par rapport aux dérivées paramétriques d'ordre $N + 1$ de w. D'ailleurs, cette expression n'est autre que l'expression ultime de la dérivée (36) : car, le système proposé admettant un groupe (unique) d'intégrales ordinaires pour des données initiales arbitrairement choisies, il est clair que les deux expressions dont il s'agit doivent être égales pour toutes valeurs numériques des quantités qu'elles renferment, c'est-à-dire être identiquement égales.

Ainsi, l'expression ultime de la dérivée (36) est linéaire par rapport aux dérivées paramétriques d'ordre $N + 1$: elle n'en peut d'ailleurs, comme nous allons le voir, contenir aucune dont l'ordre partiel relatif à z tombe au-dessous de α.

Si α est nul, ce point est évident.

Supposons $\alpha > 0$, et considérons, d'une part, l'expression ultime

de (36), d'autre part, l'expression ultime de

$$(38) \qquad \frac{\partial^{N+1} w}{\partial x\, \partial s^{\alpha+\beta}\, \partial t^{\gamma}}.$$

Si sur l'expression ultime de (38) on effectue α dérivations premières relatives à z, en ayant soin de remplacer après chacune d'elles les dérivées premières de u et v par leurs expressions ultimes (d'ordre $\leqq N$), on tombe sur l'expression ultime de

$$(39) \qquad \frac{\partial^{N+1+\alpha} w}{\partial x\, \partial z^{\alpha}\, \partial s^{\alpha+\beta}\, \partial t^{\gamma}}.$$

Si sur l'expression ultime de (36) on effectue α dérivations premières relatives à s, en effectuant après chacune d'elles les substitutions dont nous avons parlé, on tombe encore sur l'expression ultime de (39). Les deux expressions ainsi déduites, l'une de (38), l'autre de (36), sont donc identiquement égales entre elles. D'un autre côté, il est bien facile de se rendre compte que chacune d'elles est linéaire par rapport aux dérivées paramétriques de w d'ordre $N+1+\alpha$; que pour obtenir, dans l'expression déduite de (38), la portion linéaire et homogène d'ordre $N+1+\alpha$, il faut considérer, dans (38), la portion linéaire et homogène d'ordre $N+1$, et effectuer sur chacune des dérivées d'ordre $N+1$ qui y figurent la dérivation $\frac{\partial^{\alpha}}{\partial z^{\alpha}}$, en assimilant les coefficients de ces dérivées à des constantes; que pour obtenir de même, dans l'expression déduite de (36), la portion linéaire et homogène d'ordre $N+1+\alpha$, il faut considérer, dans (36), la portion linéaire et homogène d'ordre $N+1$, et effectuer sur chacune des dérivées d'ordre $N+1$ qui y figurent la dérivation $\frac{\partial^{\alpha}}{\partial s^{\alpha}}$, en assimilant les coefficients de ces dérivées à des constantes. D'après cela, il est clair que, dans l'expression déduite de (38), aucune dérivée de w d'ordre $N+1+\alpha$ ne possédera, relativement à z, un ordre partiel inférieur à α : il en sera donc de même dans l'expression identique déduite de (36). D'ailleurs, pour avoir les dérivées d'ordre $N+1+\alpha$ figurant dans cette dernière expression, il suffit, comme nous l'avons dit, de considérer les dérivées d'ordre $N+1$ figurant dans l'expression ultime de (36), et d'effectuer sur elles la dérivation $\frac{\partial^{\alpha}}{\partial s^{\alpha}}$, c'est-à-dire une dérivation n'intéressant pas la variable z : on en conclut immédiatement

que chacune des dérivées d'ordre $N+1$ figurant dans l'expression ultime de (36) possède, relativement à z, un ordre partiel au moins égal à α.

Ainsi, l'expression ultime de (36) est linéaire par rapport aux dérivées paramétriques d'ordre $N+1$ de w qu'elle contient *effectivement,* et, pour l'une quelconque de ces dernières, les ordres partiels relatifs à z, s, t ne peuvent tomber au-dessous de α, β, γ respectivement : comme on a d'ailleurs $\alpha+\beta+\gamma=N$, ces ordres partiels sont nécessairement égaux,

$$\begin{array}{llll} \text{soit à} & \alpha+1, & \beta, & \gamma, \\ \text{soit à} & \alpha, & \beta+1, & \gamma, \\ \text{soit à} & \alpha, & \beta, & \gamma+1, \end{array}$$

c'est-à-dire que, dans l'expression ultime de (36), la portion linéaire et homogène d'ordre $N+1$ est bien de la forme (37), où H, K, L ne contiennent, avec x, y, z, s, t, u, v, w, que les dérivées paramétriques d'ordre inférieur à $N+1$.

2° Reste à faire voir que les fonctions H, K, L sont indépendantes des valeurs attribuées à α, β, γ sous la condition $\alpha+\beta+\gamma=N$ [1].

Considérons à cet effet les deux dérivées

$$(40)\qquad \frac{\partial^{N+1} w}{\partial x\, \partial z^{\alpha'}\, \partial s^{\beta'}\, \partial t^{\gamma'}}, \qquad \frac{\partial^{N+1} w}{\partial x\, \partial z^{\alpha''}\, \partial s^{\beta''}\, \partial t^{\gamma''}},$$

où $\alpha'+\beta'+\gamma'=\alpha''+\beta''+\gamma''=N$. En vertu de l'alinéa I, ces deux dérivées peuvent être reliées l'une à l'autre par une chaîne de dérivées telle que deux anneaux consécutifs de la chaîne correspondent à deux solutions voisines de l'équation $\alpha+\beta+\gamma=N$. Il suffit donc, pour établir que les fonctions H, K, L sont respectivement les mêmes dans les expressions ultimes des deux dérivées (40), d'examiner le cas où ces deux dérivés correspondent à deux solutions voisines de l'équation dont il s'agit.

Pour fixer les idées, nous supposerons

$$\alpha''=\alpha'-1, \qquad \beta''=\beta'+1, \qquad \gamma''=\gamma',$$

---

[1] Lorsque la fonction arbitraire unique qui figure dans l'ensemble des déterminations initiales des inconnues ne dépend que d'une seule variable, l'équation $\alpha=N$ n'a qu'une seule solution, et la deuxième partie de la démonstration devient inutile.

et nous considérerons les deux dérivées

$$(41)\qquad \frac{\partial^{N+1} w}{\partial x\, \partial z^{\alpha'}\, \partial s^{\beta'}\, \partial t^{\gamma'}},\qquad \frac{\partial^{N+1} w}{\partial x\, \partial z^{\alpha'-1}\, \partial s^{\beta'+1}\, \partial t^{\gamma'}}.$$

Dans les expressions ultimes de ces dérivées, les portions linéaires et homogènes d'ordre $N+1$ ont respectivement les formes

$$H' \frac{\partial^{N+1} w}{\partial z^{\alpha'+1}\, \partial s^{\beta'}\, \partial t^{\gamma'}} + K' \frac{\partial^{N+1} w}{\partial z^{\alpha'}\, \partial s^{\beta'+1}\, \partial t^{\gamma'}} + L' \frac{\partial^{N+1} w}{\partial z^{\alpha'}\, \partial s^{\beta'}\, \partial t^{\gamma'+1}},$$

$$H'' \frac{\partial^{N+1} w}{\partial z^{\alpha'}\, \partial s^{\beta'+1}\, \partial t^{\gamma'}} + K'' \frac{\partial^{N+1} w}{\partial z^{\alpha'-1}\, \partial s^{\beta'+2}\, \partial t^{\gamma'}} + L'' \frac{\partial^{N+1} w}{\partial z^{\alpha'-1}\, \partial s^{\beta'+1}\, \partial t^{\gamma'+1}};$$

Il en résulte que, dans l'expression ultime de la dérivée

$$\frac{\partial^{N+2} w}{\partial x\, \partial z^{\alpha'}\, \partial s^{\beta'+1}\, \partial t^{\gamma'}},$$

résultante d'ordre minimum des deux dérivées (41), la portion linéaire et homogène d'ordre $N+2$ est, d'une part,

$$H' \frac{\partial^{N+2} w}{\partial z^{\alpha'+1}\, \partial s^{\beta'+1}\, \partial t^{\gamma'}} + K' \frac{\partial^{N+2} w}{\partial z^{\alpha'}\, \partial s^{\beta'+2}\, \partial t^{\gamma'}} + L' \frac{\partial^{N+2} w}{\partial z^{\alpha'}\, \partial s^{\beta'+1}\, \partial t^{\gamma'+1}},$$

et, d'autre part,

$$H'' \frac{\partial^{N+2} w}{\partial z^{\alpha'+1}\, \partial s^{\beta'+1}\, \partial t^{\gamma'}} + K'' \frac{\partial^{N+2} w}{\partial z^{\alpha'}\, \partial s^{\beta'+2}\, \partial t^{\gamma'}} + L'' \frac{\partial^{N+2} w}{\partial z^{\alpha'}\, \partial s^{\beta'+1}\, \partial t^{\gamma'+1}}.$$

On a donc identiquement

$$H'' = H',\qquad K'' = K',\qquad L'' = L'.$$

III. Considérons actuellement, dans le système (33), les relations ultimes ayant pour premiers membres respectifs

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial w}{\partial x}$$

et

$$(42)\qquad \frac{\partial^{1+\alpha+\beta+\gamma} w}{\partial x\, \partial z^{\alpha}\, \partial s^{\beta}\, \partial t^{\gamma}}\qquad (\alpha+\beta+\gamma = 1, 2, \ldots, N);$$

les deux premières sont, en vertu de nos hypothèses, d'ordre au plus égal à N ; la troisième, en vertu de l'orthonomie de (33), d'ordre 1 ; la quatrième, pour la même raison, d'ordre $1+\alpha+\beta+\gamma$. Pour les

trois dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$, les expressions ultimes sont respectivement U_x, V_x, W_x; pour la dérivée (42), on peut avoir,

$$\text{ou bien}\quad \alpha+\beta+\gamma = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1,$$
$$\text{ou bien}\quad \alpha+\beta+\gamma = N:$$

dans le premier cas, je désignerai par $W_{x,\alpha,\beta,\gamma}$ l'expression ultime de la dérivée dont il s'agit, et, dans le second cas, par $P_{x,\alpha,\beta,\gamma}$ ce qui reste de cette expression ultime quand on y fait abstraction de la partie linéaire et homogène d'ordre $N+1$; je poserai enfin

$$(43)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} w}{\partial z^\alpha\,\partial s^\beta\,\partial t^\gamma} = w^{\alpha,\beta,\gamma} \\ (\alpha+\beta+\gamma = 1,\ 2,\ \ldots,\ N); \end{cases}$$

et j'attribuerai aux notations H, K, L le même sens qu'à l'alinéa précédent.

Cela étant, je considère les équations

$$(44)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = U_x + H\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - U_z\right) + K\left(\dfrac{\partial u}{\partial s} - U_s\right) + L\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} - U_t\right), \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = V_x + H\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} - V_z\right) + K\left(\dfrac{\partial v}{\partial s} - V_s\right) + L\left(\dfrac{\partial v}{\partial t} - V_t\right), \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} = W_x + H\left(\dfrac{\partial w}{\partial z} - w^{1,0,0}\right) + K\left(\dfrac{\partial w}{\partial s} - w^{0,1,0}\right) + L\left(\dfrac{\partial w}{\partial t} - w^{0,0,1}\right); \\ \left\{\begin{aligned} \dfrac{\partial w^{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial x} = W_{x,\alpha,\beta,\gamma} &+ H\left(\dfrac{\partial w^{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial z} - w^{\alpha+1,\beta,\gamma}\right) \\ &+ K\left(\dfrac{\partial w^{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial s} - w^{\alpha,\beta+1,\gamma}\right) + L\left(\dfrac{\partial w^{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial t} - w^{\alpha,\beta,\gamma+1}\right) \\ &(\alpha+\beta+\gamma = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1); \end{aligned}\right. \\ \left\{\begin{aligned} \dfrac{\partial w^{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial x} = P_{x,\alpha,\beta,\gamma} + H\dfrac{\partial w^{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial z} + K\dfrac{\partial w^{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial s} + L\dfrac{\partial w^{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial t} \\ (\alpha+\beta+\gamma = N). \end{aligned}\right. \end{cases}$$

[Il va sans dire que, dans les coefficients des dérivées premières mises ci-dessus en évidence, et dans les termes indépendants de ces dérivées, on a introduit les changements de notations indiqués par la formule (43); les équations (44) sont alors toutes linéaires et du premier ordre.] Je formerai ensuite, de la même manière, un groupe d'équations,

(45),

se déduisant de (44) par le changement de x en y dans les indices et dans les différentielles, et par la substitution aux coefficients H, K, L de trois coefficients de même forme. Les équations

$$(44),\quad (45)$$

constituent, dans leur ensemble, un système du premier ordre, S, impliquant les inconnues

$$u,\quad v,\quad w,\quad w^{\alpha,\beta,\gamma}\qquad (\alpha+\beta+\gamma=1,\,2,\,\ldots,\,N),$$

et indépendant des conditions initiales imposées aux intégrales de (33): je dis que *ce système* S *est passif, comme* (33).

Effectivement, le système en question est de la forme (1), définie au n° 206, et par conséquent les relations obtenues en égalant entre elles les deux expressions ultimes de chacune des dérivées cardinales sont de la forme suivante :

$$(46)\qquad A_{xy,z}\frac{\partial u}{\partial z}+A_{xy,s}\frac{\partial u}{\partial s}+A_{xy,t}\frac{\partial u}{\partial t}+A_{xy,u}=0,$$

$$(47)\qquad A_{xy,z}\frac{\partial v}{\partial z}+A_{xy,s}\frac{\partial v}{\partial s}+A_{xy,t}\frac{\partial v}{\partial t}+A_{xy,v}=0,$$

$$(48)\qquad A_{xy,z}\frac{\partial w}{\partial z}+A_{xy,s}\frac{\partial w}{\partial s}+A_{xy,t}\frac{\partial w}{\partial t}+A_{xy,w}=0,$$

$$(49)\qquad A_{xy,z}\frac{\partial w^{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial z}+A_{xy,s}\frac{\partial w^{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial s}+A_{xy,t}\frac{\partial w^{\alpha,\beta,\gamma}}{\partial t}+A_{xy,w^{\alpha,\beta,\gamma}}=0$$

$$(\alpha+\beta+\gamma=1,\,2,\,\ldots,\,N),$$

où les A désignent certaines fonctions de

$$(50)\qquad x,\quad y,\quad z,\quad s,\quad t,\quad u,\quad v,\quad w,\quad w^{\alpha,\beta,\gamma}\qquad (\alpha+\beta+\gamma=1,\,2,\,\ldots,\,N).$$

Parmi les relations ci-dessus, qui, au point de vue de l'intégration, sont toutes des conséquences de S, et par suite [moyennant le changement de notations (43)] de (33), considérons celle qu'on obtient en attribuant à α, β, γ, dans (49), des valeurs particulières, α', β', γ', dont la somme soit égale à N. Cette relation ne contient, avec les quantités (50), que

$$\frac{\partial w^{\alpha',\beta',\gamma'}}{\partial z},\quad \frac{\partial w^{\alpha',\beta',\gamma'}}{\partial s},\quad \frac{\partial w^{\alpha',\beta',\gamma'}}{\partial t};$$

elle doit donc, à cause de la passivité de (33), être vérifiée pour toutes valeurs numériques des quantités qu'elle renferme, c'est-à-dire être

identiquement vérifiée. Les divers coefficients A qui figurent dans la relation considérée sont donc tous identiquement nuls, et les relations restantes du groupe (49), ainsi que les relations (46), (47) et (48), se réduisent chacune à leur dernier terme, qui ne contient que les seules quantités (50); elles doivent dès lors, à cause de la passivité de (33), être vérifiées pour toutes valeurs numériques de ces quantités.

En conséquence, toutes les conditions de passivité du système S se trouvent identiquement satisfaites, ce que nous voulions établir.

IV. Cela posé, considérons, dans le système (33), le groupe des intégrales ordinaires, u, v, w, qui répondent aux conditions initiales données (34) : si l'on désigne par $\upsilon(z, s, t)$ et $\varphi(z, s, t)$ ce que deviennent u et v dans l'hypothèse numérique

$$x - x_0 = y - y_0 = 0,$$

on verra, comme au n° 208, que les fonctions υ, φ vérifient, avec les conditions initiales

$$\left.\begin{aligned} \upsilon &= u_0 \\ \varphi &= v_0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{pour} \qquad z - z_0 = s - s_0 = t - t_0 = 0,$$

un système passif d'équations différentielles totales du premier ordre qui se déduit des trois dernières lignes de (33) par l'introduction de cette hypothèse numérique.

Les fonctions υ, φ étant supposées connues, on observera que les fonctions

$$u, \quad v, \quad w \qquad \text{et} \qquad w^{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} w}{\partial z^\alpha\, \partial s^\beta\, \partial t^\gamma}$$

$$(\alpha + \beta + \gamma = 1, 2, \ldots, \mathrm{N})$$

vérifient le système passif S, et l'on se trouvera ramené à rechercher, dans ce dernier système, la solution ordinaire qui répond aux conditions initiales

$$\left.\begin{aligned} u &= \upsilon(z, s, t) \\ v &= \varphi(z, s, t) \\ w &= \psi(z, s, t) \\ w^{\alpha,\beta,\gamma} &= \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} \psi}{\partial z^\alpha\, \partial s^\beta\, \partial t^\gamma} \end{aligned}\right\} \qquad \text{pour} \qquad x - x_0 = y - y_0 = 0.$$

Or, l'intégration du système S, indépendant du choix des condi-

tions initiales imposées aux intégrales de (33), se ramène, comme nous savons (n° 206), à celle d'un système passif d'équations différentielles totales du premier ordre.

V. On voit, par ce qui précède, qu'étant donné un système orthonome passif de grade 1 et d'ordre N, dont le Tableau n'offre de cases vides que dans une seule colonne, on en peut toujours ramener l'intégration à celles d'équations différentielles totales en adjoignant aux inconnues primitives, à titre d'inconnues auxiliaires, les dérivées paramétriques des ordres 1, 2, ..., N : il convient d'ajouter que, si le système en question est *linéaire* par rapport aux dérivées de l'ordre N, l'adjonction de ces dernières devient inutile, et qu'on peut alors se borner à prendre comme inconnues auxiliaires les dérivées paramétriques des ordres 1, 2, ..., N — 1. Nous avons, au n° 208, vérifié le fait pour N = 1, et nous en trouverons ci-après, dans un exemple numérique (n° 212, II), une vérification nouvelle ; il nous semble d'ailleurs inutile d'y insister davantage.

212. Appliquons à quelques exemples la méthode exposée au numéro précédent.

I. Considérons d'abord le système

$$(51)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^2 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^3, \qquad \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} + u, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)^2, \end{cases}$$

où se trouvent engagées deux fonctions inconnues des variables indépendantes x et y. Ce système est orthonome, comme on le voit par l'attribution aux variables et aux inconnues des cotes suivantes :

	x	y	u	v
Cotes premières	1	1	1	0
Cotes deuxièmes	2	1	1	0
Cotes troisièmes	0	0	1	0

;

il est d'ailleurs passif. Cela étant, on propose d'en rechercher la solu-

tion (u, v) satisfaisant aux conditions initiales

$$u = \text{A} \quad \text{pour} \quad x - 1 = y = 0,$$
$$v = y^2 \quad \text{pour} \quad x - 1 = 0.$$

En désignant par $\upsilon(y)$ ce que devient u dans l'hypothèse numérique $x = 1$, la fonction υ vérifie, avec la condition initiale

$$\upsilon = \text{A} \quad \text{pour} \quad y = 0,$$

l'équation différentielle $\dfrac{d\upsilon}{dy} = 2$; elle est, par suite, égale à $2y + \text{A}$. On se trouve ainsi ramené, par l'application de notre méthode, à intégrer le système

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{6}v''^3 + (1 + v'')\frac{\partial u}{\partial y},\\
\frac{\partial v}{\partial x} &= u - v'v'' + (1 + v'')\frac{\partial v}{\partial y},\\
\frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{2}v''^2 + (1 + v'')\frac{\partial v'}{\partial y},\\
\frac{\partial v''}{\partial x} &= (1 + v'')\frac{\partial v''}{\partial y},
\end{aligned}$$

aux quatre inconnues u, v, v', v'', avec les conditions initiales

$$(52) \qquad \left\{\begin{aligned} u &= 2y + \text{A}\\ v &= y^2\\ v' &= 2y\\ v'' &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad x = 1.$$

A cet effet, on forme l'équation aux dérivées partielles (homogène)

$$\frac{\partial f}{\partial x} - (1 + v'')\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{1}{6}v''^3\frac{\partial f}{\partial u} + (u - v'v'')\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{1}{2}v''^2\frac{\partial f}{\partial v'} = 0,$$

où f désigne une fonction inconnue de x, y, u, v, v', v''; son intégrale générale est une fonction arbitraire des cinq quantités

$$x(1 + v'') + y, \quad v'', \quad xv''^3 + 6u, \quad xv''^2 + 2v',$$
$$6v - 6ux + x^2v''^3 + 6xv'v''.$$

On pose alors

$$(53) \qquad \left\{\begin{aligned}
v'' &= \Upsilon\,[x(1 + v'') + y],\\
xv''^3 + 6u &= \Phi\,[x(1 + v'') + y],\\
xv''^2 + 2v' &= \Psi\,[x(1 + v'') + y],\\
6v - 6ux + x^2v''^3 + 6xv'v'' &= \Omega\,[x(1 + v'') + y],
\end{aligned}\right.$$

et l'on détermine les composantes Υ, Φ, Ψ, Ω, de manière que les relations (53) soient identiquement vérifiées quand on tient compte des conditions initiales (52). Il vient ainsi

$$\begin{aligned} 2 &= \Upsilon\,(y+3), \\ 12y+8+6\mathrm{A} &= \Phi\,(y+3), \\ 4y+4 &= \Psi\,(y+3), \\ 6y^2+12y+8-6\mathrm{A} &= \Omega\,(y+3), \end{aligned}$$

relations qui, par le changement de variable

$$y+3=\theta,$$

prennent la forme

$$\begin{aligned} 2 &= \Upsilon\,(\theta), \\ 12\theta-28+6\mathrm{A} &= \Phi\,(\theta), \\ 4\theta-8 &= \Psi(\theta), \\ 6\theta^2-24\theta+26-6\mathrm{A} &= \Omega\,(\theta). \end{aligned}$$

Les composantes Υ, Φ, Ψ, Ω étant connues, les relations (53) deviennent

$$v''=2, \qquad xv''^3+6u=12[x(1+v'')+y]-28+6\mathrm{A},$$
$$xv''^2+2v'=4[x(1+v'')+y]-8,$$
$$\begin{aligned} &6v-6ux+x^2v''^3+6xv'v'' \\ &\quad = 6[x(1+v'')+y]^2-24[x(1+v'')+y]+26-6\mathrm{A}, \end{aligned}$$

et l'on en tire

$$u=\frac{14x+6y+3\mathrm{A}-14}{3},$$
$$v=\frac{13x^2+12xy+3y^2+(3\mathrm{A}-26)x-12y+13-3\mathrm{A}}{3},$$

solution cherchée du système (51).

II. Considérons maintenant le système

$$(54)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2(1+u)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-(1+4u)\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}+(2u-1)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 2\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}+u^2+v, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \end{aligned} \right.$$

linéaire par rapport aux dérivées du second ordre, et où se trouvent engagées deux fonctions inconnues des variables indépendantes x, y, z. Ce système est orthonome, comme on le voit par l'attribution aux variables et aux inconnues des cotes suivantes :

	x	y	z	u	v
Cotes premières..........	1	1	1	1	0
Cotes deuxièmes.........	2	1	1	1	0
Cotes troisièmes.........	0	0	0	1	0

;

il est d'ailleurs passif. Cela étant, on propose d'en rechercher la solution, (u, v), satisfaisant aux conditions initiales

$$u = \mathrm{A} \quad \text{pour} \quad x = y = z = 0,$$
$$v = y + 2z \quad \text{pour} \quad x = 0.$$

En désignant par $\upsilon(y, z)$ ce que devient u dans l'hypothèse numérique $x = 0$, la fonction υ vérifie, avec la condition initiale

$$\upsilon = \mathrm{A} \quad \text{pour} \quad y = z = 0,$$

le système des deux équations $\frac{\partial \upsilon}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \upsilon}{\partial z} = 0$; on a donc identiquement $\upsilon(y, z) = \mathrm{A}$.

Cela étant, le système (54) nous fournit, pour $\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y}$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial z}$, les expressions ultimes

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} &= 2(1+u)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (1-2u)\frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial z} &= 2(1+u)\frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial z} + (1-2u)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial v}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

On peut, d'autre part, en tenant compte des deux dernières équations du système (54), ajouter au second membre de la première la quantité (nulle)

$$2(1+u)\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial z}\right) + (1-2u)\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right),$$

et l'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = {} & 2(1+u)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - (1+4u)\frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial z} + (2u-1)\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ & + 2(1+u)\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial z}\right) + (1-2u)\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \end{aligned}$$

ce qui donne, toutes réductions faites,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(1+u)\frac{\partial u}{\partial y} + (1-2u)\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}. \tag{56}$$

Si l'on pose maintenant

$$\frac{\partial v}{\partial y} = v'_y, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = v'_z, \tag{57}$$

la deuxième équation du système (54) peut s'écrire

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2v'_y + v'_z + u^2 + v + 2(1+u)\left(\frac{\partial v}{\partial y} - v'_y\right) + (1-2u)\left(\frac{\partial v}{\partial z} - v'_z\right),$$

ou, toutes réductions faites,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2(1+u)\frac{\partial v}{\partial y} + (1-2u)\frac{\partial v}{\partial z} + 2u(v'_z - v'_y) + u^2 + v.$$

Finalement, si l'on tient compte, dans les équations (55) et (56), du changement de notations (57), on tombe sur le système

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= v'_y - v'_z && + 2(1+u)\frac{\partial u}{\partial y} + (1-2u)\frac{\partial u}{\partial z},\\
\frac{\partial v}{\partial x} &= u^2 + v + 2u(v'_z - v'_y) && + 2(1+u)\frac{\partial v}{\partial y} + (1-2u)\frac{\partial v}{\partial z},\\
\frac{\partial v'_y}{\partial x} &= v'_y && + 2(1+u)\frac{\partial v'_y}{\partial y} + (1-2u)\frac{\partial v'_y}{\partial z},\\
\frac{\partial v'_z}{\partial x} &= v'_z && + 2(1+u)\frac{\partial v'_z}{\partial y} + (1-2u)\frac{\partial v'_z}{\partial z},
\end{aligned}$$

aux quatre inconnues u, v, v'_y, v'_z ; il ne reste plus qu'à intégrer ce dernier avec les conditions initiales

$$\left\{\begin{aligned} u &= A\\ v &= y + 2z\\ v'_y &= 1\\ v'_z &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad x = 0. \tag{58}$$

A cet effet, on forme l'équation aux dérivées partielles (homogène)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} - 2(1+u)\frac{\partial f}{\partial y} - (1-2u)\frac{\partial f}{\partial z} + (v'_y - v'_z)\frac{\partial f}{\partial u}\\
+ (u^2 + v + 2uv'_z - 2uv'_y)\frac{\partial f}{\partial v} + v'_y\frac{\partial f}{\partial v'_y} + v'_z\frac{\partial f}{\partial v'_z} = 0,\end{aligned}$$

où f désigne une fonction inconnue de $x, y, z, u, v, v'_y, v'_z$; son intégrale générale est une fonction arbitraire des six quantités

$$u - v'_y + v'_z, \quad v'_y e^{-x}, \quad v'_z e^{-x}, \quad (u^2 + v) e^{-x},$$
$$3x + y + z, \qquad z - 2u + (1 - 2u + 2v'_y - 2v'_z)x.$$

On pose alors

$$(59) \quad \begin{cases} u - v'_y + v'_z = \Upsilon\,[3x + y + z,\ z - 2u + (1 - 2u + 2v'_y - 2v'_z)x], \\ v'_y e^{-x} = \Phi\,[3x + y + z,\ z - 2u + (1 - 2u + 2v'_y - 2v'_z)x], \\ v'_z e^{-x} = \Psi\,[3x + y + z,\ z - 2u + (1 - 2u + 2v'_y - 2v'_z)x], \\ (u^2 + v) e^{-x} = \Omega\,[3x + y + z,\ z - 2u + (1 - 2u + 2v'_y - 2v'_z)x], \end{cases}$$

et l'on détermine les composantes des seconds membres de manière que les relations (59) soient identiquement vérifiées quand on tient compte des conditions initiales (58). Il vient ainsi

$$A + 1 = \Upsilon\,(y + z,\ z - 2A),$$
$$1 = \Phi\,(y + z,\ z - 2A),$$
$$2 = \Psi\,(y + z,\ z - 2A),$$
$$y + 2z + A^2 = \Omega\,(y + z,\ z - 2A),$$

relations qui, par le changement de variables

$$y + z = \theta_1, \qquad z - 2A = \theta_2,$$

prennent la forme

$$A + 1 = \Upsilon\,(\theta_1, \theta_2), \qquad 1 = \Phi(\theta_1, \theta_2),$$
$$2 = \Psi(\theta_1, \theta_2), \qquad \theta_1 + \theta_2 + A^2 + 2A = \Omega\,(\theta_1, \theta_2).$$

Les composantes Υ, Φ, Ψ, Ω étant connues, les relations (59) deviennent

$$u - v'_y + v'_z = A + 1, \qquad v'_y e^{-x} = 1, \qquad v'_z e^{-x} = 2,$$
$$(u^2 + v) e^{-x} = (3x + y + z) + [z - 2u + (1 - 2u + 2v'_y - 2v'_z)x] + A^2 + 2A,$$

et l'on en tire

$$u = A + 1 - e^x,$$
$$v = e^{2x} + e^x[2(1 - A)x + y + 2z + A^2 + 2A] - (A + 1)^2,$$

solution cherchée du système (54).

Systèmes réductibles aux précédents.

213. *Dans tout système différentiel auquel s'applique l'un ou l'autre de nos théorèmes d'existence, et où, de plus, le damier des conditions initiales* (nº 90) *n'offre de cases blanches que dans une seule colonne, la recherche d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données se ramène à l'intégration successive de deux systèmes passifs d'équations différentielles totales* (nº 116), *dont le second est indépendant du choix des conditions initiales.*

Nous commencerons par rappeler que tout système différentiel, S, auquel s'applique l'un ou l'autre de nos théorèmes d'existence, remplit à la fois les diverses conditions suivantes :

1º *Le système* S *est résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, les seconds membres y sont indépendants de toute dérivée principale, et aucun des premiers membres n'y est une dérivée de quelque autre* [1].

2º *En attribuant, dans toutes les équations du système* S, *aux variables indépendantes des cotes respectives toutes égales à* 1, *et aux inconnues des cotes respectives convenablement choisies, chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités* (*inconnues ou dérivées*) *dont la cote ne surpasse pas celle du premier membre correspondant.*

3º *En désignant par* Γ *la cote maxima des premiers membres des conditions initiales* (*mises sous la forme que nous avons spécifiée au* nº 155), *par* δ *la cote minima des premiers membres de* S, *et par* Δ *leur cote maxima* ($\Delta \leqq \Gamma + 1$), *on peut, des groupes*

$$S_\delta, \quad S_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad S_{\Gamma+1}$$

(nº 144), *extraire respectivement des groupes,*

$$t_\delta, \quad t_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad t_{\Gamma+1},$$

possédant la triple propriété de contenir

$$s_\delta, \quad s_{\delta+1}, \quad \ldots, \quad s_\Delta$$

---

[1] *Voir* la Remarque du nº 113.

(n° 144), *d'être composés d'équations en nombres respectivement égaux à ceux des dérivées principales de cotes*

$$\delta, \quad \delta + 1, \quad \ldots, \quad \Gamma + 1,$$

et d'être successivement résolubles par rapport à ces dérivées.

Ces diverses conditions se trouvant remplies, et le damier des conditions initiales de S n'offrant de cases blanches que dans une seule colonne, il résulte de l'alinéa I du n° 201 que l'intégration de S se ramène à celle d'un système orthonome passif de grade 1, dont le Tableau n'offre lui-même de cases vides que dans une seule colonne; et nous avons d'ailleurs établi, dans ce qui précède, que l'intégration de ce dernier système est réductible à celle qu'indique notre énoncé.

CHAPITRE XIV.

RÉDUCTION D'UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL QUELCONQUE A UNE FORME COMPLÈTEMENT INTÉGRABLE.

Indication d'une méthode générale pour réduire un système différentiel à une forme complètement intégrable.

214. Nous commencerons par établir divers lemmes.

I. Dans un système différentiel quelconque, nous nommerons souvent *solution analytique* un groupe quelconque d'intégrales ([1]).

Nous bornant, comme nous l'avons toujours fait, à la considération exclusive des solutions analytiques *ordinaires* (nº 98), nous dirons qu'un système différentiel *limité* (c'est-à-dire composé d'un nombre limité d'équations) est *analytiquement possible* ou *impossible*, suivant qu'il admet ou non quelque solution de cette espèce.

Étant donnés deux systèmes différentiels limités, si toute solution analytique ordinaire du premier est en même temps une solution analytique ordinaire du second, nous dirons que le second est une *conséquence analytique* du premier; si chacun d'eux est une conséquence analytique de l'autre, les systèmes seront dits *analytiquement équivalents*.

Étant donnés deux systèmes différentiels (limités), S et S′, où se trouvent engagées les mêmes fonctions inconnues, u, v, ..., des mêmes variables indépendantes, x, y, ..., *si les systèmes*

S prolongé, S′ prolongé

(nº 99) *sont numériquement équivalents* (nº 100), il est facile de voir que *les systèmes* S, S′ *le sont analytiquement* ([2]). Toute solu-

---

([1]) Le mot *analytique* est ici opposé au mot *numérique*.
([2]) La réciproque est vraie : *voir* ci-après nº 217, II.

tion analytique ordinaire de S fournit en effet une solution numérique de S prolongé donnant lieu à des développements convergents (n° 99), par suite, une solution numérique de S′ prolongé jouissant de la même propriété; elle est donc aussi (n° 99) une solution analytique de S′, nécessairement ordinaire pour S′ en vertu même des restrictions posées dans la définition de l'équivalence numérique. Pareillement, toute solution analytique ordinaire de S′ en est aussi une pour S.

II. *Quand deux systèmes différentiels (limités),* S *et* S′, *sont en corrélation multiplicatoire* (n° 122), *les systèmes*

$$S \text{ prolongé}, \quad S' \text{ prolongé}$$

jouissent de la même propriété (c'est-à-dire que toute relation figurant dans l'un quelconque de ces deux derniers est une combinaison multiplicatoire de diverses relations, en nombre limité, figurant dans l'autre).

Effectivement, soient

$$(1) \qquad F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_m = 0$$

les équations du système S; toute équation de S′, étant, par hypothèse, une combinaison multiplicatoire des précédentes, peut s'écrire sous la forme

$$\Phi_1 F_1 + \Phi_2 F_2 + \ldots + \Phi_m F_m = 0,$$

où $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$ désignent certaines fonctions dépendant des variables $x, y, \ldots$, des inconnues $u, v, \ldots$ et de leurs dérivées. Cela étant, désignons par $\Omega_{x^\alpha y^\beta \ldots} F$ un symbole indiquant qu'on a appliqué à F la règle de différentiation des fonctions composées, successivement α fois par rapport à x, β fois par rapport à y, etc. Il s'agit de faire voir que l'équation

$$\Omega_{x^\alpha y^\beta \ldots}(\Phi_1 F_1 + \Phi_2 F_2 + \ldots + \Phi_m F_m) = 0$$

est une combinaison multiplicatoire de diverses équations de S prolongé. Or, il est clair qu'en développant par la règle des fonctions composées le premier membre de la relation précédente, on tombe sur une somme de termes dont chacun est de la forme

$$\Omega_{x^{\alpha'} y^{\beta'} \ldots} \Phi_k \times \Omega_{x^{\alpha''} y^{\beta''} \ldots} F_k,$$

avec les conditions

$$\alpha' + \alpha'' = \alpha, \qquad \beta' + \beta'' = \beta, \qquad \ldots,$$

et il suffit alors d'observer que la relation

$$\Omega_{x^{\alpha''}y^{\beta''}\ldots}\mathrm{F}_k = 0$$

appartient au système (1) prolongé, c'est-à-dire à S prolongé.

Ainsi, toute relation de S′ prolongé est une combinaison multiplicatoire de S prolongé, et l'on prouverait de même la réciproque.

III. *Lorsque, à un système différentiel (limité),* S, *on adjoint un groupe (limité),* H, *qui soit une combinaison multiplicatoire de quelque groupe (limité) extrait du système* S *prolongé, les systèmes*

$$\text{S prolongé,}\quad (\text{S, H}) \text{ prolongé}$$

sont en corrélation multiplicatoire.

Effectivement, toute équation de S prolongé étant une combinaison multiplicatoire d'elle-même, il nous suffit d'établir que toute équation de H prolongé est une combinaison multiplicatoire de diverses équations de S prolongé. Or, toute équation de H, jouissant, par hypothèse, de cette propriété, est de la forme

$$\Lambda_1 \mathrm{L}_1 + \Lambda_2 \mathrm{L}_2 + \ldots + \Lambda_g \mathrm{L}_g = 0, \tag{2}$$

où

$$\mathrm{L}_1 = 0,\qquad \mathrm{L}_2 = 0,\qquad \ldots,\qquad \mathrm{L}_g = 0 \tag{3}$$

désignent des équations convenablement choisies de S prolongé, et

$$\Lambda_1,\quad \Lambda_2,\quad \ldots,\quad \Lambda_g$$

des fonctions convenablement choisies. Si sur l'équation (2) on effectue, conformément à la règle des fonctions composées, un nombre quelconque de différentiations consécutives, il est visible, en vertu d'un raisonnement semblable à celui de l'alinéa II, que la relation résultante est une combinaison multiplicatoire du système (3) prolongé, et, par suite, du système S prolongé.

IV. *Considérons un système différentiel (limité) composé des deux groupes* S, T, *et soient* Σ *un groupe réduit* (n° 128) *extrait de* S *prolongé,* T′ *le groupe déduit de* T *en y tenant compte des formules de résolution de* Σ.

Cela étant, les systèmes

$$(S, T) \text{ prolongé}, \quad (S, T') \text{ prolongé}$$

sont en corrélation multiplicatoire.

Désignons, en effet, par s celles d'entre les équations de Σ qui font partie de S (non prolongé), et par σ celles qui n'en font pas partie. Il résulte de nos hypothèses et d'une remarque faite dans la théorie des fonctions implicites (*voir* la note du n° 122) que les systèmes (Σ, T) et (Σ, T'), c'est-à-dire (s, σ, T) et (s, σ, T') sont en corrélation multiplicatoire; les systèmes (S, σ, T), (S, σ, T') jouissent donc évidemment de la même propriété, et, par suite aussi (II), les systèmes

$$(S, \sigma, T) \text{ prolongé}, \quad (S, \sigma, T') \text{ prolongé}.$$

D'ailleurs, puisque σ fait partie de S prolongé, il est clair que le système (S, σ) prolongé n'est autre que le système S prolongé : donc on peut dire que les systèmes

$$(S, T) \text{ prolongé}, \quad (S, T') \text{ prolongé}$$

sont en corrélation multiplicatoire, ce qu'il s'agissait d'établir.

V. *Si, dans un système différentiel* (*limité*), S, *résolu par rapport à diverses dérivées* (*d'ordre positif ou nul*) *des inconnues, on attribue, comme dans la définition des systèmes orthonomes* (n° 104), *p cotes successives à chacune des variables et des inconnues* (¹), *et si chaque second membre ne contient, outre les variables indépendantes, que des quantités* (*inconnues ou dérivées*) *normales par rapport au premier membre correspondant* (n° 104), *on peut, sans changer les cotes, en déduire un système,* S′, *possédant à la fois les propriétés suivantes :*

1° *Les systèmes* S *et* S′ *se composent d'un même nombre d'équations, et ont respectivement les mêmes premiers membres.*

2° *Dans le système* S′, *chaque second membre n'est pas seulement, comme dans* S, *indépendant de toute quantité anormale, il l'est aussi de toute quantité principale.*

(¹) La cote première de toute variable indépendante est ainsi égale à 1.

3° *Les systèmes*

$$\text{S prolongé}, \quad \text{S}' \text{ prolongé}$$

sont en corrélation multiplicatoire.

Dans le n° 106, auquel nous prions le lecteur de se reporter, nous avons considéré un système différentiel résolu par rapport à diverses dérivées des inconnues, et nous avons supposé que les premiers membres du système étaient tous d'ordre *supérieur* à zéro : mais les conclusions auxquelles nous avons été conduit restent applicables, alors même que quelques-uns des premiers membres seraient d'ordre nul.

Cela étant, si le système proposé S a ses seconds membres indépendants de toute quantité principale, la proposition est vraie d'elle-même.

En nous plaçant maintenant dans l'hypothèse contraire, considérons l'ensemble illimité que forment les quantités principales du système S, et soit ω la classe maxima des premiers membres de S. De l'ensemble des relations déduites de S par différentiations, j'extrais un groupe, Q, choisi de telle sorte que, dans le système

$$(S, Q),$$

chacune des quantités principales de classes $1, 2, \ldots, \omega - 1$ figure comme premier membre une fois et une seule. Le système (S, Q) a donc pour premiers membres (tous distincts entre eux) les diverses quantités principales de classes $1, 2, \ldots, \omega - 1$ du système S, et, en outre, certaines quantités principales de classe ω du même système. Dans le système (S, Q), le groupe formé par les équations qui ont pour premiers membres les quantités principales de classe 1 du système S, appartient tout entier à S : car autrement, quelqu'une des équations de ce groupe se déduirait par différentiation de quelqu'une des équations de S, et, par suite, aurait son premier membre de classe supérieure à la classe minima, qui est 1. Mais le groupe formé dans (S, Q) par les équations qui ont pour premiers membres les quantités principales de classe $k = 2, 3, \ldots, \omega - 1$ *peut* contenir des équations extraites de S et d'autres extraites de Q. Cela étant, je désignerai par

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_{\omega-1}, \quad S_\omega$$

les groupes extraits de S dont les premiers membres sont de classes

respectives

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad \omega - 1, \quad \omega;$$

et, semblablement, je désignerai par

$$Q_2, \quad \ldots, \quad Q_{\omega-1}$$

les groupes extraits de Q dont les premiers membres sont de classes respectives

$$2, \quad \ldots, \quad \omega - 1.$$

Puis, je partagerai le système (S, Q) en groupes successifs de la façon suivante :

$$S_1, \quad S_2, \quad Q_2, \quad S_3, \quad Q_3, \quad \ldots, \quad S_{\omega-1}, \quad Q_{\omega-1}, \quad S_\omega.$$

Rien n'est plus facile que d'éliminer des seconds membres de ce système toutes les quantités principales : effectivement, dans (S_2, Q_2), on remplacera les quantités principales de première classe par leurs valeurs tirées de S_1, ce qui donnera (S'_2, Q'_2); puis, dans (S_3, Q_3), les quantités principales des deux premières classes par leurs valeurs tirées de (S_1, S'_2, Q_2), ce qui donnera (S'_3, Q'_3); et ainsi de suite jusqu'à S_ω, qui sera remplacé par un groupe S'_ω. On tombera finalement sur le système

$$S_1, \quad S'_2, \quad Q'_2, \quad S'_3, \quad Q'_3, \quad \ldots, \quad S'_{\omega-1}, \quad Q'_{\omega-1}, \quad S'_\omega.$$

Il est clair que le système S', formé par la réunion des groupes

$$S_1, \quad S'_2, \quad S'_3, \quad \ldots, \quad S'_{\omega-1}, \quad S'_\omega,$$

satisfait aux conditions 1° et 2° de notre énoncé, et il s'agit d'établir qu'il satisfait aussi à la condition 3°, c'est-à-dire que le système S' prolongé est en corrélation multiplicatoire avec le système S prolongé.

Observons tout d'abord que les relations Q_2 proviennent nécessairement du prolongement de S_1, les relations Q_3 du prolongement de (S_1, S_2), les relations Q_4 du prolongement de (S_1, S_2, S_3), etc., enfin les relations $Q_{\omega-1}$ du prolongement de $(S_1, S_2, \ldots, S_{\omega-2})$.

Cela étant, les systèmes (S_1, S_2) et (S_1, S'_2) sont, en vertu d'une remarque faite dans la théorie des fonctions implicites (*voir* la note du n° 122), en corrélation multiplicatoire : donc les systèmes

$$(S_1, S_2) \text{ prolongé}, \quad (S_1, S'_2) \text{ prolongé}$$

jouissent, d'après II, de la même propriété.

Considérons le système (S_1, S_2, S_3). Si, dans les relations S_3, on remplace les quantités principales des deux premières classes par leurs valeurs tirées de (S_1, S'_2, Q'_2), c'est-à-dire déduites, conformément au principe général des fonctions implicites, de (S_1, S_2, Q_2), qui fait partie de (S_1, S_2) prolongé, il résulte de IV que les systèmes

$$(S_1, S_2, S_3) \text{ prolongé}, \quad (S_1, S_2, S'_3) \text{ prolongé}$$

sont en corrélation multiplicatoire. D'ailleurs, puisque nous venons d'établir que (S_1, S_2) prolongé et (S_1, S'_2) prolongé jouissent de la même propriété, il est clair que

$$(S_1, S_2, S'_3) \text{ prolongé}, \quad (S_1, S'_2, S'_3) \text{ prolongé}$$

en jouissent aussi. On en déduit, par comparaison, que

$$(S_1, S_2, S_3) \text{ prolongé}, \quad (S_1, S'_2, S'_3) \text{ prolongé}$$

sont en corrélation multiplicatoire.

Considérons maintenant le système (S_1, S_2, S_3, S_4). Si, dans les relations S_4, on remplace les quantités principales des trois premières classes par leurs valeurs tirées de $(S_1, S'_2, Q'_2, S'_3, Q'_3)$, c'est-à-dire déduites, conformément au principe général des fonctions implicites, de $(S_1, S_2, Q_2, S_3, Q_3)$, qui fait partie de (S_1, S_2, S_3) prolongé, il résulte de IV que les systèmes

$$(S_1, S_2, S_3, S_4) \text{ prolongé}, \quad (S_1, S_2, S_3, S'_4) \text{ prolongé}$$

sont en corrélation multiplicatoire. D'ailleurs, puisque nous venons d'établir que

$$(S_1, S_2, S_3) \text{ prolongé}, \quad (S_1, S'_2, S'_3) \text{ prolongé}$$

jouissent de la même propriété, il est clair que

$$(S_1, S_2, S_3, S'_4) \text{ prolongé}, \quad (S_1, S'_2, S'_3, S'_4) \text{ prolongé}$$

en jouissent aussi. On en déduit, par comparaison, que

$$(S_1, S_2, S_3, S_4) \text{ prolongé}, \quad (S_1, S'_2, S'_3, S'_4) \text{ prolongé}$$

sont en corrélation multiplicatoire.

Et ainsi de suite.

VI. Soient

$$(4) \qquad u, \quad v, \quad \ldots$$

diverses fonctions inconnues (en nombre limité) des variables indépendantes

$$x, \quad y, \quad \ldots, \quad z.$$

Considérant un ensemble *limité* formé avec des dérivées (d'ordre positif ou nul) de u, v, ..., convenons de dire (comme si les dérivées en question étaient les premiers membres d'un système différentiel, résolu par rapport à elles) qu'une dérivée quelconque de u, v, ... est *principale* relativement à cet ensemble, si elle coïncide avec quelqu'un des termes de l'ensemble ou quelqu'une de leurs dérivées; convenons de dire, dans le cas contraire, qu'elle est *paramétrique* par rapport à l'ensemble (n° 90).

Cela posé, *si l'on forme successivement, avec des dérivées de* u, v, ..., *divers ensembles* (*limités*) *dont chacun ne contienne que des dérivées paramétriques par rapport à tous les précédents, le nombre de ces ensembles est forcément limité* [1].

Plaçons-nous, en effet, dans l'hypothèse contraire, et supposons qu'on puisse former une suite *indéfinie* d'ensembles, dont chacun ne contienne que des dérivées paramétriques relativement à tous les précédents. En pareil cas, quelqu'une des fonctions (4), u par exemple, fournit certainement des dérivées à un nombre illimité d'ensembles. Si l'on désigne par E' l'un de ces derniers ensembles, et par

$$(5) \qquad \frac{\partial^{\lambda'+\mu'+\ldots+\nu'}}{\partial x^{\lambda'}\,\partial y^{\mu'}\ldots\partial z^{\nu'}}$$

l'une des dérivées de u qui figurent dans E', il y a encore, à la suite

---

[1] Cette proposition, dont j'ai publié la démonstration en juin 1893 (*Annales de l'École Normale*, 1893, p. 171, 172 et 173), contient comme cas particulier la suivante, formulée par M. Delassus en 1896 : *Si l'on considère une suite infinie d'ensembles canoniques d'ordres croissants,*

$$E^{n}, \quad E^{n+1}, \quad \ldots, \quad E^{\mu}, \quad \ldots,$$

tels qu'on ait, quel que soit μ,

$$(E^{\mu})' \leqq E^{\mu+1},$$

le nombre des termes de la suite pour lesquels il y a inégalité est forcément limité (*Annales de l'École Normale*, 1896, p. 431 et 432).

de E′, un nombre illimité d'ensembles contenant des dérivées de la fonction u; pour chacune de ces dérivées, l'un au moins des ordres partiels $\lambda, \mu, \ldots, \nu$, relatifs à $x, y, \ldots, z$, est inférieur à l'ordre partiel correspondant de (5), et chacune d'elles appartient, à plus forte raison, à quelqu'une des

$$(\lambda'+1)+(\mu'+1)+\ldots+(\nu'+1)$$

catégories que définissent respectivement les relations

$$\begin{array}{lllll}
\lambda = 0; & \lambda = 1; & \lambda = 2; & \ldots, & \lambda = \lambda'; \\
\mu = 0; & \mu = 1; & \mu = 2; & \ldots, & \mu = \mu'; \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots; \\
\nu = 0; & \nu = 1; & \nu = 2; & \ldots. & \nu = \nu'.
\end{array}$$

Des diverses catégories ci-dessus définies, une au moins, par exemple

$$(6) \qquad \lambda = l,$$

fournit donc nécessairement des dérivées de u à un nombre illimité d'ensembles postérieurs à E′. Si l'on désigne par E″ l'un de ces derniers ensembles, et par

$$(7) \qquad \frac{\partial^{l+\mu''+\ldots+\nu''} u}{\partial x^l \, \partial y^{\mu''} \ldots \partial z^{\nu''}}$$

l'une des dérivées de u de la catégorie (6) qui figurent dans E″, il y a encore, à la suite de E″, un nombre illimité d'ensembles contenant des dérivées de u de cette même catégorie; pour chacune des dérivées en question, l'un au moins des ordres partiels $\mu, \ldots, \nu$ relatifs à $y, \ldots, z$ est inférieur à l'ordre partiel correspondant de (7), et chacune d'elles appartient, à plus forte raison, à quelqu'une des

$$(\mu''+1)+\ldots+(\nu''+1)$$

catégories que définissent respectivement les couples de relations

$$\begin{array}{lllll}
\left\{\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \mu = 0;\end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \mu = 1;\end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \mu = 2;\end{array}\right. & \ldots; & \left\{\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \mu = \mu'';\end{array}\right. \\
\ldots\ldots; & \ldots\ldots; & \ldots\ldots; & \ldots; & \ldots\ldots; \\
\left\{\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \nu = 0;\end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \nu = 1,\end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \nu = 2;\end{array}\right. & \ldots; & \left\{\begin{array}{l}\lambda = l,\\ \nu = \nu''.\end{array}\right.
\end{array}$$

De ces nouvelles catégories, une au moins, par exemple

$$\begin{cases} \lambda = l, \\ \mu = m, \end{cases}$$

fournit donc nécessairement des dérivées de u à un nombre illimité d'ensembles postérieurs à E″. En poursuivant ce raisonnement et désignant par ..., n des entiers convenablement choisis, on arrivera à cette conclusion absurde que la catégorie

$$\begin{cases} \lambda = l, \\ \mu = m, \\ \cdots\cdots, \\ \nu = n, \end{cases}$$

ne comprenant évidemment qu'une seule dérivée de u, en fournit à un nombre illimité d'ensembles.

215. *Étant donné un système différentiel* (*limité*), *dont les premiers membres* (*après réduction des seconds à zéro*) *sont développables dans quelque domaine* (nº 76), *on peut, dans les circonstances générales, et sauf la rencontre de relations non identiques entre les seules variables indépendantes, en déduire, sans changement de variables ni intégration, un système complètement intégrable tel, que le deuxième système prolongé équivaille numériquement au premier prolongé, tel, par suite, que le deuxième système équivaille analytiquement au premier* (nº 214, I).

Nous présenterons tout d'abord une remarque générale sur le genre de raisonnement qu'on est obligé de faire dans une semblable question, quel que soit d'ailleurs le mode de réduction adopté. On doit en effet, quel que soit ce mode, résoudre par rapport aux fonctions inconnues et à leurs dérivées, considérées dans un certain ordre, certaines relations dont les unes sont données, et dont les autres s'introduisent dans le cours des calculs. Or, on suppose essentiellement que chacune des résolutions successives auxquelles on est ainsi conduit puisse s'effectuer conformément au principe général des fonctions implicites sans que les résolutions antérieures en soient troublées. Cette présomption, à laquelle les faits peuvent, dans tel ou tel cas, ne pas donner raison, se justifie toutefois assez fréquemment pour que

nos déductions conservent toute leur valeur générale : mais, à vrai dire, la très grande généralité du problème posé ne nous permettra d'obtenir, dans les raisonnements qui vont suivre, ni une rigueur absolue, ni une précision irréprochable.

Cette réserve faite, nous établirons de diverses manières, en commençant par la plus simple, la possibilité théorique de la réduction spécifiée dans notre énoncé.

I. Désignant par u, v, ..., w certaines fonctions inconnues des variables indépendantes $x, y, \ldots, s, t$, nous adopterons pour celles-ci un ordre déterminé, par exemple

$$x, \quad y, \quad \ldots, \quad s, \quad t, \tag{8}$$

et de même pour les inconnues un ordre déterminé, par exemple

$$u, \quad v, \quad \ldots, \quad w. \tag{9}$$

Puis, nous rangerons comme il suit, sur une ligne indéfinie allant de droite à gauche, les dérivées de tous ordres des diverses fonctions inconnues. Nous écrirons d'abord l'ensemble des dérivées premières, puis à gauche de celui-ci l'ensemble des dérivées secondes, puis à gauche de ce dernier l'ensemble des dérivées troisièmes, et ainsi de suite indéfiniment. Chaque ensemble sera ensuite divisé en ensembles partiels, dont le premier à gauche contiendra les dérivées appartenant à la fonction u, le suivant les dérivées appartenant à la fonction v, et ainsi jusqu'au dernier qui contiendra les dérivées appartenant à la fonction w. En désignant maintenant par α, β, ..., λ, μ les ordres partiels d'une dérivée quelconque relatifs à $x, y, \ldots, s, t$ respectivement, chacun des ensembles résultants sera lui-même divisé en ensembles partiels se succédant de gauche à droite d'après les valeurs décroissantes de l'ordre partiel α; chaque sous-ensemble en sous-ensembles partiels se succédant de gauche à droite d'après les valeurs décroissantes de l'ordre partiel β; et ainsi jusqu'à l'ordre partiel λ (inclusivement). Chacun des ensembles définitifs se compose alors d'une dérivée unique, et les dérivées de tous ordres de nos fonctions inconnues se trouvent rangées, sur une ligne indéfinie allant de droite à gauche, dans un ordre bien déterminé. Nous qualifierons de *taxique* la suite ainsi obtenue, et nous dirons qu'une dérivée de fonction inconnue est *antérieure* ou *postérieure* à une autre, selon que, dans la suite taxique, elle figure à gauche ou à droite de cette autre.

Cela étant, un système différentiel sera dit *taxique,* s'il se trouve résolu par rapport à diverses dérivées des fonctions inconnues qu'il implique, et si l'on peut trouver, pour les variables et les inconnues, deux ordres respectifs, (8), (9), tels, que chaque second membre ne contienne, outre les variables et les inconnues, que des dérivées paramétriques postérieures au premier membre correspondant.

Un pareil système est nécessairement orthonome.

Effectivement, si une dérivée de fonction inconnue est antérieure à une autre, il arrive forcément de trois choses l'une :

Ou bien elle est d'ordre supérieur à cette autre ;

Ou bien elle est de même ordre, mais la fonction inconnue à laquelle elle appartient précède, dans la suite (9), la fonction inconnue à laquelle appartient cette autre ;

Ou bien enfin les deux dérivées considérées sont de même ordre et appartiennent à une même fonction inconnue, mais en désignant par

$$\alpha', \quad \beta', \quad \ldots, \quad \lambda', \quad \mu',$$
$$\alpha'', \quad \beta'', \quad \ldots, \quad \lambda'', \quad \mu''$$

leurs ordres partiels relatifs à

$$x, \quad y, \quad \ldots, \quad s, \quad t,$$

les différences

$$\alpha'-\alpha'', \quad \beta'-\beta'', \quad \ldots, \quad \lambda'-\lambda''$$

ne sont pas toutes nulles, et la première d'entre elles qui ne s'évanouit pas est positive.

Cela étant, et en désignant par h le nombre des variables indépendantes, il suffit, pour se convaincre de la nature orthonome d'un système taxique, d'attribuer :

Aux variables des cotes premières toutes égales à 1, et aux inconnues des cotes premières toutes nulles ;

Aux variables des cotes secondes toutes nulles, et aux inconnues successives u, v, ..., w des cotes secondes dont la valeur aille en décroissant ;

Aux variables et aux inconnues des cotes troisièmes toutes nulles, à l'exception de x qui aura pour cote troisième l'unité ;

Aux variables et aux inconnues des cotes quatrièmes toutes nulles, à l'exception de y qui aura pour cote quatrième l'unité ;

Etc. ;

Finalement, aux variables et aux inconnues des cotes $(h+1)^{\text{ièmes}}$ toutes nulles, à l'exception de l'avant-dernière variable s, qui aura pour cote $(h+1)^{\text{ième}}$ l'unité.

Car toute dérivée postérieure à une autre est alors normale vis-à-vis de cette autre, et les inconnues elles-mêmes le sont évidemment vis-à-vis d'une dérivée quelconque.

II. Pour démontrer la proposition dont l'énoncé figure en tête du présent nº 215, nous adopterons pour les variables, et aussi pour les inconnues engagées dans le système proposé, S, un ordre déterminé, et nous attribuerons des cotes à toutes ces quantités, conformément aux indications données dans l'alinéa I. Considérant alors la suite taxique, nous chercherons quel est, dans cette suite, le terme le plus éloigné (vers la gauche) qui figure *effectivement* dans les équations du système, nous résoudrons par rapport au terme dont il s'agit l'une des équations où il figure, et nous en porterons la valeur dans les équations restantes : nous aurons ainsi, outre la formule de résolution, un nouveau système, S′, contenant une équation de moins que le proposé, et dans lequel ne figure plus la dérivée éliminée ni aucune des dérivées situées à sa gauche dans la suite taxique. Nous considérerons, parmi les dérivées restantes, la plus éloignée (vers la gauche) de celles qui figurent *effectivement* dans S′, nous résoudrons par rapport à elle l'une des équations de S′ où elle figure, et nous en porterons la valeur dans les équations restantes, ce qui nous donnera, outre les deux formules successives de résolution, un troisième système contenant deux équations de moins que le proposé. Et ainsi de suite. En d'autres termes, nous déduirons des équations données, par résolutions successives, des formules dont les premiers membres se trouvent rangés suivant l'ordre taxique, et, en poursuivant ce calcul jusqu'à ce que les équations non encore résolues ne contiennent plus aucune dérivée, nous tomberons sur un système composé de deux groupes, l'un différentiel, l'autre fini. Si le groupe fini, résolu par rapport aux fonctions inconnues successives, ne nous conduit pas à une relation non identique entre les seules variables indépendantes, auquel cas le système proposé serait analytiquement impossible, il nous permettra d'exprimer certaines des fonctions inconnues à l'aide des autres et des variables indépendantes, et par suite aussi les dérivées des premières en fonctions composées différentielles des

secondes. Le groupe différentiel pourra alors être transformé en un système d'ordre au plus égal à S, et qui sera de même nature que S, avec cette différence que le nombre des fonctions inconnues s'y trouvera diminué, ainsi que le nombre des équations. Sur ce système on opérera comme sur le proposé, et ainsi de suite. Finalement, et sauf la rencontre d'une relation non identique entre les seules variables indépendantes, le système proposé se trouvera remplacé par un groupe différentiel exclusivement composé de relations normales, et par quelques groupes finis. Si, dans chacun de ces derniers, on tient compte de ceux qui ont été obtenus après lui, on voit que leur ensemble exprime quelques-unes des fonctions inconnues à l'aide des variables indépendantes et des fonctions inconnues restantes. Celles-ci sont seules impliquées dans le groupe différentiel, que l'on peut, en vertu d'un lemme antérieur (n° 214, V), remplacer par un système taxique, $\mathfrak{T}$, composé d'un nombre égal d'équations ayant respectivement les mêmes premiers membres.

Si le système $\mathfrak{T}$ n'est point passif, on considérera, parmi les conditions de passivité, celles qui ne se réduisent pas à des identités, et l'on observera qu'elles constituent autant de relations auxquelles les intégrales du proposé doivent nécessairement satisfaire (n° 112). De ces relations on déduira alors, par résolutions successives, des formules dont les premiers membres se trouvent rangés suivant l'ordre taxique; si, une fois ces formules obtenues, les conditions de passivité ne fournissent en outre aucune relation finie, on adjoindra au système $\mathfrak{T}$ les formules dont il vient d'être question, et l'on substituera au système total ainsi formé, où les équations sont toutes normales, un système taxique, $\mathfrak{T}'$, composé d'un nombre égal d'équations ayant respectivement les mêmes premiers membres. Si le système $\mathfrak{T}'$ n'est pas passif, on le traitera comme le système $\mathfrak{T}$, et, sauf la rencontre d'un système passif, on continuera ainsi tant que les systèmes $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, ... successivement obtenus ne fourniront, par la résolution de leurs conditions de passivité, aucune relation finie. Si, à un moment donné, on tombe sur un système non passif où cette circonstance cesse d'être réalisée, on considérera le groupe différentiel et le groupe fini déduits des conditions de passivité; du groupe fini, supposé possible, on tirera (n° 142) un certain nombre des fonctions inconnues exprimées à l'aide des variables indépendantes et des autres fonctions inconnues, et le système dont il s'agit, préalablement augmenté du

groupe différentiel, pourra, grâce aux formules résultantes, être transformé en un système de même nature que S, mais impliquant moins de fonctions inconnues encore que n'en impliquait le système $\mathfrak{T}$.

Sur le système résultant, on recommencera à nouveau toutes les opérations successives précédemment exécutées sur S, et ainsi de suite. Or il est facile de voir que l'application d'un pareil mécanisme conduit forcément soit à une impossibilité, soit à un système passif, soit à l'élimination complète des dérivées. Effectivement, dans l'hypothèse contraire, elle ne pourrait manquer de conduire à un système taxique non passif qui, traité comme l'a été tout à l'heure le système $\mathfrak{T}$, engendrerait, sans réduction ultérieure du nombre des fonctions inconnues, une suite *illimitée* de systèmes également taxiques et non passifs. En comparant entre eux deux systèmes consécutifs de cette dernière suite, on trouverait dans le second deux groupes : l'un composé d'équations en nombre égal à celles du premier système et ayant respectivement les mêmes premiers membres ; l'autre résolu par rapport à des dérivées paramétriques du premier. En vertu d'un lemme antérieur (n° 214, VI), toutes les dérivées (d'ordre positif) des fonctions inconnues finiraient donc par devenir principales, et les conditions de passivité ne fourniraient plus alors que des relations finies ; on serait donc conduit, contrairement à ce qui précède, soit à une impossibilité, soit à une réduction du nombre des fonctions inconnues (n° 142).

Finalement donc, et sauf la rencontre d'une relation non identique entre les seules variables indépendantes, indiquant l'impossibilité, le système proposé se trouve remplacé par un système complètement intégrable composé de deux groupes, savoir : 1° un groupe *taxique* passif, où se trouvent engagées certaines des inconnues du système proposé ; 2° un groupe de relations finies exprimant les inconnues restantes à l'aide de celles du premier groupe. D'ailleurs, ainsi qu'il résulte de lemmes établis ci-dessus (n° 214), toutes les opérations successivement exécutées sur le système primitif sont de nature telle, que le système final prolongé équivaut numériquement au système primitif prolongé ; et cette équivalence numérique entre les systèmes prolongés entraîne, comme nous l'avons fait observer (n° 214, I), l'équivalence analytique entre les systèmes eux-mêmes.

216. Voici un mode de réduction analogue au précédent, mais plus général.

I. *En désignant par* K *un entier positif donné, et par* u, v, w, ... *diverses fonctions inconnues des variables indépendantes* x, y, z, ..., *on peut attribuer à*

$$x,\quad y,\quad z,\quad \ldots,\quad u,\quad v,\quad w,\quad \ldots$$

des cotes,

$$c_x,\quad c_y,\quad c_z,\quad \ldots,\quad c_u,\quad c_v,\quad c_w,\quad \ldots,$$

choisies de telle façon, que, dans l'ensemble des ordres 0, 1, 2, ..., K, *les dérivées de* u, v, w, ... *aient des cotes toutes distinctes entre elles.*

Il suffit pour cela que, la dernière des quantités c_x, c_y, c_z, ... étant supposée positive, on ait les relations

$$c_x > \mathrm{K} c_y,\qquad c_y > \mathrm{K} c_z,\qquad \ldots,$$
$$c_u > c_v + \mathrm{K} c_x,\qquad c_v > c_w + \mathrm{K} c_x,\qquad \ldots.$$

Considérons en effet deux dérivées pour chacune desquelles l'ordre total, positif ou nul, soit au plus égal à K, et supposons d'abord qu'elles appartiennent à la même fonction. En pareil cas, la différence de leurs cotes est visiblement

$$(10)\qquad (\alpha-\alpha')c_x + (\beta-\beta')c_y + (\gamma-\gamma')c_z + \ldots,$$

où α, β, γ, ..., α', β', γ', ... désignent les ordres partiels respectifs en x, y, z, ... des deux dérivées considérées ; d'ailleurs les quantités $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$, ... ne sont pas toutes nulles, et l'on peut toujours supposer, en renversant, s'il le faut, le sens de la différence (10), que la première d'entre elles qui ne s'annule pas est positive. Si l'on a $\alpha-\alpha' > 0$, la quantité (10) est au moins égale à

$$c_x - (\beta' c_y + \gamma' c_z + \ldots),$$

à plus forte raison à

$$c_x - (\beta' + \gamma' + \ldots) c_y,$$

différence nécessairement positive, puisque son terme additif est supérieur à $\mathrm{K} c_y$, et son terme soustractif au plus égal à cette quantité. Si l'on a

$$\alpha-\alpha' = 0,\qquad \beta-\beta' > 0,$$

la quantité (10) est au moins égale à

$$c_y - (\gamma' c_z + \ldots),$$

à plus forte raison à

$$c_y - (\gamma' + \ldots) c_z,$$

différence encore positive, puisque son terme additif est supérieur à Kc_z, et son terme soustractif au plus égal à cette quantité. Et ainsi de suite.

Supposons maintenant que les deux dérivées considérées appartiennent à deux fonctions distinctes. En nommant c et c' les cotes respectives, nécessairement inégales, de ces deux fonctions, et α, β, γ, ..., α', β', γ', ... les ordres partiels respectifs des deux dérivées par rapport à $x, y, z, \ldots$, les cotes de ces dernières auront pour différence

$$c - c' + (\alpha - \alpha') c_x + (\beta - \beta') c_y + (\gamma - \gamma') c_z + \ldots.$$

Or, si l'on suppose $c - c' > 0$, ce qui est évidemment permis, l'expression précédente est au moins égale à

$$(c - c') - (\alpha' c_x + \beta' c_y + \gamma' c_z + \ldots),$$

à plus forte raison à

$$(c - c') - (\alpha' + \beta' + \gamma' + \ldots) c_x,$$

différence nécessairement positive, puisque son terme additif est supérieur à Kc_x, et son terme soustractif au plus égal à cette quantité.

II. Supposons actuellement que les variables x, y, z, ... et les fonctions u, v, w, ... aient été affectées chacune de p cotes, comme dans la définition des systèmes orthonomes (n° 104); considérons alors certaines dérivées, d'ordre positif ou nul, et en nombre limité, de ces fonctions; partageons-les, de gauche à droite, en groupes successifs d'après les valeurs décroissantes de leurs cotes premières, puis les dérivées de chaque groupe en sous-groupes successifs d'après les valeurs décroissantes de leurs cotes secondes, puis à leur tour les dérivées de chaque sous-groupe en sous-groupes partiels successifs d'après les valeurs décroissantes de leurs cotes troisièmes, et ainsi jusqu'à épuisement des p cotes. De cette opération résultera finalement une suite de groupes.

Cela étant, si quelqu'un des groupes définitifs ainsi obtenus contient plus d'un terme, on peut toujours, puisque l'ordre maximum des dérivées considérées est, d'après notre hypothèse même, essen-

tiellement fini, attribuer à chacune des variables et des inconnues une cote $(p+1)^{\text{ième}}$ telle, que toutes les dérivées considérées, et à plus forte raison celles d'entre elles qui appartiennent à un même groupe, aient des cotes $(p+1)^{\text{ièmes}}$ toutes distinctes entre elles (I) ; on pourra alors, *sans modifier l'ordre relatif des groupes,* fractionner chacun d'eux, de gauche à droite, d'après les valeurs décroissantes des cotes $(p+1)^{\text{ièmes}}$ de ses termes. Les dérivées considérées (d'ordre positif ou nul) se trouveront donc, en définitive, rangées dans un ordre tel, *que chacune d'elles soit normale par rapport à toutes les quantités situées à sa gauche :* nous exprimerons cette dernière propriété en disant qu'elles sont *normalement isolées.*

III. Ces préliminaires posés, désignons par A le système différentiel donné, que nous nous proposons de réduire à une forme complètement intégrable.

Nous commencerons par attribuer aux variables et aux inconnues qui s'y trouvent engagées des *cotes premières* assujetties à la seule restriction que celles des variables indépendantes soient toutes égales à 1. Puis, désignant par γ la plus petite des cotes premières attribuées aux inconnues, et considérant l'ensemble formé par les dérivées, d'ordres positifs ou nuls, de ces inconnues, nous supposerons écrits, sur une ligne indéfinie allant de droite à gauche, d'abord l'ensemble de toutes les dérivées (d'ordre évidemment égal à zéro) dont la cote première est γ, puis à gauche de celui-ci l'ensemble de toutes les dérivées de cote première $\gamma+1$, puis à gauche de ce dernier l'ensemble de toutes les dérivées de cote première $\gamma+2$, et ainsi de suite indéfiniment. Cela posé, soient Γ la cote première maxima des dérivées (d'ordre positif ou nul) qui figurent *effectivement* dans A, et $[\Gamma]$ la portion de la suite précédente formée par les diverses dérivées dont la cote première ne surpasse pas Γ : en attribuant, s'il le faut, aux variables et aux inconnues des cotes secondes convenablement choisies, nous isolerons normalement, sans modifier l'ordre relatif des groupes composants (II), les termes de la suite limitée $[\Gamma]$; nous chercherons alors quel est, dans cette suite, le terme le plus éloigné (vers la gauche) qui figure *effectivement* dans les équations du système, puis, résolvant par rapport au terme dont il s'agit l'une des équations où il figure, nous en porterons la valeur dans les équations restantes : nous aurons ainsi, outre la formule de résolution, un nou-

veau système, B, contenant une équation de moins que le proposé, et où ne figure plus la quantité éliminée, ni aucune des quantités situées à sa gauche dans la suite [Γ]. Nous considérerons, parmi les quantités restantes de cette suite, la plus éloignée (vers la gauche) de celles qui figurent *effectivement* dans B, nous résoudrons par rapport à elle l'une des équations de B où elle figure, et nous en porterons la valeur dans les équations restantes, ce qui nous donnera, outre les deux formules successives de résolution, un troisième système contenant deux équations de moins que le proposé. Et ainsi de suite. Si ce calcul de résolutions successives ne nous conduit pas à une relation non identique entre les seules variables indépendantes, auquel cas le système proposé serait analytiquement impossible, il nous conduira à un système $\mathfrak{U}$, composé de relations toutes normales.

Cela étant, le système $\mathfrak{U}$ sera, conformément à un lemme antérieur (n° 214, V), remplacé par un système composé de relations en même nombre et ayant respectivement les mêmes premiers membres, mais dont les seconds membres, indépendants de toute quantité anormale, le soient aussi de toute quantité principale. Dans ce dernier système, les inconnues pourront se partager en deux groupes, σ, τ, et les équations en trois groupes, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$, satisfaisant aux conditions suivantes : le groupe $\mathfrak{s}$ aura pour premiers membres les inconnues σ, le groupe $\mathfrak{S}$ certaines dérivées, d'ordre positif, des mêmes inconnues σ, et le groupe (orthonome) $\mathfrak{T}$ certaines dérivées, d'ordre positif, des inconnues τ ; quant aux seconds membres de toutes ces équations, ils ne contiendront, avec les variables indépendantes, que des dérivées paramétriques, d'ordre positif ou nul, des inconnues τ. On éliminera alors du groupe $\mathfrak{S}$, à l'aide des équations $\mathfrak{s}$ différentiées, les dérivées des inconnues σ, puis du groupe résultant, à l'aide des équations $\mathfrak{T}$, les premiers membres de ces équations mêmes ; le groupe $\mathfrak{S}$ se trouvera ainsi transformé en un groupe A_1, indépendant des inconnues σ et de leurs dérivées, et ne contenant, parmi les inconnues τ et leurs dérivées, aucune quantité dont la cote première surpasse Γ, ni aucun des premiers membres de $\mathfrak{T}$. Sur le système A_1 on opérera des résolutions successives, comme on l'a fait sur le système A, et, sauf constatation éventuelle d'incompatibilité, les formules de résolution successive seront adjointes à $\mathfrak{T}$; de cette adjonction résultera un système $\mathfrak{U}_1$, composé de relations toutes normales, et où ne se trouvent engagées que les inconnues τ.

Sur le système $\mathfrak{U}_1$ on opérera comme on vient de le faire sur le système $\mathfrak{U}$, et ainsi de suite. Finalement, et sauf la rencontre d'une relation non identique entre les seules variables indépendantes, le système proposé se trouvera remplacé par une suite de groupes, dont le dernier sera orthonome, tandis que tous les précédents auront leurs premiers membres finis. Cet ensemble de formules, toutes normales, fournira, moyennant application d'un lemme antérieur (n° 214, V), un système composé de deux groupes, savoir : 1° un groupe orthonome, $\mathfrak{O}$, où se trouvent engagées certaines des inconnues du système proposé ; 2° un groupe $\mathfrak{f}$, exprimant les inconnues restantes à l'aide des variables indépendantes, des inconnues du groupe $\mathfrak{O}$, et des dérivées paramétriques de celles-ci.

Si le groupe orthonome $\mathfrak{O}$ est passif, il est clair que le système ($\mathfrak{f}$, $\mathfrak{O}$), auquel on a réduit le proposé, est complètement intégrable. Si le groupe $\mathfrak{O}$ n'est point passif, on observera que ses conditions de passivité, P, constituent autant de relations auxquelles les intégrales du proposé doivent nécessairement satisfaire (n° 112). Deux cas peuvent alors se présenter, suivant que la cote première maxima des quantités (inconnues ou dérivées) figurant *effectivement* dans les relations P ne surpasse pas l'entier Γ, ou qu'elle le surpasse. Dans le premier cas, les quantités (inconnues ou dérivées) figurant *effectivement* dans le système ($\mathfrak{f}$, $\mathfrak{O}$, P) sont toutes contenues dans la suite [Γ], dont les termes se trouvent déjà normalement isolés à l'aide des cotes antérieurement attribuées aux variables et aux inconnues. Dans le second cas, en désignant par Γ′ un certain entier supérieur à Γ, ces mêmes quantités sont toutes contenues, non plus dans la suite [Γ], mais dans la suite analogue et plus étendue [Γ′], et *il peut arriver* que, dans la portion de cette suite située à gauche de [Γ], la considération des cotes antérieures ne suffise pas à isoler normalement les dérivées ; mais alors, en adjoignant aux cotes antérieures de chaque variable ou inconnue une cote nouvelle convenablement choisie, on pourra faire en sorte que l'isolement, déjà réalisé dans la portion [Γ] de la suite [Γ′], le soit en outre dans la portion restante. Quelle que soit donc l'occurrence qui se présente, en désignant par Γ′ un certain entier supérieur ou égal à Γ, et adjoignant au besoin des cotes supplémentaires à celles qui existent déjà, on pourra, sans déranger l'ordre déjà adopté pour les termes de [Γ], écrire les termes de la suite [Γ′], qui comprend [Γ], dans un ordre tel que chacune des quantités qu'elle

contient soit normale par rapport à toutes celles qui se trouvent à sa gauche. Cela posé, on considérera le système ($\mathfrak{f}$, $\mathfrak{O}$, P), et l'on recommencera sur lui la suite des opérations précédemment exécutées sur le système donné A, avec cette seule différence que les résolutions successives du début se trouveront simplifiées, et que, par suite de la nature normale des relations $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{O}$, elles devront être exécutées seulement sur le groupe P. Cette suite d'opérations conduira, sauf la rencontre d'une relation non identique entre les seules variables indépendantes, à remplacer le système ($\mathfrak{f}$, $\mathfrak{O}$, P) par un autre composé de deux groupes, savoir : 1° nn groupe orthonome, $\mathfrak{O}'$, où se trouvent engagées certaines des inconnues du système $\mathfrak{O}$; 2° un groupe, $\mathfrak{f}'$, exprimant les inconnues restantes du système $\mathfrak{O}$ et les premiers membres de $\mathfrak{f}$ à l'aide des variables indépendantes, des inconnues du groupe $\mathfrak{O}'$, et des dérivées paramétriques de celles-ci. Si le groupe orthonome $\mathfrak{O}'$ est passif, le système ($\mathfrak{f}'$, $\mathfrak{O}'$), auquel se trouve ramené le proposé, est complètement intégrable. Dans le cas contraire, on opérera sur lui comme on l'a fait précédemment sur ($\mathfrak{f}$, $\mathfrak{O}$). Et ainsi de suite.

Or, il est facile de voir que l'application d'un pareil mécanisme conduit forcément : soit à une relation non identique entre les seules variables indépendantes, indiquant l'impossibilité analytique ; soit à un système complètement intégrable contenant, avec un groupe orthonome, des formules où figurent, comme premiers membres, les inconnues non engagées dans le groupe orthonome. Effectivement, dans l'hypothèse contraire, la suite

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{O}), \quad (\mathfrak{f}', \mathfrak{O}'), \quad \ldots$$

serait *illimitée,* et les groupes orthonomes $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{O}'$, ... rempliraient, *à partir d'un rang suffisamment éloigné,* la double condition suivante : 1° ils impliqueraient tous les mêmes fonctions inconnues ; 2° en considérant deux groupes orthonomes consécutifs, $\mathfrak{O}^{(k)}$, $\mathfrak{O}^{(k+1)}$, les équations du second, $\mathfrak{O}^{(k+1)}$, seraient en nombre supérieur à celles du premier, $\mathfrak{O}^{(k)}$, et auraient pour premiers membres : d'une part les premiers membres de $\mathfrak{O}^{(k)}$, d'autre part certaines dérivées paramétriques de $\mathfrak{O}^{(k)}$. En vertu d'un lemme antérieur (n° 214, VI), toutes les dérivées d'ordre positif des inconnues impliquées dans les groupes orthonomes finiraient donc par devenir principales, et les conditions de passivité ne fourniraient plus alors que des relations

d'ordre zéro ; on serait donc conduit, contrairement à ce qui précède, soit à une relation non identique entre les seules variables indépendantes, soit à une diminution du nombre des inconnues engagées dans les groupes orthonomes.

Finalement donc, et sauf le cas d'impossibilité, le système proposé se trouve remplacé par un système complètement intégrable composé de deux groupes, savoir : 1° un groupe *orthonome* passif où se trouvent engagées certaines des inconnues du système proposé; 2° un groupe de relations exprimant les inconnues restantes à l'aide des variables indépendantes, des inconnues du premier groupe, et des dérivées paramétriques de celles-ci. D'ailleurs, ainsi qu'il résulte du n° 214, toutes les opérations successivement effectuées sur le système primitif sont de nature telle que *le système final prolongé équivaut numériquement au système primitif prolongé ;* et cette équivalence numérique entre les systèmes prolongés entraîne, comme nous l'avons fait observer, l'équivalence analytique entre les systèmes eux-mêmes ([1]).

217. Nous terminerons ce paragraphe par l'exposé de deux propriétés générales qui nous paraissent intéressantes au point de vue théorique ([2]).

I. *Pour qu'un système différentiel* (*limité*), S, *soit analytiquement possible* (n° 214, 1), *il faut et il suffit que le système* S *prolongé soit numériquement possible.*

De ce que nous avons dit au n° 99, il résulte déjà que la condition est nécessaire.

Elle est d'ailleurs suffisante.

Supposons, en effet, que le système S prolongé soit numériquement possible : cela étant, l'application au système S de la méthode exposée au n° 215 ou 216 ne peut, comme nous allons le prouver, conduire à aucune relation non identique entre les seules variables

---

([1]) On peut imaginer des modes de réduction plus généraux encore. *Voir* à ce sujet le Mémoire ayant pour titre : *Sur le degré de généralité d'un système différentiel quelconque* (*Acta mathematica,* t. XXV).

([2]) *Voir* le Mémoire ayant pour titre : *Sur le degré de généralité d'un système différentiel quelconque* (*Acta mathematica,* t. XXV).

$x, y, \ldots$. Effectivement, une semblable relation,

$$F(x, y, \ldots) = 0, \tag{11}$$

où le premier membre est supposé non identiquement nul, appartiendrait, en vertu de nos raisonnements, à un système, Ψ, jouissant de cette propriété, que Ψ prolongé équivaudrait numériquement à S prolongé, et, par suite, que Ψ prolongé serait numériquement possible : or, si l'équation (11) et toutes celles qui s'en déduisent par différentiations étaient vérifiées par quelque système de valeurs particulières de $x, y, \ldots$, la fonction $F(x, y, \ldots)$ serait identiquement nulle (n° 57), ce qui est contraire à l'hypothèse.

Puisqu'on ne peut, d'après cela, tomber sur une relation non identique entre les seules variables $x, y, \ldots$, on sera forcément conduit à un système complètement intégrable.

II. *Pour que deux systèmes différentiels* (*limités*), S, S′, *soient analytiquement équivalents* (n° 214, I), *il faut et il suffit que les deux systèmes*

S prolongé, S′ prolongé

soient numériquement équivalents.

Nous avons déjà observé, à l'alinéa I du n° 214, que la condition est suffisante.

Elle est d'ailleurs nécessaire.

Effectivement, si S et S′ sont analytiquement impossibles, S prolongé et S′ prolongé sont numériquement impossibles (I), et, par suite, numériquement équivalents.

Supposons S et S′ analytiquement possibles et équivalents : je dis que toute solution numérique de S prolongé est aussi une solution numérique de S′ prolongé. Appliquons, en effet, au système S la réduction exposée au n° 216, en attribuant, pour simplifier, aux diverses fonctions inconnues des cotes premières toutes égales entre elles : nous tomberons ainsi sur un système complètement intégrable, Σ, où toute relation ultime [1] sera, à cause de sa nature normale, d'ordre exactement égal à celui de son premier membre ; les trois sys-

[1] Nous entendons par *relations ultimes* celles qui expriment les quantités principales à l'aide des variables indépendantes et des quantités paramétriques.

tèmes S, S', Σ seront analytiquement équivalents, les systèmes

S prolongé, Σ prolongé

numériquement équivalents, et, en conséquence, il nous suffira d'établir que toute solution numérique de Σ prolongé est également une solution numérique de S' prolongé. Prenons donc dans S' prolongé une relation quelconque s', désignons par m son ordre, puis, à la solution numérique considérée de Σ prolongé substituons celle où les variables $x, y, \ldots$ et les quantités paramétriques d'ordres 0, 1, 2, ..., m du système Σ ont respectivement les mêmes valeurs, tandis que les quantités paramétriques des ordres supérieurs à m ont pour valeur commune zéro : les quantités principales d'ordres 0, 1, 2, ..., m du système Σ conservent alors, elles aussi, en vertu des relations ultimes, les mêmes valeurs numériques, en sorte que la solution numérique primitivement considérée de Σ prolongé se trouve remplacée par une autre qui jouit des deux propriétés suivantes : 1° les variables $x, y, \ldots$ et toutes les quantités, principales et paramétriques, des ordres 0, 1, 2, ..., m ont conservé respectivement les mêmes valeurs numériques ; 2° la nouvelle solution numérique de Σ prolongé donne certainement lieu à des développements convergents, et fournit une solution analytique de Σ. Cela étant, puisqu'elle fournit une solution analytique de Σ, elle en fournit une de S', analytiquement équivalent à Σ, donc elle vérifie numériquement S' prolongé; il en résulte que la solution numérique primitive vérifie, parmi les relations de S' prolongé, celles au moins dont l'ordre ne dépasse pas m, et en particulier la relation s', arbitrairement choisie dans S' prolongé.

Ainsi, nous avons prouvé que toute solution numérique de S prolongé est en même temps une solution numérique de S' prolongé ; on prouverait de même la réciproque.

Comparaison entre les degrés de généralité de deux formes passives provenant d'un même système différentiel.

218. Supposons que, dans un système différentiel passif, on ait fixé, par un procédé quelconque, l'économie des conditions initiales, ce qui met en évidence diverses fonctions (ou constantes) arbitraires en nombre fini. Cela étant, nommons *arbitraire de genre h* toute fonction arbitraire de h variables (les constantes arbitraires sont,

d'après cette définition, des arbitraires de genre zéro); puis, désignons par λ le genre maximum des arbitraires qui figurent dans ces conditions initiales, et appelons μ le nombre des arbitraires qui, parmi elles, sont de genre λ. On voit immédiatement que le nombre des arbitraires restantes peut être augmenté au delà de toute limite : si l'on désigne, en effet, par n un entier positif aussi grand qu'on le voudra, et par x_0 une valeur initiale de x, toute fonction arbitraire, $\Phi(x, y, \ldots, z)$, des p variables $x, y, \ldots, z$ peut être mise sous la forme

$$\psi_0(y, \ldots, z) + (x - x_0)\psi_1(y, \ldots, z) + (x - x_0)^2 \psi_2(y, \ldots, z) + \ldots$$
$$+ (x - x_0)^{n-1} \psi_{n-1}(y, \ldots, z) + (x - x_0)^n \Psi(x, y, \ldots, z),$$

où figurent, avec une arbitraire de genre p,

$$(1) \qquad \Psi(x, y, \ldots, z),$$

n arbitraires de genre $p - 1$,

$$(2) \qquad \psi_0(y, \ldots, z), \quad \psi_1(y, \ldots, z), \quad \psi_2(y, \ldots, z), \quad \ldots, \quad \psi_{n-1}(y, \ldots, z);$$

en conséquence, la donnée de la fonction arbitraire $\Phi(x, y, \ldots, z)$ équivaut visiblement à celle des fonctions arbitraires (1) et (2).

Considérons maintenant un système différentiel quelconque, supposons-le réduit, de diverses manières, à une forme passive, et comparons, dans ces diverses formes, le nombre et la nature des éléments arbitraires que l'économie des conditions initiales met en évidence : il est clair, d'après ce qui précède, que les résultats intéressants d'une semblable comparaison ne peuvent se rapporter qu'aux valeurs prises, dans les formes considérées, par les entiers λ et μ. Nous allons, dans ce qui suit, établir à ce sujet une loi générale.

219. Étant donné un système différentiel, S, résolu par rapport à diverses dérivées (d'ordres positifs ou nuls) des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, si, dans les déterminations initiales des intégrales hypothétiques, on considère tous les coefficients comme arbitraires, ces déterminations initiales schématiques peuvent, comme nous l'avons établi, se représenter par des sommes schématiques irréductibles (n[os] 81 et 90). Pour un même système, S, il existe presque toujours diverses manières de représenter, à l'aide de pareilles sommes, l'ensemble des déterminations initiales : considérant l'une quelconque

des représentations dont il s'agit, nous désignerons d'une manière générale par λ le genre maximum des arbitraires qui y figurent, et par μ le nombre de celles dont le genre est λ.

Cela posé, il est facile de se convaincre que, *pour un même système*, S, *les nombres* λ *et* μ *gardent des valeurs constantes, quelque choix qu'on fasse parmi les représentations diverses dont nous venons de parler.*

I. *Un polynome entier en x, à coefficients réels, et où le terme de degré maximum a un coefficient positif, reste positif pour x infini positif.*

Si le polynome est de degré zéro, il se réduit à une constante positive, et la proposition est évidente.

S'il est de degré (effectif) supérieur à zéro, on peut, en désignant par m ce degré et par A_0, A_1, ..., A_{m-1}, A_m diverses constantes, dont la première, A_0, est positive, l'écrire sous la forme

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

ou

$$x^m \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{A_m}{x^m} \right),$$

produit dont le second facteur tend vers A_0 pour x infini.

De là résulte immédiatement la conséquence suivante :

Soient $P(x)$, $Q(x)$ *deux polynomes entiers en x à coefficients réels, et dans chacun desquels le terme de degré maximum a un coefficient positif :* cela étant, *si* $P(x)$ *est de degré supérieur à* $Q(x)$, *ou bien encore s'il est de même degré, mais que le terme de degré maximum y ait un coefficient plus grand, on finit par avoir, pour x infini positif,*

$$P(x) > Q(x).$$

Il suffit, pour s'en convaincre, d'appliquer la conclusion précédente au polynome

$$P(x) - Q(x).$$

II. Revenons à la proposition qu'il s'agit d'établir.

Dans l'une quelconque des représentations dont parle l'énoncé, la détermination initiale d'une inconnue quelconque, w, se trouve

figurée, conformément à ce que nous avons dit au début, par la somme (irréductible) d'un nombre limité de termes dont chacun a la forme

$$(3)\qquad (x-x_0)^a(y-y_0)^b\ldots F,$$

a, b, ... étant des entiers positifs ou nuls, et F une fonction arbitraire de quelques-unes des variables. Si l'on désigne par g la somme $a+b+\ldots$, par k un entier positif quelconque, et qu'on suppose l'arbitraire F développée, à partir des valeurs initiales des variables dont elle dépend, en une série entière par rapport à leurs accroissements, les seuls termes du développement en question auxquels corresponde une quantité paramétrique d'ordre inférieur ou égal à k sont évidemment ceux qui présentent, par rapport à l'ensemble des accroissements, un degré inférieur ou égal à $k-g$. D'après cela, pour obtenir le nombre, ${}^{(k)}\mathrm{P}$, des dérivées paramétriques du système S dont l'ordre (positif ou nul) ne surpasse pas k, on évaluera, dans F développé, le nombre des termes dont le degré ne surpasse pas $k-g$, ce qui donne [1], en désignant par r le genre de l'arbitraire F,

$$(4)\qquad \frac{(k-g+1)(k-g+2)\ldots(k-g+r)}{1.2\ldots r};$$

on répétera, pour chacun des termes dont la somme représente schématiquement la détermination initiale de ϖ, le calcul auquel donne lieu l'expression (3), on opérera pour chacune des inconnues comme il vient d'être dit pour ϖ, et l'on ajoutera finalement tous les résultats obtenus. Il est essentiel de remarquer ici que *l'expression* (4) *est un polynome entier en k ayant pour terme de degré maximum* $\dfrac{k^r}{1.2\ldots r}$.

Cela posé, considérons, dans le système S, deux représentations de l'ensemble des déterminations initiales schématiques, et désignons par λ', μ' et λ'', μ'' les valeurs de λ, μ qui s'y rapportent respective-

---

(1) On sait que le nombre des termes d'un polynome complet de degré q à h variables est donné par la formule

$$\frac{(q+1)(q+2)\ldots(q+h)}{1.2\ldots h}.$$

ment. On a nécessairement $\lambda' = \lambda''$: car autrement le nombre ${}^{(k)}P$ serait, quelque grand que soit k, indifféremment exprimé par deux polynomes entiers en k de degrés différents. Et, cela étant, on ne peut manquer d'avoir aussi $\mu' = \mu''$: car autrement le nombre ${}^{(k)}P$ serait, quelque grand que soit k, indifféremment exprimé par deux polynomes entiers en k de même degré où les termes de degré maximum auraient des coefficients différents.

220. Un système différentiel quelconque étant donné, lorsque nous considérerons une des formes passives auxquelles on peut le réduire, nous supposerons toujours, conformément à ce qui a été constaté dans les nos 215 et 216, que *la forme passive prolongée équivaut numériquement au système primitif prolongé,* et, par suite, que *si deux formes passives proviennent d'un même système différentiel, ces deux formes prolongées sont numériquement équivalentes l'une à l'autre.*

Considérons maintenant, en même temps qu'une forme passive, le groupe illimité des formules qui donnent la solution numérique générale de cette forme prolongée, et où les quantités principales se trouvent, comme nous l'avons vu dans la définition de la passivité (n° 101), exprimées à l'aide des variables indépendantes et des quantités paramétriques. Cela étant, nous dirons qu'une forme passive est *ordinaire,* si, en attribuant à chacune des variables indépendantes une cote (unique) égale à 1 et à chacune des fonctions inconnues une cote (unique) convenablement choisie, les formules dont il s'agit satisfont toutes, sauf un nombre essentiellement limité d'entre elles, à la condition que le second membre de chacune ait une cote au plus égale à celle du premier membre correspondant [1]. Telles sont, par exemple, les formes complètement intégrables indiquées dans nos théorèmes d'existence (Chap. VII, X et XII).

221. *Si l'on réduit à une forme passive ordinaire* (n° 220) *un système différentiel donné quelconque* (*non impossible*), *les*

[1] On n'augmenterait pas la généralité de cette définition, si, au lieu d'assujettir la cote commune des variables indépendantes à être égale à 1, on l'assujettissait simplement à être supérieure à zéro (et entière). *Voir* à ce sujet le Mémoire ayant pour titre : *Sur le degré de généralité d'un système différentiel quelconque* (*Acta mathematica,* t. XXV, p. 343, 344 et 345).

nombres λ et μ, définis au n° 219, ont des valeurs indépendantes du mode de réduction adopté.

Si l'on réduit ce même système à une forme passive quelconque, et qu'on désigne par L, M *les valeurs constantes de λ, μ qui se rapportent aux formes passives ordinaires, on a nécessairement, ou bien*

$$L - \lambda > 0,$$

ou bien

$$L - \lambda = 0, \qquad M - \mu > 0,$$

ou bien enfin

$$L - \lambda = 0, \qquad M - \mu = 0.$$

I. Considérons un système différentiel résolu par rapport à diverses dérivées (d'ordre positif ou nul) des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et présentant d'ailleurs une structure quelconque; attribuons ensuite aux variables $x, y, \ldots$ des cotes respectives toutes égales à 1, et aux inconnues u, v, ... les cotes respectives c_u, c_v, ... (arbitrairement choisies). Parmi les quantités (inconnues et dérivées) dont la cote ne surpasse pas un entier donné C, les unes sont principales, les autres paramétriques relativement au système donné : cela étant, proposons-nous d'évaluer le nombre de celles qui sont paramétriques.

En désignant par w l'une quelconque des inconnues u, v, ..., la détermination initiale schématique de w peut, comme on sait, se représenter par la somme (irréductible) d'un nombre limité de termes dont chacun a la forme

$$(5) \qquad (x - x_0)^a (y - y_0)^b \ldots F,$$

a, b, ... étant des entiers positifs ou nuls, et F une fonction arbitraire de quelques-unes des variables. Si l'on désigne par g la somme $a + b + \ldots$, et qu'on suppose l'arbitraire F développée, à partir des valeurs initiales des variables dont elle dépend, en une série entière par rapport à leurs accroissements, les seuls termes du développement en question auxquels corresponde une quantité paramétrique de cote inférieure ou égale à C sont évidemment ceux qui présentent, par rapport à l'ensemble des accroissements, un degré inférieur ou égal à $C - c_w - g$. D'après cela, pour obtenir le nombre cherché, on évaluera, dans F développé, le nombre des termes dont le degré ne surpasse pas $C - c_w - g$, ce qui donne, en désignant par r le genre

de l'arbitraire F,

$$(6)\qquad \frac{(C - c_w - g + 1)(C - c_w - g + 2)\ldots(C - c_w - g + r)}{1.2\ldots r};$$

on répétera, pour chacun des termes de la somme schématique qui représente la détermination initiale de w, le calcul auquel donne lieu l'expression (5), on opérera pour chacune des inconnues comme il vient d'être dit pour w, et l'on ajoutera finalement tous les résultats obtenus.

Observons que *l'expression* (6) *est un polynome entier en* C *ayant pour terme de degré maximum* $\frac{C^r}{1.2\ldots r}$.

II. Supposons maintenant qu'un système différentiel quelconque (non impossible) ait été mis d'abord sous une forme *passive ordinaire,* S′, puis sous une forme *passive* quelconque, S″; et soient λ', μ' et λ'', μ'' les valeurs de λ, μ qui correspondent respectivement à ces deux formes (n° 219). Je dis qu'*on a nécessairement, ou bien*

$$\lambda' - \lambda'' > 0,$$

ou bien

$$\lambda' - \lambda'' = 0, \qquad \mu' - \mu'' > 0,$$

ou bien enfin

$$\lambda' - \lambda'' = 0, \qquad \mu' - \mu'' = 0.$$

Effectivement, puisque la forme passive S′ est ordinaire, chacune des variables x, y, ... s'y trouve, conformément à notre définition du n° 220, affectée de la cote 1, et chacune des inconnues u, v, ... d'une cote convenablement choisie; et, si l'on considère alors les formules (résolues par rapport aux quantités principales de S′) qui donnent la solution numérique générale de S′ prolongé, toutes, sauf un nombre essentiellement limité d'entre elles, satisfont à la condition que le second membre de chacune ait une cote au plus égale à celle du premier membre correspondant.

Cela étant, convenons, soit qu'il s'agisse de S′, soit qu'il s'agisse de S″, d'évaluer la cote d'une quantité quelconque (inconnue ou dérivée) comme s'il s'agissait de S′. Soient, en outre :

$\mathfrak{U}'$ les formules (résolues par rapport aux quantités principales de S′) qui donnent la solution numérique générale de S′ prolongé;

$\mathfrak{U}''$ les formules (résolues par rapport aux quantités principales de S″) qui donnent la solution numérique générale de S″ prolongé;

C un entier (algébrique) donné;

${}^{(C)}P'$ le nombre des quantités paramétriques de S' dont la cote ne surpasse pas C, ${}^{(C)}N'$ le nombre des quantités principales de S' satisfaisant à cette même condition, et ${}^{(C)}\mathfrak{U}'$ le groupe, extrait de $\mathfrak{U}'$, qui a pour premiers membres ces quantités principales;

${}^{(C)}P''$, ${}^{(C)}N''$, ${}^{(C)}\mathfrak{U}''$ les objets analogues pour S''.

D'après ce qui a été dit plus haut sur les relations $\mathfrak{U}'$, le groupe ${}^{(C)}\mathfrak{U}'$, à partir de C suffisamment grand, ne contient *effectivement*, outre les variables indépendantes, que des quantités (inconnues ou dérivées) dont la cote ne surpasse pas C. D'ailleurs, $\mathfrak{U}'$ et $\mathfrak{U}''$ sont numériquement équivalents (*voir* l'observation faite au début du n° 220); il en résulte que ${}^{(C)}\mathfrak{U}'$ est une conséquence numérique de $\mathfrak{U}''$, et, par suite, que les relations ${}^{(C)}\mathfrak{U}'$ se transforment en identités quand on y tient compte des relations ${}^{(C)}\mathfrak{U}''$. Les systèmes ${}^{(C)}\mathfrak{U}'$, ${}^{(C)}\mathfrak{U}''$ étant réduits, le nombre des relations ${}^{(C)}\mathfrak{U}'$ est donc au plus égal à celui des relations ${}^{(C)}\mathfrak{U}''$ (n° 129), et l'on a, à partir de C suffisamment grand,

$${}^{(C)}N' \leqq {}^{(C)}N'';$$

comme on a d'ailleurs

$${}^{(C)}N' + {}^{(C)}P' = {}^{(C)}N'' + {}^{(C)}P'',$$

il en résulte évidemment

$${}^{(C)}P' \geqq {}^{(C)}P''.$$

Cela étant, on ne peut avoir $\lambda' < \lambda''$: car, s'il en était ainsi, les nombres ${}^{(C)}P'$ et ${}^{(C)}P''$, évalués conformément aux indications de l'alinéa I, seraient respectivement exprimés par deux polynomes entiers en C dont le premier serait de degré inférieur au second; à partir de C suffisamment grand, on aurait donc (n° 219, I), contrairement à ce qui précède,

$${}^{(C)}P' < {}^{(C)}P''.$$

Je dis, de plus, que, dans l'hypothèse $\lambda' = \lambda''$, on ne peut avoir $\mu' < \mu''$: car, s'il en était ainsi, les nombres ${}^{(C)}P'$ et ${}^{(C)}P''$ seraient respectivement exprimés par deux polynomes entiers de même degré en C, et le coefficient du terme de degré maximum serait plus petit pour le premier polynome que pour le second, ce qui entraînerait encore (n° 219, I), à partir de C suffisamment grand,

$${}^{(C)}P' < {}^{(C)}P''.$$

III. *Les nombres λ et μ gardent des valeurs constantes dans toutes les formes passives ordinaires auxquelles on peut réduire le système différentiel donné.*

Supposons en effet que les formes passives S′ et S″, considérées à l'alinéa précédent, soient l'une et l'autre ordinaires. Comme nous venons de le voir, on a nécessairement

$$\begin{aligned}&\text{ou bien}\quad \lambda'-\lambda''>0;\\ &\text{ou bien}\quad \lambda'-\lambda''=0,\qquad \mu'-\mu''>0;\\ &\text{ou bien}\quad \lambda'-\lambda''=0,\qquad \mu'-\mu''=0.\end{aligned}$$

En vertu du même raisonnement, fait en sens inverse, on a nécessairement aussi

$$\begin{aligned}&\text{ou bien}\quad \lambda''-\lambda'>0;\\ &\text{ou bien}\quad \lambda''-\lambda'=0,\qquad \mu''-\mu'>0;\\ &\text{ou bien}\quad \lambda''-\lambda'=0,\qquad \mu''-\mu'=0.\end{aligned}$$

Or, ces deux conclusions ne sont conciliables que si l'on a

$$\lambda'-\lambda''=0,\qquad \mu'-\mu''=0 \quad (^1).$$

222. Étant donnés deux systèmes *passifs*, S′, S″, désignons par λ', μ' et λ'', μ'' les valeurs de λ, μ qui s'y rapportent respectivement (n° 219), et convenons de dire que les formes passives S′, S″ ont un *degré de généralité égal*, si les deux différences

$$\lambda'-\lambda'',\qquad \mu'-\mu''$$

s'annulent à la fois ; convenons de dire, dans le cas contraire, que la forme S′ a un *degré de généralité supérieur* ou *inférieur* à celui de la forme S″, suivant que la première de ces deux différences qui ne s'annule pas est positive ou négative.

Il résulte immédiatement de cette convention que si l'on considère trois systèmes passifs, S′, S″, S‴, dont le premier soit plus général que le second, et le second plus général que le troisième, le premier ne peut manquer d'être plus général que le troisième. Désignons en

---

(1) Les valeurs constantes que gardent les nombres λ et μ dans les circonstances spécifiées à l'alinéa III sont d'ailleurs indépendantes du changement des variables et des inconnues. *Voir* à ce sujet le Mémoire ayant pour titre : *Sur le degré de généralité d'un système différentiel quelconque* (*Acta mathematica*, t. XXV, p. 348 et 349).

effet par

$$\lambda', \quad \mu'; \qquad \lambda'', \quad \mu''; \qquad \lambda''', \quad \mu'''$$

les valeurs de λ, μ qui se rapportent respectivement aux trois systèmes, et écrivons en un Tableau rectangulaire les différences

$$\begin{array}{ll} \lambda' - \lambda'', & \mu' - \mu'', \\ \lambda'' - \lambda''', & \mu'' - \mu''', \\ \lambda' - \lambda''', & \mu' - \mu'''; \end{array}$$

dans ce Tableau, le dernier nombre de chaque colonne verticale est la somme des deux nombres placés au-dessus de lui. En conséquence, si chacune des deux premières lignes horizontales possède la double propriété que les deux différences qu'elle contient ne s'annulent pas à la fois, et que la première d'entre elles non égale à zéro soit positive, la troisième ligne horizontale ne pourra manquer d'en jouir aussi.

Cela étant, la proposition du numéro précédent peut s'exprimer plus brièvement en disant que, *parmi toutes les formes passives sous lesquelles on peut mettre un système différentiel donné* (*non impossible*), *les formes passives ordinaires présentent un degré de généralité constant, qui se trouve être, de plus, supérieur ou égal à celui de toute autre.*

223. A notre proposition du n° 221, on peut ajouter la remarque suivante :

Considérons *deux formes passives ordinaires d'un même système différentiel,* et supposons *que, dans ces deux formes, les cotes des fonctions inconnues soient respectivement les mêmes :* cela étant, si l'on désigne par C un entier (algébrique) quelconque, *les deux formes finissent par avoir, pour* C *suffisamment grand, le même nombre de quantités paramétriques de cote inférieure ou égale à* C (et par suite aussi le même nombre de quantités paramétriques de cote égale à C).

Si l'on adopte en effet les mêmes notations qu'à l'alinéa II du n° 221, on finit par avoir, en vertu du même raisonnement,

$${}^{(C)}P' \geq {}^{(C)}P'',$$

puis, en vertu du même raisonnement fait en sens inverse,

$$_{(C)}P'' \geq {}_{(C)}P',$$

d'où

$$_{(C)}P' = {}_{(C)}P''.$$

224. Nous avons étudié au Chapitre XI le système différentiel

$$(7) \qquad \sum \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} = \mu_{i,j} \qquad (\text{ou } \mu_{j,i}),$$

où u, v, ..., w désignent n fonctions inconnues des n variables indépendantes x_1, x_2, ..., x_n, (i, j) une *combinaison* de deux entiers, *distincts ou non,* pris dans la suite 1, 2, ..., n et $\mu_{i,j} (= \mu_{j,i})$ une fonction donnée des variables indépendantes (la sommation indiquée par le symbole Σ doit s'étendre aux n fonctions inconnues u, v, ..., w). Après avoir établi les conditions de possibilité du système formé par les $\frac{n(n+1)}{2}$ équations (7), nous avons, dans le système P, que forment les conditions dont il s'agit, considéré les fonctions $\mu_{i,j}$ comme des inconnues, puis, mettant le système P sous une forme orthonome passive, O, résolue par rapport à certaines dérivées secondes, nous avons constaté que *n des fonctions* $\mu_{i,j}$ *y sont complètement arbitraires* (nº 193).

Il était facile de le prévoir.

Si l'on considère en effet le système (7) comme impliquant les

$$n + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2}$$

fonctions inconnues

$$u, \quad v, \quad \ldots, \quad w,$$
$$\mu_{i,j},$$

des variables indépendantes x_1, x_2, ..., x_n, on obtient, comme il est très facile de s'en rendre compte, une première forme passive ordinaire de ce système en le résolvant par rapport aux $\frac{n(n+1)}{2}$ inconnues $\mu_{i,j}$, puis une deuxième en adjoignant aux équations R_1 et R_2 du nº 178 (alinéa III) les conditions de possibilité O. Cela étant, si, après avoir fixé pour chacune des deux formes du système (7) l'économie des conditions initiales, on se borne pour chacune d'elles à la considération exclusive des arbitraires où le nombre des variables

indépendantes est maximum, il résulte des principes exposés ci-dessus (n° 221) que ces arbitraires doivent dépendre de part et d'autre du même nombre de variables et être de part et d'autre en même nombre. Or, puisque la première forme, examinée à ce point de vue, comporte manifestement n fonctions arbitraires des n variables indépendantes, il en est forcément de même pour la seconde ; et, cela étant, puisque les conditions initiales du système (R_1, R_2) ne comportent (par rapport à u, v, ..., w) que des constantes arbitraires, il faut bien que, dans O, les conditions initiales comportent (par rapport aux $\mu_{i,j}$) n fonctions arbitraires des n variables indépendantes, c'est-à-dire que n des fonctions $\mu_{i,j}$ (et pas davantage) soient entièrement arbitraires.

Il est facile de voir en outre, ce qui concorde avec une constatation déjà faite (n° 193), que, *dans la forme considérée du système* P, *l'ensemble des conditions initiales relatives aux* $\frac{n(n-1)}{2}$ *inconnues non entièrement arbitraires contient forcément* (avec diverses arbitraires de genre inférieur à $n-1$) *n arbitraires de genre $n-1$*.

Considérons en effet, d'une part la forme obtenue en résolvant le système (7) par rapport aux inconnues $\mu_{i,j}$, d'autre part la forme obtenue en adjoignant aux équations (R_1, R_2) le système P, mis sous la forme O : dans cette forme O, il est évidemment permis de supposer que la cote (première) commune à toutes les inconnues $\mu_{i,j}$, au lieu d'être nulle comme nous l'avons supposé au n° 186, a pour valeur l'unité. Cela étant, si, dans l'une et l'autre des deux formes ci-dessus spécifiées du système (7), on attribue aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des cotes respectives toutes égales à 1, et aux inconnues

$$u, \quad v, \quad \ldots, \quad w, \quad \mu_{i,j}$$

les cotes respectives

$$0, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0, \quad 1,$$

il est facile de voir que l'une et l'autre satisfont à la définition des formes passives ordinaires ; il résulte de là (n° 223) que, pour k suffisamment grand, le nombre des quantités paramétriques de cote inférieure ou égale à $k+1$ est le même pour les deux formes. Observons maintenant que, dans le système (7) résolu par rapport aux fonctions $\mu_{i,j}$, *toutes* les dérivées d'ordres quelconques (≥ 0) de ces fonctions sont principales, et *toutes* les dérivées de u, v, ..., w para-

métriques, tandis que, dans le système (O, R_1, R_2), les dérivées des $\mu_{i,j}$ sont, les unes principales, les autres paramétriques, toutes les dérivées de $u, v, \ldots, w$ d'ordre supérieur à 1 principales, et $\frac{n(n-1)}{2}$ dérivées premières de $u, v, \ldots, w$ paramétriques, ainsi que ces fonctions elles-mêmes. En écrivant alors que le nombre des quantités paramétriques de cote inférieure ou égale à $k+1$ est le même pour es deux formes considérées, on est conduit à cette conclusion que, dans le système O, le nombre des quantités paramétriques d'ordre inférieur ou égal à k des fonctions $\mu_{i,j}$ s'obtiendra en considérant le nombre total des quantités d'ordre inférieur ou égal à $k+1$ fournies par $u, v, \ldots, w$, et retranchant de ce nombre

$$\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

ce qui donne

$$n\frac{(k+2)(k+3)\ldots(k+n)(k+n+1)}{1.2\ldots(n-1)n}-\frac{n(n+1)}{2}.$$

En retranchant de ce nombre celui des dérivées d'ordre inférieur ou égal à k des n fonctions entièrement arbitraires du système O, il reste, pour les dérivées paramétriques d'ordre inférieur ou égal à k des $\frac{n(n-1)}{2}$ fonctions $\mu_{i,j}$ restantes, le nombre

$$n\frac{(k+2)(k+3)\ldots(k+n)(k+n+1)}{1.2\ldots(n-1)n}-\frac{n(n+1)}{2}$$
$$-n\frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+n)}{1.2\ldots n},$$

ou

$$\frac{n}{1.2\ldots(n-1)}(k+2)(k+3)\ldots(k+n)-\frac{n(n+1)}{2},$$

c'est-à-dire un polynome entier en k ayant pour terme de degré maximum

$$n\frac{k^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}.$$

On conclut de là, conformément à notre calcul du n° 219 (alinéa II), qu'après avoir fixé d'une manière quelconque les inconnues entièrement arbitraires du système O, la solution générale du système résultant comporte bien, pour les $\frac{n(n-1)}{2}$ inconnues restantes, n fonctions arbitraires de $n-1$ variables.

225. La détermination des systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales à n variables conduit, comme il a été dit au n° 195, aux $\frac{n(n-1)}{2}$ équations simultanées

$$(8) \qquad \sum \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0,$$

où $u, v, \ldots, w$ désignent n fonctions inconnues des n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, (i, j) une *combinaison* de deux entiers *distincts* pris dans la suite $1, 2, \ldots, n$, et où les sommations indiquées par le symbole Σ doivent s'étendre aux n fonctions inconnues $u, v, \ldots, w$. Cela étant :

Si l'on met le système (8), *aux inconnues* $u, v, \ldots, w$, *sous l'une des formes complètement intégrables définies par nos théorèmes d'existence, l'ensemble des conditions initiales contient* (avec diverses arbitraires de genre inférieur à 2) $\frac{n(n-1)}{2}$ *arbitraires de genre* 2.

Adjoignons en effet aux équations données (8) les équations

$$(9) \qquad \sum\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 = \mu_{1,1}, \quad \sum\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 = \mu_{2,2}, \quad \ldots, \quad \sum\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2 = \mu_{n,n},$$

où $\mu_{1,1}, \mu_{2,2}, \ldots, \mu_{n,n}$ désignent des inconnues auxiliaires : dans le système [(8), (9)] se trouvent alors engagées les $2n$ inconnues

$$\begin{matrix} u, & v, & \ldots, & w, \\ \mu_{1,1}, & \mu_{2,2}, & \ldots, & \mu_{n,n}, \end{matrix}$$

des n variables indépendantes

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n.$$

Or, si l'on désigne par S l'une des formes complètement intégrables de (8) que spécifie notre énoncé, on obtiendra évidemment une forme passive ordinaire du système [(8), (9)] en résolvant les équations (9) par rapport aux inconnues μ, remplaçant dans les seconds membres les dérivées principales (premières) de $u, v, \ldots, w$ par leurs valeurs tirées de S, et adjoignant finalement à S le système Q ainsi obtenu : il est manifeste d'ailleurs que le système (S, Q) a le même degré de généralité que S.

On obtient, d'autre part, une deuxième forme passive ordinaire de [(8), (9)] en adjoignant aux équations R_1, R_2 du nº 178 les conditions de possibilité du système [(8), (9)] mises sous la forme indiquée au nº 194.

Or, d'après ce qui a été dit au nº 195, l'ensemble des conditions initiales relatives à ce dernier système contient (avec diverses arbitraires de genre inférieur à 2) $\frac{n(n-1)}{2}$ arbitraires de genre 2 : il en est donc de même (nº 221) du système (S, Q), et, par suite, du système S.

226. *Toute forme passive où les déterminations initiales schématiques des intégrales hypothétiques ne contiennent qu'un nombre limité d'arbitraires de genre zéro, sans aucune arbitraire de genre supérieur, ne peut manquer d'être : 1º ordinaire; 2º complètement intégrable.*

Plus brièvement : *toute forme passive ne dépendant que d'un nombre fini de constantes arbitraires est ordinaire et complètement intégrable.*

I. Une pareille forme est nécessairement *ordinaire*.

Considérons en effet les formules de résolution du système prolongé, qui expriment les quantités principales à l'aide des variables indépendantes et des quantités paramétriques : le nombre des quantités paramétriques étant essentiellement limité, il est clair qu'à partir d'une valeur suffisamment grande de k, l'expression d'une dérivée principale d'ordre k ne contient, avec les variables x, y, ..., que des dérivées paramétriques dont l'ordre (positif ou nul) tombe au-dessous de k : il suffit dès lors, pour se convaincre que la forme passive est ordinaire, d'attribuer à chaque fonction inconnue la cote zéro en même temps qu'on attribue à chaque variable indépendante la cote 1.

II. Une pareille forme est, de plus, *complètement intégrable :* en d'autres termes, elle admet une solution analytique répondant à des conditions initiales arbitrairement choisies, c'est-à-dire telle que, pour des valeurs numériques données des variables x, y, ..., les quantités paramétriques (en nombre limité) prennent des valeurs numériques données.

Désignons en effet par S la forme passive donnée, nécessairement ordinaire d'après I ; en vertu de la possibilité numérique de S prolongé, l'application au système S de la méthode exposée au nº 215 ou 216 conduit forcément (nº 217, I) à une forme passive ordinaire, S′, complètement intégrable, ayant le même degré de généralité que S (nº 222), et telle que S′ prolongé équivaille numériquement à S prolongé.

Cela posé, considérons, dans S prolongé, la solution numérique où x, y, ... et les quantités paramétriques (de S) possèdent les valeurs choisies : cette solution ne peut manquer de vérifier aussi le système S′ prolongé ; d'ailleurs, la forme S′, ayant le même degré de généralité que S, ne dépend, elle non plus, que d'un nombre limité de quantités paramétriques : la solution numérique considérée donnera donc lieu, dans S′, à des déterminations initiales convergentes, et par suite, puisque le système S′ est complètement intégrable, fournira une solution analytique de S′, donc aussi une solution analytique de S.

227. *Si un système différentiel peut, de quelque manière, être mis sous une forme passive ne dépendant que d'un nombre fini de constantes arbitraires, toutes les formes passives du système en question dépendent du même nombre de constantes et sont complètement intégrables.*

Soient S′, S″ deux formes passives du système donné, dont la première, S′, est supposée ne dépendre que d'un nombre fini de constantes arbitraires ; et soient λ', λ'' les deux valeurs de λ qui s'y rapportent respectivement. La forme S′, ne dépendant que d'un nombre fini de constantes arbitraires, est nécessairement ordinaire (nº 226), et l'on a dès lors, en vertu du nº 221,

$$\lambda' - \lambda'' \geqq 0 ;$$

il en résulte, puisque λ' est nul par hypothèse,

$$\lambda'' \leqq 0 ;$$

comme d'ailleurs λ'' ne peut être négatif, il est forcément nul, et la forme S″, ne dépendant, elle non plus, que d'un nombre fini de

constantes arbitraires, est ordinaire comme S' (nº 226). Finalement, les deux formes passives S', S'', étant ordinaires, possèdent le même degré de généralité, et, par suite, dépendent du même nombre de constantes; elles sont, de plus, complètement intégrables, en vertu du numéro précédent [1].

---

[1] Il va sans dire que ces propriétés sont indépendantes du changement des variables et des inconnues. *Voir* à ce sujet le Mémoire déjà cité (*Acta mathematica*, t. XXV, p. 352).

FIN.



ERRATA.

Page 394, dans la première figure, intervertir les lettres u et v.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE IV.

GÉNÉRALITÉS SUR LE CALCUL DES FONCTIONS PAR CHEMINEMENT.

CHAPITRE V.

FONCTIONS SCHÉMATIQUES ET COUPURES.

CHAPITRE VI.

CALCUL INVERSE DE LA DÉRIVATION.

CHAPITRE VII.

SYSTÈMES ORTHONOMES.

CHAPITRE VIII.

FONCTIONS IMPLICITES.

CHAPITRE IX.

SIMPLIFICATION ET EXTENSION DES RÉSULTATS OBTENUS SUR LES SYSTÈMES ORTHONOMES : PROPOSITIONS PRÉLIMINAIRES.

CHAPITRE X.

SIMPLIFICATION ET EXTENSION DES RÉSULTATS OBTENUS SUR LES SYSTÈMES ORTHONOMES : THÉORÈMES D'EXISTENCE.

CHAPITRE XI.

APPLICATION DES THÉORIES PRÉCÉDENTES A L'INTÉGRATION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES AUXQUELS CONDUISENT : 1° L'ÉTUDE DES DÉFORMATIONS FINIES D'UN MILIEU CONTINU DANS L'ESPACE A UN NOMBRE QUELCONQUE DE DIMENSIONS; 2° LA DÉTERMINATION DES SYSTÈMES DE COORDONNÉES CURVILIGNES ORTHOGONALES A UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES.

CHAPITRE XII.

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS OÙ LES CONDITIONS INITIALES PRÉSENTENT UNE DISPOSITION RÉGULIÈRE.

CHAPITRE XIII.

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS DONT L'INTÉGRATION SE RAMÈNE A CELLE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

CHAPITRE XIV.

RÉDUCTION D'UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL QUELCONQUE A UNE FORME COMPLÈTEMENT INTÉGRABLE.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

42788 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

